

# Doprinos geometrijske nelinearnosti u nekim slučajevima elementarne teorije elastičnosti

---

Jerečić, Elizabeta

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:169:694530>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-25**



*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering Repository, University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
RUDARSKO-GEOLOŠKO-NAFTNI FAKULTET  
Preddiplomski studij rudarstva

**DOPRINOS GEOMETRIJSKE NELINEARNOSTI U NEKIM SLUČAJEVIMA  
ELEMENTARNE TEORIJE ELASTIČNOSTI**

Završni rad

Elizabeta Jerečić

R4299

Zagreb, 2022.



KLASA: 602-01/22-01/100  
URBROJ: 251-70-11-22-2  
U Zagrebu, 09.09.2022.

Elizabeta Jerečić, studentica

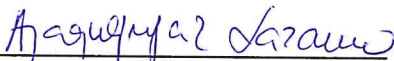
## RJEŠENJE O ODOBRENJU TEME

Na temelju vašeg zahtjeva primljenog pod KLASOM 602-01/22-01/100, URBROJ: 251-70-11-22-1 od 01.05.2022. priopćujemo vam temu završnog rada koja glasi:

### DOPRINOS GEOMETRIJSKE NELINEARNOSTI U NEKIM SLUČAJEVIMA ELEMENTARNE TEORIJE ELASTIČNOSTI


Za voditeljicu ovog završnog rada imenuje se u smislu Pravilnika o izradi i ocjeni završnog rada Izv.prof.dr.sc.Antonia Jaguljnjak Lazarević nastavnik Rudarsko-geološko-naftnog-fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

Voditelj

  
(potpis)

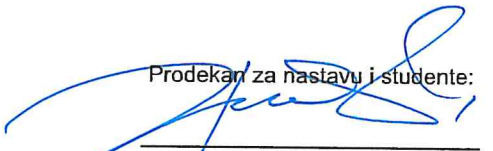
Izv.prof.dr.sc.Antonia Jaguljnjak  
Lazarević  
(titula, ime i prezime)

Predsjednik povjerenstva za  
završne i diplomske ispite:

  
(potpis)

Izv.prof.dr.sc. Dubravko  
Domitrović  
(titula, ime i prezime)

Prodekan za nastavu i studente:

  
(potpis)

Izv.prof.dr.sc. Borivoje  
Pašić  
(titula, ime i prezime)

DOPRINOS GEOMETRIJSKE NELINEARNOSTI U NEKIM SLUČAJEVIMA ELEMENTARNE  
TEORIJE ELASTIČNOSTI

Elizabeta Jerečić

Rad izrađen: Sveučilište u Zagrebu  
Rudarsko-geološko-naftni fakultet  
Zavod za rudarstvo i geotehniku  
Pierottijeva 6, 10 000 Zagreb

Sažetak

U ovom završnom radu prikazana su dva primjera iz elementarne teorije elastičnosti koja ne možemo riješiti primjenom teorije I. reda nego moramo uzeti u obzir deformacije sustava. Savijanje štapa uz istodobno djelovanje uzdužne sile i Von Misesova elementarna rešetka su primjeri koji zorno prikazuju mogućnosti odnosno ograničenja primjene linearne teorije elastičnosti. Dobiveni su izrazi za elastičnu liniju i unutarnje sile.

Ključne riječi: Teorija I. reda, materijalna linearnost, geometrijska linearnost

Završni rad sadrži: 19 stranica, 13 slika i 7 referenci.

Jezik izvornika: Hrvatski

Pohrana rada: Knjižnica Rudarsko-geološko-naftnog fakulteta, Pierottijeva 6, Zagreb

Mentor: Dr. sc. Antonia Jaguljnjak Lazarević, izvanredna profesorica RGNF

Ocjenjivači: Dr. sc. Antonia Jaguljnjak Lazarević, izvanredna profesorica RGNF  
Dr. sc. Petar Hrženjak, izvanredni profesor RGNF  
Dr. sc. Krešimir Pavlić, docent RGNF

## SADRŽAJ

1. UVOD .....	1
2. TEMELJNE PRETPOSTAVKE LINEARNE TEORIJE ELASTIČNOSTI.....	2
3. SAVIJANJE UZ ISTODOBNO DJELOVANJE UZDUŽNE SILE.....	4
4. VON MISSESOVA ELEMENTARNA REŠETKA.....	12
5. ZAKLJUČAK .....	18
6. LITERATURA .....	19

## POPIS SLIKA

Slika 2-1. Linearna ovisnost opterećenja $o$ i naprezanja $\sigma$ .....	3
Slika 2-2. Jednostavna greda opterećena poprečno i uzdužno: a) vlačnom silom b) tlačnom silom .....	3
Slika 3-1. Primjer uzdužno i poprečno opterećenog štapa .....	4
Slika 3-2. Presjeci štapa u karakterističnim točkama .....	6
Slika 3-3. Prikaz dijagrama unutarnjih sila: a) slika položaja, b) uzdužna sila, c) poprečna sila, d) moment savijanja .....	7
Slika 3-4. Funkcija momenta savijanja za područje $0 \leq x \leq l-c$ .....	7
Slika 3-5. Funkcija momenta savijanja za područje $l-c \leq x \leq l$ .....	8
Slika 3-6. Prikaz djelovanja uzdužne tlačne sile $N$ na deformirani štap .....	9
Slika 4-1. Von Missesova elementarna rešetka .....	12
Slika 4-2. Ravnoteža sila u čvoru $C$ .....	12
Slika 4-3. Grafičko rješenje: a) slika položaja, b) poligon sila.....	13
Slika 4-4. Deformirani oblik.....	13
Slika 4-5. Ravnoteža sila u čvoru $C'$ .....	14

## POPIS KORIŠTENIH OZNAKA I JEDINICA

Oznaka	Jedinica	Opis
$F, S, H, R_{AH}, R_{AV}, R_B$	N	intenzitet vanjske sile (aktivne ili reaktivne)
$M_y$	Nm	intenzitet momenta savijanja oko osi y
$l, c, l_{CB}, l_{CD}$	m	duljina
$w$	m	progib
$E$	N/m <sup>2</sup>	Youngov modul elastičnosti
$I_y$	m <sup>4</sup>	moment tromosti ravnog poprečnog presjeka oko oko osi y
$N_{CB}, N_{CD}$	N	intenzitet uzdužne sile u štapu
$A$	m <sup>2</sup>	površina poprečnog presjeka
$\delta c$	m	pomak točke C
$\varepsilon$	-	relativna uzdužna deformacija
$\varphi$	rad	kut
$T_z$	N	intenzitet unutarnje poprečne sile
$\sigma$	N/m <sup>2</sup>	naprezanje
$x, y, z$	m	osi Kartezijevog koordinatnog sustava
$q$	N/m	kontinuirano opterećenje
$C1, C2, C3, C4$	-	konstante integracije

## 1. UVOD

Način proračuna inženjerskih konstrukcija je takav da realni fizikalni problem zamjenjujemo matematičkim modelom koji je skup nužnih aproksimacija te s njim uvodimo niz idealiziranih pojednostavljenja (Jaguljnjak Lazarević, 2020).

Jedan od matematičkih modela kojeg koristimo je linearni model kojeg možemo opisati ovako: ako su relativne dužinske deformacije i kutovi zaokreta pri nekom opterećenju i dovoljnoj krutosti grede mali prema jedinici, tada deformirani oblik možemo aproksimirati nedeformiranim stoga i uvjete ravnoteže možemo postaviti na nedeformiranom nosaču (Dvornik, et al., 2020). Navedene pretpostavke nazivamo geometrijskom linearnosti i vrlo su važne jer pomoću njih bitno pojednostavljujemo postupke proračuna.

Uz njih mora vrijediti i Hookeov zakon ponašanja koji kao idealizacija približno vrijedi za mala naprezanja i deformacije, a zbog toga što linearno povezuje naprezanja i deformacije nazivamo ga materijalnom linearnosti.

Proračuni uz navedene aproksimacije daju dovoljno točne rezultate kod rješavanja većine praktičnih slučajeva, primjerice, ako je dopušteni progib oko  $1/300$  raspona, odnosno ako su stvarne deformacije oko 0,1% (Dvornik, et al., 2020).

U ovom radu prikazat ćemo dva jednostavna primjera koja iako pripadaju materijalnoj linearnosti nije moguće riješiti uz pretpostavku geometrijske linearnosti.



## 2. TEMELJNE PRETPOSTAVKE LINEARNE TEORIJE ELASTIČNOSTI

Teorija elastičnosti (TE) je dio matematičke fizike u kojem promatramo promjenu stanja naprezanja i deformacija čvrstog elastičnog tijela uslijed djelovanja raznih utjecaja koji mogu biti statički ili dinamički. Svrha TE je određivanje naprezanja i deformacija u svakoj točki konstrukcije radi proračuna koeficijenta sigurnosti, odnosno dimenzioniranja pojedinih elemenata konstrukcije.

Dvije osnovne pretpostavke na kojima se temelji linearna TE su:

1. Deformacije su relativno male, odnosno postoji linearna veza između deformacija i derivacija pomaka. To nazivamo **geometrijskom linearnosti**.
2. Postoji linearna ovisnost između elastičnih deformacija čvrstog tijela i opterećenja koje prouzrokuje deformacije (Hookeov zakon). To nazivamo **materijalnom linearnosti**.

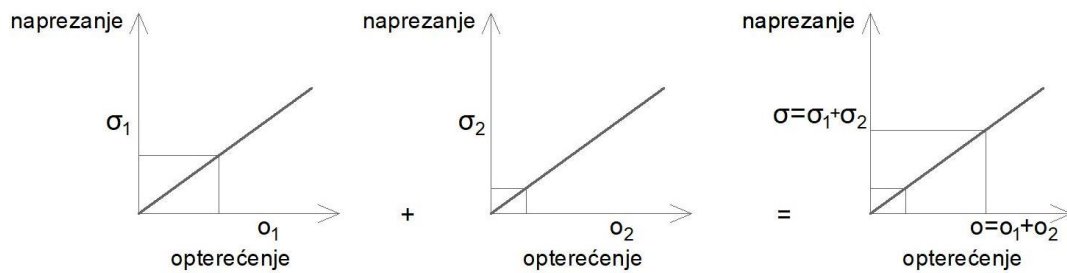
Još jedna bitna pretpostavka koju uvodimo je pojam **kontinuum** koji pretpostavlja da materija ima svojstvo neprekinute sredine. Napuštanje realne čestičnosti materije i uvođenje modela kontinuuma omogućava nam opisivanje fizikalnih pojava pomoću matematičkog aparata (derivacija, integrala, tenzorskog računa). Uz pretpostavku o neprekinutosti uvodimo i određena svojstva kontinuuma, a to su homogenost i izotropnost (Kostrenčić, 1971).

Ako je elastično tijelo homogeno to znači da ima fizičko-mehanička svojstva jednaka u svakoj točki, a kada kažemo da je izotropno onda to znači da su mu svojstva u svim pravcima jednaka (Timošenko i Gudier, 1962). Svojstva tehničkih materijala uglavnom odstupaju od svojstava koja smo pripisali idealnoj elastičnoj sredini – modelu. Međutim dokazano je da deformacije tehničkih konstrukcija ne prelaze 1 % stoga i vrijede gore navedene pretpostavke (Kostrenčić, 1971).

Posljedica navedenih pretpostavki je ta da uvjete ravnoteže možemo s dovoljnom točnosti postaviti na nedeformiranom sustavu. Drugim riječima, kod promjene oblika tijela pri jako malim deformacijama deformirano tijelo izgleda gotovo kao nedeformirano, iz čega slijedi da deformacije ne utječu na točnost ravnoteže sila. Takav pristup zovemo **TEORIJOM I. REDA**.

Ako na taj način pristupamo inženjerskim proračunima konstrukcija, rješenja deformacija i naprezanja se razdvajaju u dvije povezane zadaće (metoda sila i metoda pomaka) što nam znatno pojednostavljuje tijek proračuna (Herman, 2008).

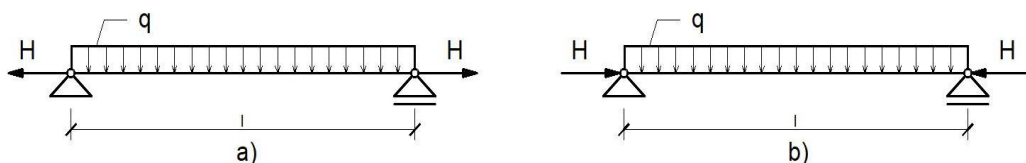
Osim navedenog u teoriji I. reda mora vrijediti i **zakon superpozicije** kojim se dokazuje da je zbroj dvaju ili više stanja naprezanja zbog dvaju ili više stanja opterećenja jednak stanju naprezanja uslijed zbroja dvaju ili više stanja opterećenja. To pravilo mora vrijediti i za pomake i za deformacije. Zakon superpozicije vrijedi samo ako između naprezanja i opterećenja, odnosno pomaka i deformacija postoji linearna ovisnost kao što je prikazano na Slika 2-1:



**Slika 2-1.** Linearna ovisnost opterećenja  $o$  i naprezanja  $\sigma$

Također moramo napomenuti da vrijedi i **St. Venantov princip** prema kojem je raspodjela pomaka i deformacija te naprezanja u pravilu različita na relativno malim dijelovima elastičnog tijela u blizini mjesta djelovanja sila, promjene geometrije ili mjesta oslanjanja ako se opterećenje zamijeni statički ekvivalentnim opterećenjem. No na dijelovima koji su udaljeni od mjesta na kojima djeluje opterećenje, razlika je mala tako da se praktički može zanemariti.

Zakon superpozicije i St. Venantov princip znatno olakšavaju rješavanje problema u TE, no treba dobro ocijeniti granice unutar kojih se oni mogu primjenjivati (Kostrenčić, 1971). U nekim slučajevima opterećenja, iako se radi o zadacima iz područja geometrijske i materijalne linearnosti, ne možemo primijeniti zakon superpozicije. To su slučajevi kada jedno opterećenje utječe na stanje naprezanja, deformacija i pomaka drugog opterećenja (Slika 2-2):



**Slika 2-2.** Jednostavna greda opterećena poprečno i uzdužno: a) vlačnom silom b) tlačnom silom

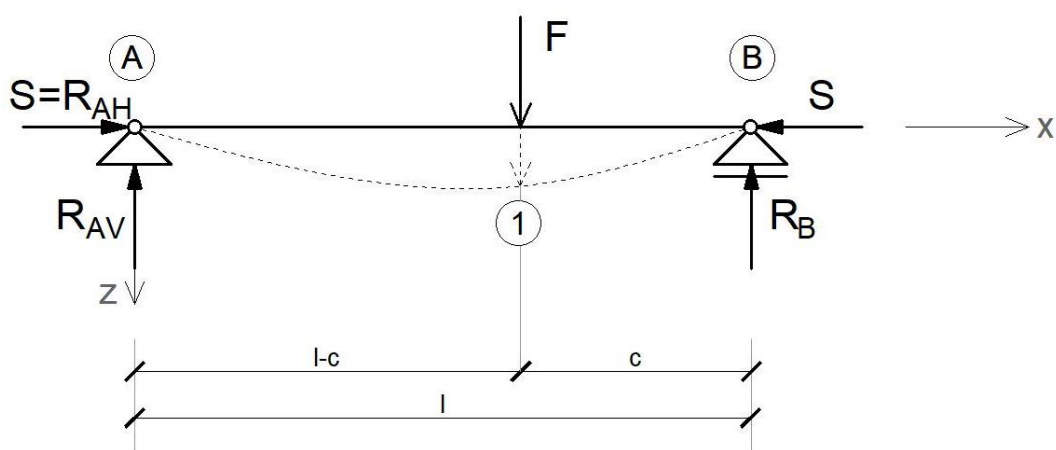
Djelovanje uzdužne vlačne sile smanjuje progib vitke grede u slučaju a) dok u slučaju b) uzdužna tlačna sila može izazvati gubitak elastične stabilnosti nosača iako je njezina vrijednost bitno manja od Eulerove kritične sile. To znači da se pri računanju deformacije štapova pod takvim uvjetima mora uzeti u obzir i utjecaj progiba na moment vanjskih sila, čak i kada su progibi veoma maleni. Tada progib nije više linearna funkcija sila i ne možemo ga dobiti pomoću superpozicije (Timošenko i Gudier, 1962).

U nastavku ćemo prikazati dva slučaja kada pri proračunu unutarnjih sila ne smijemo zanemariti nastale male deformacije jer se zbog njih bitno mijenja stanje naprezanja odnosno uvjeti ravnoteže.

### 3. SAVIJANJE UZ ISTODOBNO DJELOVANJE UZDUŽNE SILE

Na Sliku 3-1 prikazan je štap sa zglobno spojenim krajevima koji je poprečno opterećen koncentriranom silom  $F$  i uzdužno pritisnut dvjema jednakim silama  $S$  suprotnog smjera. Ako sila  $F$  djeluje u ravnini  $xz$ , tada će se savijanje odvijati u istoj toj ravnini (Timošenko i Gudier, 1962).

Ovdje imamo problem elastične stabilnosti odnosno problem u kojim se zbog malih deformacija bitno mijenja stanje naprezanja, što znači da se ne mogu zbrajati odvojeno određena stanja naprezanja zbog djelovanja uzdužne sile na štapu i poprečnog opterećenja na istom štapu (Kostrenčić, 1971).



Slika 3-1. Primjer uzdužno i poprečno opterećenog štapa

Tijek proračuna je takav da prvo izračunamo reaktivne i unutarnje sile. Prema teoriji I. reda jednadžbe ravnoteže postavljamo na nedeformiranom nosaču što znači da ne vidimo utjecaj sile  $S$  na moment savijanja  $M_y$ . Pošto se radi o ravninskom problemu iskoristit ćemo tri jednadžbe ravnoteže. Prvo računamo sumu svih sila u smjeru osi x:

$$1) \sum F_x = 0, \quad (3-1)$$

$$R_{AH} - S = 0, \quad (3-2)$$

$$R_{AH} = S. \quad (3-3)$$

Druga jednadžba ravnoteže koju koristimo kaže da suma svih momenata oko točke B mora biti nula:

$$2) \sum M_B = 0, \quad (3-4)$$

$$R_{AV} * l - F * c = 0, \quad (3-5)$$

$$R_{AV} = \frac{F * c}{l}. \quad (3-6)$$

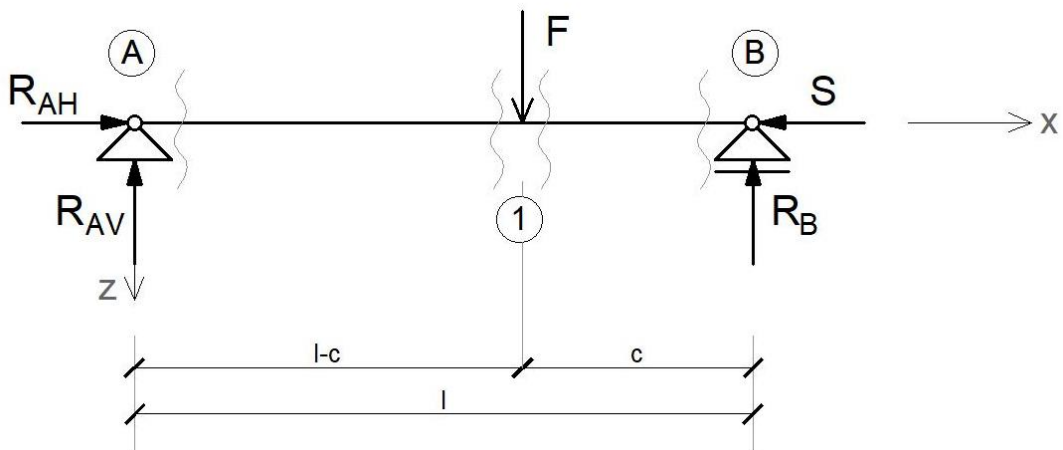
Treća jednadžba ravnoteže koju postavljamo kaže da suma momenata oko točke A mora biti nula:

$$3) \sum M_A = 0, \quad (3-7)$$

$$R_B * l - F * (l - c) = 0, \quad (3-8)$$

$$R_B = \frac{F * (l - c)}{l}. \quad (3-9)$$

Nakon što smo proračunali reaktivne sile, slijedi proračun unutarnjih sila koje određujemo presijecanjem nosača zamišljenim ravninama u karakterističnim točkama okomitom na os nosača i proračunom ravnoteže za zadržani dio (Slika 3-2):



Slika 3-2. Presjeci štapa u karakterističnim točkama

Iz uvjeta ravnoteže zadržanog djela nosača proračunamo intenzitete unutarnjih sila u karakterističnim točkama, A, 1 i B, pri čemu se i ovi uvjeti ravnoteže postavljaju na nedeformiranom nosaču:

**N dijagram:**

$$N_A = -S$$

$$N_l = -S$$

$$N_B = -S$$

**$T_z$  dijagram:**

$$T_{Z,A} = R_{AV} = \frac{F \cdot c}{l}$$

$$T_{Z,1}^L = T_{Z,A} = \frac{F \cdot c}{l}$$

$$T_{Z,1}^D = T_{Z,1}^L - F = \frac{F \cdot c - F \cdot l}{l}$$

$$T_{Z,B} = T_{Z,1}^D = \frac{F \cdot c - F \cdot l}{l}$$

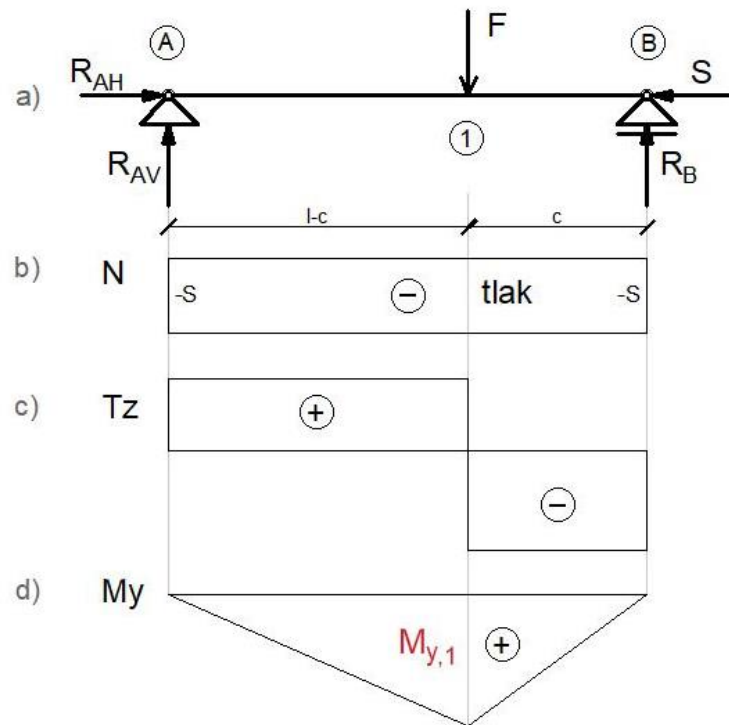
**$M_y$  dijagram:**

$$M_{y,A} = 0$$

$$M_{y,1} = M_{y,1} = F \cdot c - \frac{F \cdot c^2}{l}$$

$$M_{y,B} = 0$$

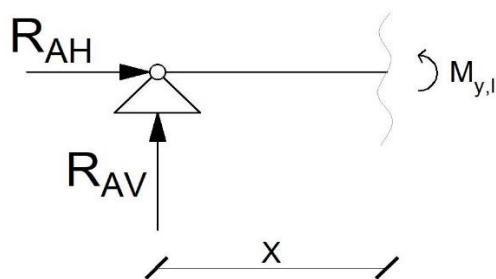
Dijagrami unutarnjih sila izgledaju ovako (Slika 3-3):



**Slika 3-3.** Prikaz dijagrama unutarnjih sila: a) slika položaja, b) uzdužna sila, c) poprečna sila, d) moment savijanja

Iz momentnog dijagrama (Slika 3-3) pod d) vidimo da imamo dvije funkcije, odnosno dva pravca i za svaki moramo odrediti jednađžbu. U točki 1 gdje se spajaju, iz jednađžbi kontinuiteta, moramo dobiti istu vrijednost momenta.

U presjeku na udaljenosti  $x$  tražimo funkciju momenta pa imamo (Slika 3-4):



**Slika 3-4.** Funkcija momenta savijanja za područje  $0 \leq x \leq l-c$

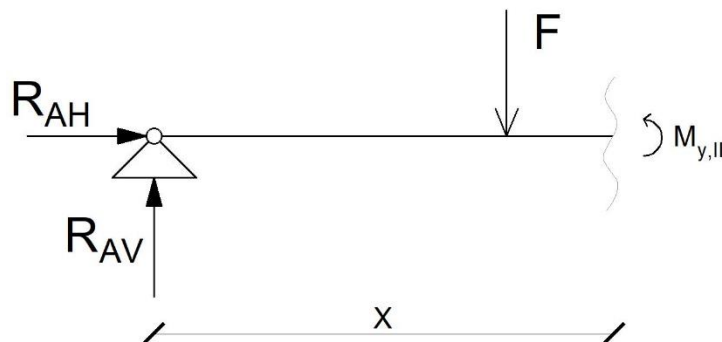
Funkcija momenta savijanja za područje  $0 \leq x \leq l - c$ , izgleda ovako:

$$M_{y,I} = R_{AV}x = \frac{Fc}{l}x, \quad (3-10)$$

Ako za  $x$  uvrstimo  $(l-c)$  dobivamo:

$$M_{y,I} = \frac{Fc}{l} (l - c). \quad (3-11)$$

Dalje radimo presjek za drugi dio (Slika 3-5):



Slika 3-5. Funkcija momenta savijanja za područje  $l-c \leq x \leq l$

Funkcija momenta savijanja za područje  $l - c \leq x \leq l$ , izgleda ovako:

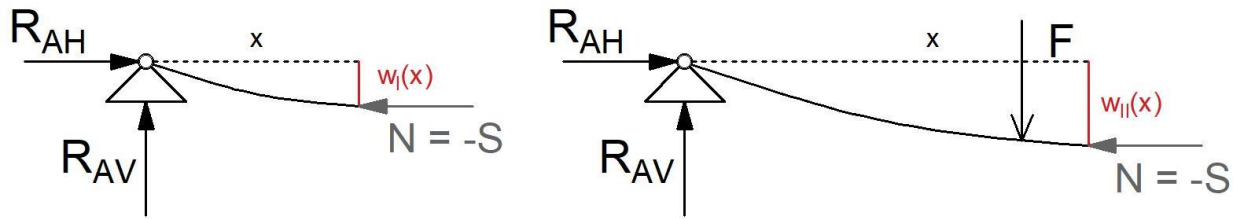
$$M_{y,II} = R_{AV}x - F(x - l + c), \quad (3-12)$$

ako i ovdje umjesto  $x$  uvrstimo  $(l-c)$  dobit ćemo isti izraz kao i za (3-11):

$$M_{y,II} = \frac{Fc}{l} (l - c). \quad (3-13)$$

Primijetimo da u izrazima (3-10) i (3-12) nema utjecaja uzdužne sile na moment savijanja jer su dobiveni na nedeformiranom nosaču u skladu s teorijom I. reda.

Dalje što radimo je postavljanje diferencijalne jednadžbe elastične linije za dva dijela štapa i to na deformiranom nosaču jer znamo da djelovanje uzdužne tlačne sile i za male deformacije daje neuravnoteženi moment savijanja kojega treba uzeti u obzir pri proračunu deformacija (Slika 3-6):



Slika 3-6. Prikaz djelovanja uzdužne tlačne sile  $N$  na deformirani štap

Prisjetimo se prvo kako izgleda diferencijalna jednačba progibne linije štapa opterećenog na čisto savijanje, odnosno savijanje poprečnim silama:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y}, \quad (3-14)$$

koja kaže da je druga derivacija progiba proporcionalna momentu savijanja  $M_y$  i obrnuto proporcionalna fleksijskoj krutosti  $EI_y$ . Za naš primjer diferencijalna jednačba progibne linije za prvi dio štapa izgleda ovako:

$$EI_y \frac{d^2w_I}{dx^2} = -\frac{Fc}{l} x - Sw_I, \quad (3-15)$$

a za drugi dio štapa diferencijalna jednačba progibne linije izgleda ovako:

$$EI_y \frac{d^2w_{II}}{dx^2} = -\frac{F(l-c)}{l} (l-x) - Sw_{II}, \quad (3-16)$$

gdje je umnožak  $Sw_I$  odnosno  $Sw_{II}$  utjecaj uzdužne sile na progib ostvaren na deformiranom nosaču.

Označimo li konstantu oznakom  $p^2$ :

$$p^2 = \frac{S}{EI_y},$$

rješenja jednačbi (3-15) i (3-16) možemo zapisati u ovom obliku prema (Timošenko, 1966):



$$w_I = C_1 \cos px + C_2 \sin px - \frac{Fc}{Sl} x, \quad (3-17)$$

$$w_{II} = C_3 \cos px + C_4 \sin px - \frac{F(l-c)}{Sl} (l-x). \quad (3-18)$$

Konstante integracije  $C_1 - C_4$  dobivamo iz rubnih uvjeta i uvjeta kontinuiteta:

❖ rubni uvjeti

$w_I(x=0) = 0$  - progib u ležaju A jednak je nuli

$w_{II}(x=l) = 0$  - progib u ležaju B jednak je nuli

pa konstante  $C_1$  i  $C_3$  iznose:

$$C_1 = 0, \\ C_3 = -C_4 \tan pl,$$

❖ uvjeti kontinuiteta

$w_I(x=l-c) = w_{II}(x=l-c)$  - jednaki progibi u točki 1

$w_I'(x=l-c) = w_{II}''(x=l-c)$  - jednak nagib tangente na progibnu liniju u točki 1

pa konstante  $C_2$  i  $C_4$  iznose:

$$C_2 = \frac{F \sin pc}{Sp \sin pl}, \\ C_4 = -\frac{F \sin p(l-c)}{Sp \operatorname{tg} pl}.$$

Konačna rješenja za zadane rubne uvjete i uvjete kontinuiteta glase (Timošenko, 1966):

$$w_I(x) = \frac{F \sin pc}{Sp \sin pl} \cdot \sin px - \frac{Fc}{Sl} \cdot x, \quad (3-19)$$

$$w_{II}(x) = \frac{F \sin p(l-c)}{Sp \sin pl} \cdot \sin p(l-x) - \frac{F(l-c)}{Sl} \cdot (l-x). \quad (3-20)$$

Ako pojednostavimo primjer i uzmemo da je  $c = \frac{l}{2}$  odnosno kada koncentrirano opterećenje  $F$  djeluje na sredini raspona grede tada dobivamo maksimalni progib  $w_{max}$ :

$$w_{max}\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{Fl^3}{48EI_y} \cdot \frac{tg u - u}{\frac{1}{3}u^3}, \quad (3-21)$$

gdje je:

$$u^2 = \frac{p^2 l^2}{4} = \frac{Sl^2}{4EI_y}.$$

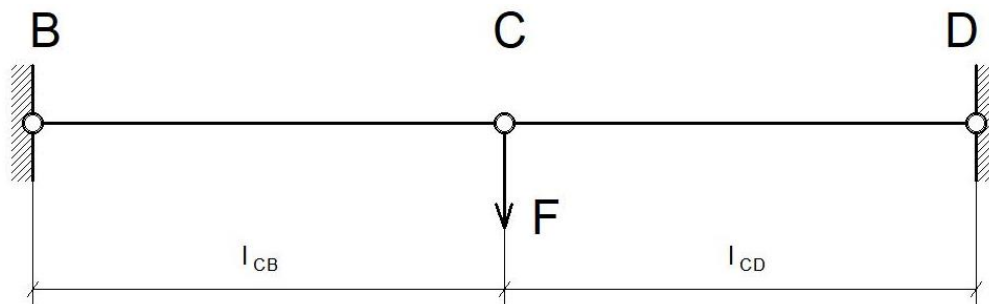
U izrazu (3-21) množenik (prvi faktor) daje progib koji bi se javio kad bi imali samo djelovanje poprečne sile  $F$ , a množitelj (drugi faktor) daje odnos u kojem se taj progib povećava uslijed djelovanja uzdužne tlačne sile  $S$ . Ako je uzdužna sila  $S$  puno manja od Eulerove kritične sile  $F_{kr}$  tada drugi faktor teži jedinici, a ako je  $S \approx F_{kr}$  onda teži u beskonačnost. Najveći moment savijanja u nosaču dobivamo iz izraza:

$$M_{y,max}\left(x = \frac{l}{2}\right) = -EI_y w'_{l/2} = \frac{Fl}{4} \cdot \frac{tg u}{u}. \quad (3-22)$$

Ovdje također vidimo da množenik daje progib koji bi se javio ako djeluje samo sila  $F$ , dok je množitelj - *koeficijent povećanja* momenta savijanja  $M_y$  uslijed djelovanja sile  $S$ . Za vrlo male vrijednosti broja  $u$  ( $S \ll F_{kr}$ ) vrijedi da je  $tg u \approx u$  te je koeficijent povećanja jednak jedan, odnosno na maksimalni moment savijanja (3-22) nema utjecaja uzdužnih sila, a ako je  $S \approx F_{kr}$  tada je  $tg u \approx \infty$  i maksimalni moment savijanja teži u beskonačnost.

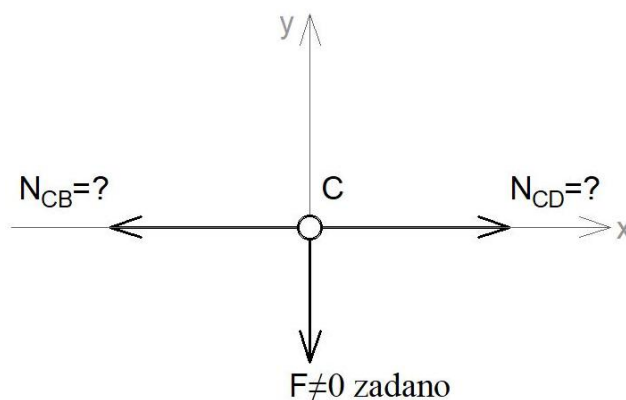
#### 4. VON MISSESOVA ELEMENTARNA REŠETKA

Zadan je sustav od dva kolinearna štapa opterećena koncentriranom silom u čvoru C (Slika 4-1):



Slika 4-1. Von Missesova elementarna rešetka

Štapovi su obostrano zglobno spojeni i poznata im je duljina ( $l_{CB}=l_{CD}=l$ ). Prema Slika 4-2 ishodište koordinatnog sustava postavljamo u čvor C kako bi izračunali nepoznate sile  $N_{CB}$  i  $N_{CD}$ .



Slika 4-2. Ravnoteža sila u čvoru C

Iz uvjeta ravnoteže čvora C prema teoriji I. reda slijedi:

$$1) \sum F_x = 0, \quad (4-1)$$

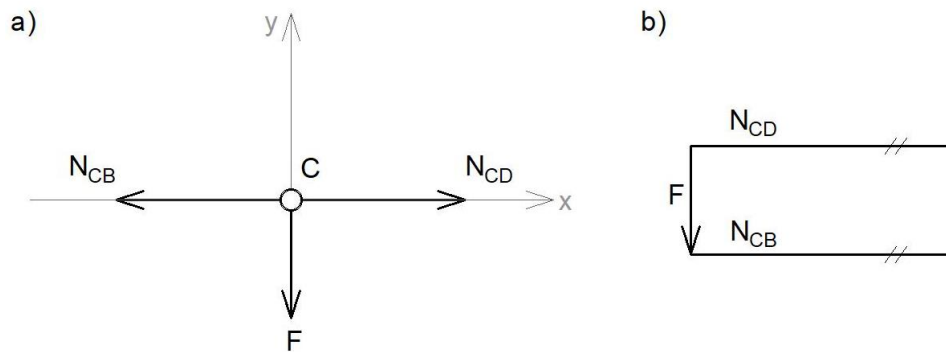
$$N_{CB} = N_{CD}. \quad (4-2)$$

$$2) \sum F_y = 0 \quad (4-3)$$

$$F = 0. \quad (4-4)$$

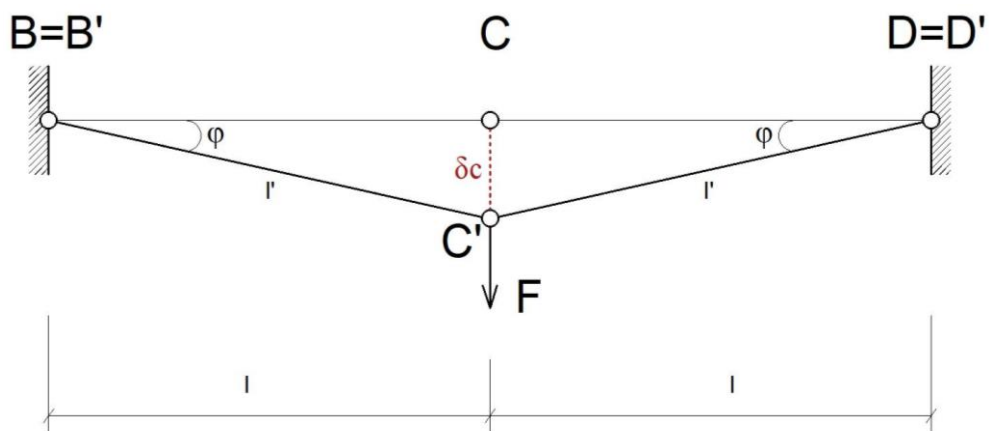
Vidimo da postavljeni sustav jednažbi (4-1) i (4-3) nema rješenje: vrijednosti unutarnjih sila  $N_{CB}$  i  $N_{CD}$  nisu dobivene prema (4-2), dok je uvjet ravnoteže po osi  $y$  moguć samo ako je  $F = 0$ , (4-4).

Ako grafički pokušamo riješiti zadani problem dobivamo da se poligon sila ne može zatvoriti jer se pravci nepoznanica sijeku u beskonačnosti (Slika 4-3).



Slika 4-3. Grafičko rješenje: a) slika položaja, b) poligon sila

U ovom slučaju smo pokazali da postavljanjem jednažbi ravnoteže na nedeformiranom modelu ne možemo dobiti rješenje. Zadatak se može riješiti samo ako izađemo iz okvira linearne teorije elastičnosti i deformacije uzmemo u obzir pa ćemo jednažbe ravnoteže postaviti na deformiranom obliku (Slika 4-4):



Slika 4-4. Deformirani oblik

Vrijedi:

$$l' = l + \Delta l, \quad (4-5)$$

gdje je  $\Delta l$  produljenje po Hookeu (materijalna linearnost):

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{A \cdot E}. \quad (4-6)$$

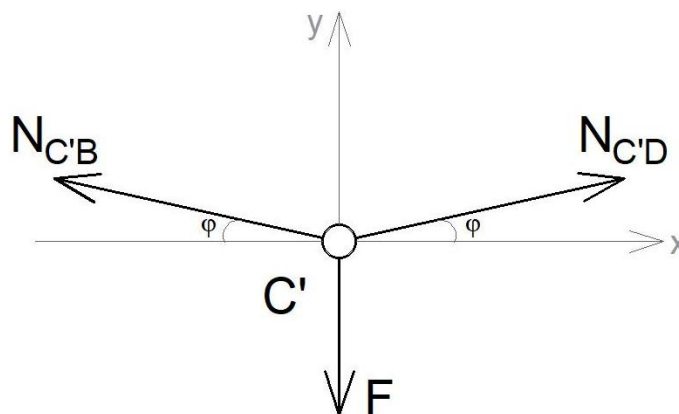
Prema Pitagori vrijedi:

$$l' = \sqrt{l^2 + \delta_c^2}, \quad (4-7)$$

Kut  $\varphi$  između deformiranog i nedeformiranog oblika označavamo sa  $\varphi$  pa sinus toga kuta možemo izraziti kao:

$$\sin \varphi = \frac{\delta_c}{\sqrt{l^2 + \delta_c^2}}. \quad (4-8)$$

Radimo ravnotežu čvora C' prema Slika 4-5:



Slika 4-5. Ravnoteža sila u čvoru C'

Iz ravnoteže svih sila u smjeru osi x (4-9) dobivamo da su sile  $N_{C'B}$  i  $N_{C'D}$  istog intenziteta (4-10) pa ćemo u daljnjem proračunu indekse izostaviti i samo pisati  $N$ :

$$1) \sum F_x = 0, \quad (4-9)$$

$$N_{C/B} = N_{C/D} = N. \quad (4-10)$$

Ravnoteža projekcija svih sila u smjeru osi y daje nam sljedeći izraz:

$$2) \sum F_y = 0, \quad (4-11)$$

$$F = 2N \sin \varphi, \quad (4-12)$$

koji sadrži dvije nepoznanice:  $N$  i  $\varphi$ . Da bi došli do rješenja potrebno je uz jednadžbe ravnoteže provesti i analizu naprezanja i deformacija.

Uzdužna sila  $N$  u štapu prema definiciji (Šimić, 1992) jednaka je:

$$N = \int_A \sigma dA, \quad (4-13)$$

gdje je  $\sigma$  normalno naprezanje u presjeku  $A$  okomitom na os štapa, pri čemu zanemarujemo promjenu dimenzije poprečnog presjeka. Ako u izraz (4-13) uvrstimo Hookeov zakon dobivamo:

$$N = \int_A \varepsilon E dA = \varepsilon E A \quad (4-14)$$

gdje je  $\varepsilon$  relativna uzdužna deformacija:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l' - l}{l}. \quad (4-15)$$

Jednadžbu (4-15) uvrstimo u (4-14):

$$N = \frac{l' - l}{l} \cdot E \cdot A = \frac{\sqrt{l^2 + \delta_c^2} - l}{l} \cdot E \cdot A, \quad (4-16)$$

$$N = \left( \frac{\sqrt{l^2 + \delta_c^2}}{l} - 1 \right) \cdot E \cdot A, \quad (4-17)$$

$$N = \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\delta_c}{l} \right)^2} - 1 \right) \cdot E \cdot A. \quad (4-18)$$

Prema (4-12) slijedi:

$$F = 2N \frac{\frac{\delta_c}{l}}{\sqrt{\frac{l^2 + \delta_c^2}{l^2}}}, \quad (4-19)$$

$$F = 2N \frac{\frac{\delta_c}{l}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\delta_c}{l} \right)^2}}, \quad (4-20)$$

$$F = 2EA \frac{\delta_c}{l} \frac{\left( \sqrt{1 + \left( \frac{\delta_c}{l} \right)^2} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \left( \frac{\delta_c}{l} \right)^2}}, \quad (4-21)$$

$$F = 2EA \frac{\delta_c}{l} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\delta_c}{l} \right)^2}} \right). \quad (4-22)$$

Ako uvedemo za odnos pomaka i duljine štapa oznaku  $p = \frac{\delta_c}{l}$  imamo sljedeće:

$$F = 2EA p \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{1 + p^2}} \right) = 2EA \left( p - \sqrt{\frac{p^2}{1 + p^2}} \right). \quad (4-23)$$

Iz (4-23) vidimo nelinearan odnos sile i pomaka pa izraz možemo pojednostaviti razvitkom Taylorovog reda :

$$\sqrt{\frac{p^2}{1+p^2}} = p - \frac{p^3}{2} + \frac{5p^5}{8} + O[p]^7, \quad (4-24)$$

ograničit ćemo se na prva dva člana reda jer ćemo tako dobiti približni odnos sile i pomaka:

$$F = \left(\frac{\delta_c}{l}\right)^3 EA. \quad (4-25)$$

Odnos pomaka i sile:

$$\delta_c = l \sqrt[3]{\frac{F}{EA}}. \quad (4-26)$$

Za zadano opterećenje  $F$  i odabrane dimenzije štapova dobivamo pomak  $\delta_c$ , pri čemu treba voditi računa da se cijeli postupak proračuna odvija u području materijalne linearnosti (Hookeov zakon).



## **5. ZAKLJUČAK**

Da bismo lakše riješili probleme pri projektiranju inženjerskih konstrukcija uvodimo niz aproksimacija i pretpostavki. U ovom radu prikazali smo specifične primjere kod kojih iako se radi o malim deformacijama i području Hookeovog zakona ne možemo proračun provesti prema teoriji 1. reda. Primjenom geometrijske nelinearnosti primjeri su riješeni te su dobiveni izrazi za elastičnu liniju i unutarnje sile.

Nelinearni proračuni neophodni su u svim zadaćama i problemima stabilnosti te pri proračunu visećih konstrukcija.

## 6. LITERATURA

Dvornik, J., Lazarević, D. & Bićanić, N., 2020. *O načelima i postupcima proračuna građevinskih konstrukcija*. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet.

Herman, K. T., 2008. *Teorija elastičnosti i plastičnosti*. Zagreb: Element.

Jaguljnjak Lazarević, A., 2020. *Predavanja iz Opće mehanike na sustavu za e-učenje Merlin (interna skripta)*. Zagreb: an.

Kostrenčić, Z., 1971. *Teorija elastičnosti*. Zagreb: an.

Šimić, V., 1992. *Otpornost materijala I*. Zagreb: Školska knjiga.

Timošenko i Gudier, 1962. *Teorija elastičnosti*. Beograd: Građevinska knjiga.

Timošenko, S., 1966. *Otpornost materijala drugi deo-Viša teorija i primeri*. Beograd: Građevinska knjiga.