O trokutu i kružnici u izotropnoj ravnini

Čatipović, Ivona; Jurkin, Ema; Milin Šipuš, Željka

Source / Izvornik: **Acta mathematica Spalatensia. Series didactica, 2020, 3, 13 - 23**

Journal article, Published version
Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

https://doi.org/10.32817/amssd.3.3.2

ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.3 (2020) 13–23

O trokutu i kružnici u izotropnoj ravnini

Ivona Čatipović, Ema Jurkin, Željka Milin Šipuš

Sažetak

U radu se proučava elementarna geometrija izotropne ravnine. Definira se metrika te se proučavaju metričke relacije u trokutu. Dokazuju se teoremi o obodnom kutu, te o ortičkom i tangencijalnom trokutu vezani za trokut i kružnicu te se dobiveni rezultati uspoređuju s analognim tvrdnjama u euklidskoj ravnini. Nastao je iz diplomskog rada Ivone Čatipović, *Geometrija izotropne ravnine.*

Ključni pojmovi: izotropna ravnina, euklidska ravnina, udaljenost, kut, trokut, kružnica

MSC 2010: 51N25

1 Uvod

Neka su u koordinatnoj ravnini zadane točke $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$. Promotrimo funkciju

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \varepsilon(y_B - y_A)^2}. \tag{1}$$

Za $\varepsilon = 1$, tom je funkcijom zadana euklidska udaljenost (metrika) točaka A, B, karakteristična za euklidsku geometriju ravnine koja se proučava tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja. Funkciju $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ koja točkama A i B pridružuje realan broj $d(A,B)$ nazivamo metrikom ako ona zadovoljava sljedeće aksiome:

(A1) $d(A,B) \geq 0, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^2$

(A2) $d(A, B) = 0 \iff A = B$

(A3) $d(A, B) = d(B, A), \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^2$

(A4) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \quad \forall A, B, C \in \mathbb{R}^2$.

Ako je $\varepsilon = -1$, tada pripadna funkcija (1) nije metrika, jer ne zadovoljava npr. svojstvo (A2). Udaljenost dviju različitih točaka može biti nula, primjerice to su točke $A(0, 0)$, $B(1, 1)$. Unatoč tome, njome se definira tzv. pseudometrika, te se pripadna geometrija ravnine naziva pseudoeuklidskom ili geometrijom Minkowskog. O temeljnim svojstvima Minkowskijeve ravnine može se pročitati u npr. [6].

Ako je pak $\varepsilon = 0$, tada funkcija (1) također nije metrika. Kao i u prethodnoj situaciji, postoje različite točke čija je udaljenost jednaka 0. To su općenito točke oblika $A(x_A, y_A)$, $B(x_A, y_B)$. Pripadna geometrija naziva se izotropnom geometrijom. Cilj je ovog rada upravo proučiti temeljna svojstva te geometrije, te u njoj svojstva istaknutih figura, trokuta i kružnice. Uočit ćemo neke sličnosti i razlike ove ravnine s nama poznatom euklidskom ravninom.

U matematičkom obrazovanju nije neuobičajeno ni nemoguće posezati za „drugačijim" geometrijama ravnine. Neeuklidske geometrije u užem smislu, primjerice, hiperbolička geometrija, obično su „izvan dosega" učenika. Inačica poznatog petog Euklidovog postulata za hiperboličku ravninu glasi da je zadanom točkom usporedno sa zadanim pravcem moguće povući više od jednog pravca. Među školskim izvankurikulskim temama iz geometrije koja nije euklidska, najčešće spominje tzv. taxicab geometrija ([3]), u kojoj se udaljenost među točkama računa kao $d(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$. Tom je funkcijom zaista definirana metrika, specijalni slučaj tzv. p-metrike

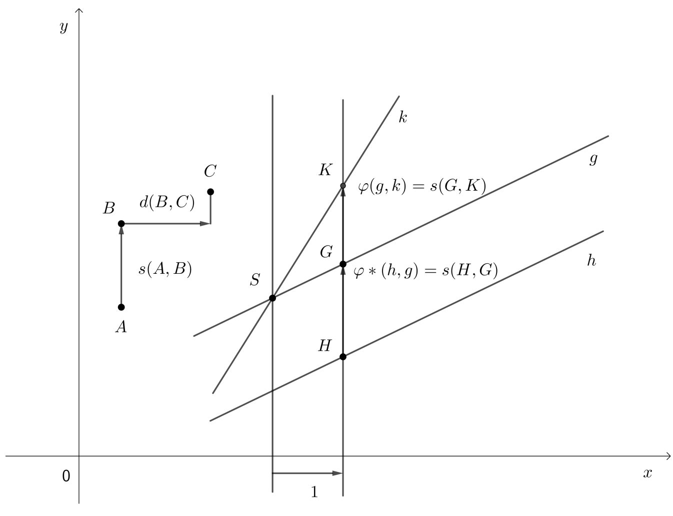
$$d(A, B) = \sqrt[p]{(x_B - x_A)^p + (y_B - y_A)^p}.$$

2 Osnovni pojmovi

Već smo istaknuli da je izotropna udaljenost točaka oblika $A(x_A, y_A)$, $B(x_A, y_B)$ jednaka 0 i kada je $y_A \neq y_B$. Točkama tog oblika je u izotropnoj ravnini određen jedan istaknuti smjer — u pripadnom je koordinatnom sustavu određen smjerom y-osi. Pravci s tim smjerom nazivaju se *izotropnim pravcima*. To su pravci zadani jednadžbama oblika $x = c$, $c \in \mathbb{R}$. Svaki *neizotropan* pravac g ima jednadžbu oblika $y = k_g x + l_g$, $k_g, l_g \in \mathbb{R}$, $k_g \neq 0$. Kao i u euklidskoj ravnini za dva neizotropna pravca s jednadžbama $y = k_g x + l_g$ i $y = k_h x + l_h$ kažemo da su *paralelni* ako je $k_g = k_h$. Za razliku od euklidske ravnine, u izotropnoj ravnini postoji i pojam paralelnih točaka. To su točke koje leže na istom izotropnom pravcu. Dakle, točke $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ su *paralelne* ako je $x_A = x_B$.

Za dvije neparalelne točke $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ uobičajeno je definirati orijentiranu *udaljenost* s $d(A, B) = x_B - x_A$. Udaljenost neparalelnih točaka je različita od 0, dok je za paralelne točke ona jednaka 0. Stoga se (ipak!) za dvije paralelne točke $A(x_A, y_A)$ i $B(x_A, y_B)$ definira *dopunska* udaljenost, tzv. *raspon* točaka $s(A, B) = y_B - y_A$, slika 1.

U svakoj geometriji trebamo definirati i način na koji se mjeri *kut*. U euklidskoj geometriji, (radijanska) mjera kuta φ između pravaca g i h s jednadžbama $y = k_g x + l_g$ i $y = k_h x + l_h$ izvodi se iz $\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_h - k_g}{1 + k_h k_g} \right|$. U izotropnoj geometriji mjera kuta između neizoropnih pravaca definira se kao $\varphi(g, h) = k_h - k_g$. Udaljenost točaka i kut između pravaca u izotropnoj ravnini invarijate su tzv. grupe izometrija izotropne ravnine, kao što su te odgovarajuće veličine u euklidskoj geometriji invarijante (euklidskih) izometrija — rotacije, translacije, osne i centralne simetrije. Osim oznake φ, za mjeru kuta često se koristi i oznaka $\measuredangle$. Primijetimo da je mjera kuta između dva neparalelna pravca jednaka rasponu (paralelnih) točaka na zadanim pravcima koje su od sjecišta pravaca pomaknute za $x = 1$. Za paralelne pravce g i h definirana je vrijednost $\varphi^*(g, h) = l_h - l_g$, slika 1. Uočimo da su sve četiri definirane vrijednosti orijentirane, tj. $d(B, A) = -d(A, B)$, $s(B, A) = -s(A, B)$, $\varphi(h, g) = -\varphi(g, h)$, $\varphi^*(h, g) = -\varphi^*(g, h)$.



Slika 1: Udaljenost točaka i kut pravaca

U izotropnoj se ravnini ne definira okomitost, ali se definira *normala* neizotropnog pravca p u nekoj točki T kao izotropni pravac n koji prolazi točkom T. *Udaljenost* $d(T,p)$ točke T od pravca p je raspon $s(N,P)$, gdje je N točka pravca p paralelna točki T.

Polovište M neparalelnih točaka $A(x_A,y_A)$ i $B(x_B,y_B)$ je točka pravca AB takva da $d(A,M)=d(M,B)$. Koordinate točke M su

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right).$$

Pojam polovišta u izotropnoj ravnini identičan je tom pojmu u euklidskoj ravnini. I njegove su koordinate dane istim izrazom.

Simetrala s neparalelnih pravca g i h danih jednadžbama $y=k_gx+l_g$ i $y=k_hx+l_h$ je pravac koji prolazi njihovim sjecištem takav da $\varphi(g,s)=\varphi(s,h)$. Jednadžba pravca s je

$$y=\frac{k_g+k_h}{2}x+\frac{l_g+l_h}{2}.$$

Dakle, u izotropnoj ravnini dva neparalela pravca imaju samo jednu simetralu dok u euklidskoj ravnini dvije međusobno okomite simetrale raspolavljaju kut između dvaju neparalelnih pravaca.

3 Trokut u izotropnoj ravnini

Trokut je figura koja se sastoji od triju točaka A, B, C, koje nazivamo *vrhovima* trokuta, i njihovih spojnica AB, BC i CA koje nazivamo *stranicama* trokuta. Ukoliko su vrhovi trokuta dani koordinatama

$$A(x_A,y_A),\quad B(x_B,y_B),\quad C(x_C,y_C), \tag{2}$$

stranice su dane jednadžbama

$$\begin{array}{lll} AB & \dots & y=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}x+\dfrac{x_Ay_B-x_By_A}{x_A-x_B} \\ BC & \dots & y=\dfrac{y_B-y_C}{x_B-x_C}x+\dfrac{x_By_C-x_Cy_B}{x_B-x_C} \\ CA & \dots & y=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}x+\dfrac{x_Cy_A-x_Ay_C}{x_C-x_A} \end{array} \tag{3}$$

U sljedeća su dva teorema istaknuta dva svojstva trokuta u izotropnoj ravnini koja se bitno razlikuju od svojstava trokuta u euklidskoj ravnini.

Teorem 1. *Zbroj duljina stranica trokuta ABC je* 0.

Dokaz. Po definiciji udaljenosti točaka slijedi:

$$d(A,B)+d(B,C)+d(C,A)=(x_B-x_A)+(x_C-x_B)+(x_A-x_C)=0.$$

□

Teorem 2. *Zbroj mjera kutova u trokutu ABC je* 0.

Dokaz. Po definiciji kuta i iz izraza (3) slijedi:

$$\varphi(CA, AB) + \varphi(AB, BC) + \varphi(BC, CA) = \left(\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} - \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}\right) + \left(\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} - \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}\right) + \left(\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} - \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}\right) = 0.$$

□

U euklidskoj se ravnini uz pojam trokuta redovito ističu i njegove četiri karakteristične točke. To su težište, ortocentar, sjecište simetrala kutova i sjecište simetrala stranice. Razmislimo sada mogu li se analogni pojmovi definirati i u izotropnoj ravnini i ako mogu, po čemu se oni razlikuju, odnosno u čemu se podudaraju s tim pojmovima u euklidskoj ravnini.

Kako je polovište stranice trokuta u izotropnoj ravnini definirano isto kao i u euklidskoj ravnini, i *težišnice* trokuta (spojnice vrha s polovištem nasuprotne stranice) bit će dane identičnim jednadžbama i sjeći će se u jednoj točki koju nazivamo *težištem* i koja ima koordinate $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.

Promatramo vanjske i unutarnje kutove trokuta. U euklidskoj ravnini svakim vrhom trokuta prolaze dvije simetrale kutova trokuta. Tri simetrale unutarnjih kutova se sijeku u središtu upisane kružnice, dok se po dvije simetrale vanjskog kuta i jedna simetrala unutarnjeg kuta sijeku u središtima triju pripisanih kružnica. U izotropnoj ravnini svakim vrhom trokuta prolazi samo jedna simetrala. Te tri simetrale se ne sijeku u jednoj točki.

Pravcima analognim visinama trokuta smatramo izotropne pravce kroz vrhove trokuta. Ta se tri izotropna pravca ne sijeku u konačnosti (sijeku se u beskonačno dalekoj točki, odnosno paralelni su u euklidskom smislu) pa u izotropnoj ravnini ne možemo govoriti o ortocentru trokuta. Slično, pravcima analognim simetralama stranica smatramo izotropne pravce kroz polovišta stranica koji se opet ne sijeku u konačnosti.

4 Kružnica u izotropnoj ravnini

U euklidskoj je ravnini kružnica skup točaka ravnine jednako udaljenih od neke čvrste točke, njezinog središta. Jednadžba kružnice sa središtem (x_0, y_0) i radijusom r je $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Često je u dokazima, radi lakšeg računanja, translatiramo kako bi joj središte bilo u ishodištu koordinatnog sustava i ona imala jednadžu $x^2 + y^2 = r^2$.

Ako bismo u izotropnoj ravnini kružnicu definirali analogno, dobili bismo dva izotropna pravca. Može se reći da je uobičajeno promatrati kružnicu koja dijeli s euklidskom kružnicom „ponašanje u beskonačnosti”, dakle, dira beskonačno daleki pravac u istaknutoj (tzv. apsolutnoj) točki, a ne onu koja bi se dobila analognom definicijom. Pokazuje se da koordinate (x, y) točaka izotropne kružnice zadovoljavaju jednadžbu

$$y = Rx^2 + \alpha x + \beta. \tag{4}$$

Možemo reći da izotropna kružnica izgleda kao euklidska parabola čija je os paralelna s y-osi koordinatnog sustava. Broj $\frac{1}{2R}$ nazivamo njezinim radijusom.

Kružnicu s jednadžbom (4) možemo translacijom

$$\overline{x} = \frac{\alpha}{2R} + x, \quad \overline{y} = \frac{\alpha^2}{4R} - \beta + y$$

smjestiti u koordinatni sustav tako da njezina jednadžba poprimi oblik

$$y = Rx^2. \tag{5}$$

Dokažimo sada sljedeći teorem:

Teorem 3. *Neka su dane točke P i Q kružnice k, te t_P, t_Q tangente kružnice k u tim točkama. Tada vrijedi*

$$\measuredangle(t_P, PQ) = R \cdot d(P, Q) = -\measuredangle(t_Q, PQ)$$

i

$$\measuredangle(AP, AQ) = R \cdot d(P, Q),$$

gdje je A po volji odabrana točka kružnice k.

Dokaz. Neka je $y = Rx^2$ jednadžba kružnice k. Tada točke P, Q i A imaju koordinate oblika $P(p, Rp^2)$, $Q(q, Rq^2)$ i $A(a, Ra^2)$. Jednadžbe pravaca AP i AQ su

$$y = R(p + a)x - Rpa$$
$$y = R(q + a)x - Raq,$$

dok su jednadžbe tangenata t_P, t_Q

$$y = 2Rpx - Rp^2$$
$$y = 2Rqx - Rq^2.$$

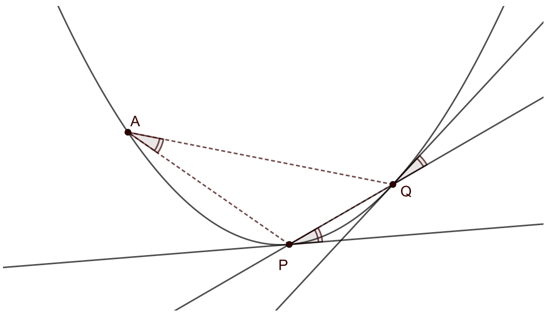
Vrijedi

$$\begin{aligned}\measuredangle(t_P, PQ) &= R(q+p) - 2Rp = R(q-p) = R \cdot d(P,Q)\\ \measuredangle(t_Q, PQ) &= R(q+p) - 2Rq = R(p-q) = R \cdot d(Q,P) = -R \cdot d(P,Q)\end{aligned}$$

te

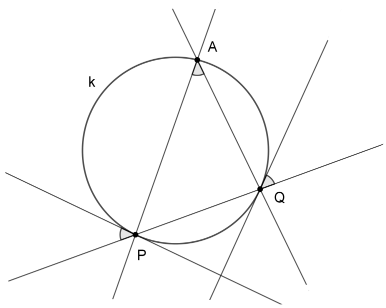
$$\measuredangle(AP, AQ) = R(q+a) - R(p+a) = R(q-p) = R \cdot d(P,Q).$$

Pokazali smo, dakle, da je mjera kuta $\measuredangle(AP, AQ)$ konstantna, odnosno da ne ovisi o izboru točke A. $\square$



Slika 2: Vizualizacija teorema 3

Sjetimo se da i u euklidskoj ravnini vrijedi analogna tvrdnja ([4]): Neka je dana kružnica k, dvije točke P i Q kružnice k te neka je točka A točka kružnice k, $A \neq P, Q$. Tada vrijedi da je mjera svakog obodnog kuta $\measuredangle(PAQ)$ kružnice k nad tetivom PQ jednaka mjeri kuta između pravca PQ i tangente kružnice k u točkama P ili Q, slika 3.

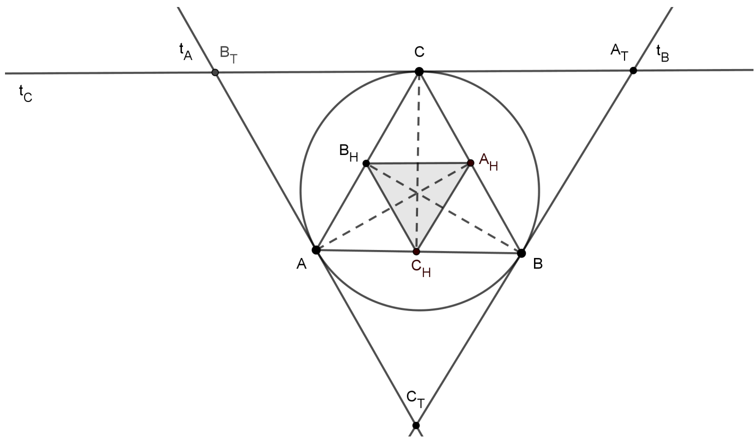


Slika 3: Teorem o obodnom kutu u euklidskoj ravnini

5 Trokut i kružnica u izotropnoj ravnini

U ovom ćemo poglavlju na jednom primjeru istaknuti još neke sličnosti i razlike između euklidske i izotropne ravnine.

Krenemo li od nekog trokuta, različitim konstrukcijama možemo dobiti nove trokute čije su osobine vezane za osobine polaznog trokuta. Primjeri takvih trokuta su ortički i tangencijalni trokut. U euklidskoj ravnini ortički trokut $A_H B_H C_H$ trokuta ABC je trokut kojemu su vrhovi sjecišta visina s nasuprotnim stranicama. Tangencijalni trokut $A_T B_T C_T$ trokuta ABC je trokut čiji su vrhovi sjecišta tangenata t_A, t_B, t_C opisane kružnice k trokuta ABC u njegovim vrhovima, slika 4. Poznato je da odgovarajuće stranice tangencijalnog i ortičkog trokuta međusobno paralelne ([5]).



Slika 4: Ortički i tangencijalni trokuti trokuta ABC u euklidskoj ravnini

Promotrimo sada analognu situaciju u izotropnoj ravnini, slika 5. U izotropnoj je ravnini *ortički* trokut $A_H B_H C_H$ trokuta ABC definiran kao trokut čiji su vrhovi sjecišta izotropnih pravaca kroz vrhove trokuta ABC s njima nasuprotnim stranicama. Vrhovi trokuta $A_H B_H C_H$ su dakle paralelni s vrhovima trokuta ABC. *Tangencijalni* trokut $A_T B_T C_T$ trokuta ABC je definiran jednako kao i u euklidskoj ravnini, odnosno to je trokut čiji su vrhovi sjecišta tangenata t_A, t_B, t_C opisane kružnice k trokuta ABC u vrhovima A, B i C. Pokažimo sada da vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 4. *Neka su $A_H B_H C_H$ i $A_T B_T C_T$ ortički i tangencijalni trokuti trokuta ABC s opisanom kružnicom k. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

1) Vrhovi trokuta $A_T B_T C_T$ su paralelni s polovištima odgovarajućih *stranica trokuta ABC i pripadaju odgovarajućim stranicama ortičkog trokuta $A_H B_H C_H$.*

2) *Stranice trokuta $A_T B_T C_T$ su paralelne s odgovarajućim stranicama ortičkog trokuta $A_H B_H C_H$.*

Dokaz. Neka je dana kružnica k s jednadžbom $y = Rx^2$ te njezine tri točke $A(a, Ra^2)$, $B(b, Rb^2)$, $C(c, Rc^2)$. Vrhovi ortičkog trokuta $A_H B_H C_H$ trokuta ABC su tada

$$\begin{aligned} &A_H\left(a, R\left(ac+ab-bc\right)\right), \\ &B_H\left(b, R\left(ab+cb-ca\right)\right), \\ &C_H\left(c, R\left(bc+ac-ab\right)\right). \end{aligned}$$

Tangente t_A, t_B, t_C kružnice k u točkama A, B, C imaju redom jednadžbe

$$\begin{array}{lll} t_A & \dots & y = 2Rax - Ra^2 \\ t_B & \dots & y = 2Rbx - Rb^2 \\ t_C & \dots & y = 2Rcx - Rc^2. \end{array} \tag{6}$$

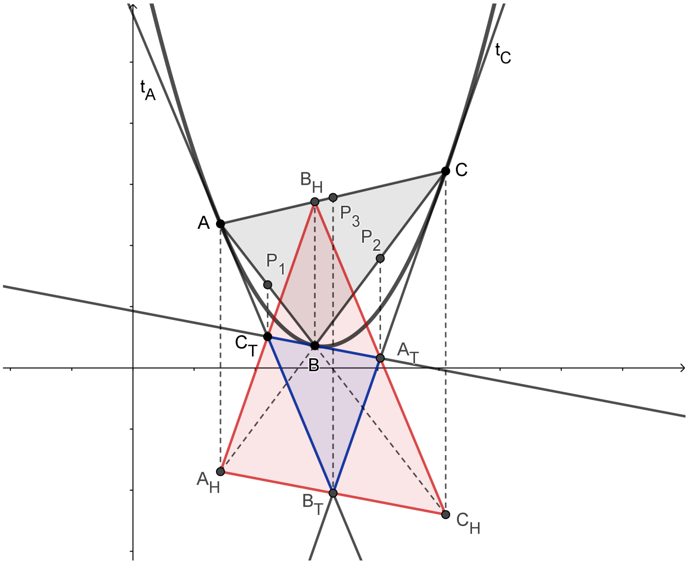
Odredimo koordinate vrhova trokuta $A_T B_T C_T$. Vrh A_T je presjek tangenata t_B i t_C pa je $A_T(\frac{b+c}{2}, Rbc)$. Stoga je točka A_T paralelna s polovištem $P_2\left(\frac{b+c}{2}, \frac{R\left(b^2+c^2\right)}{2}\right)$ stranice BC. Slično se pokaže i da su vrhovi B_T i C_T paralelni s polovištima P_3 i P_1 stranica AC i AB.

Jednadžbe stranica ortičkog trokuta su:

$$\begin{array}{lll} A_H B_H & \dots & y = 2Rcx + R(ab - bc - ac) \\ B_H C_H & \dots & y = 2Rax + R(bc - ab - ac) \\ C_H A_H & \dots & y = 2Rbx + R(ac - bc - ab). \end{array} \tag{7}$$

Jednostavnim računom možemo provjeriti da koordinate točaka A_T, B_T i C_T redom zadovoljavaju jednadžbe pravaca $B_H C_H$, $C_H A_H$ i $A_H B_H$. Time smo dokazali da vrhovi tangencijalnog trokuta $A_T B_T C_T$ leže na odgovarajućim stranicama ortičkog trokuta $A_H B_H C_H$.

Kako su t_A, t_B i t_C stranice tangencijalnog trokuta, odnosno $t_A = B_T C_T$, $t_B = C_T A_T$ i $t_C = A_T B_T$, iz (6) i (7) je očito da vrijedi: $A_T B_T \parallel A_H B_H$, $B_T C_T \parallel B_H C_H$ i $A_T C_T \parallel A_H C_H$. □



Slika 5: Ortički i tangencijalni trokuti trokuta ABC u izotropnoj ravnini

Literatura

[1] I. Čatipović, *Geometrija izotropne ravnine*, Diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2018. `https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A5121/`

[2] R. Kolar-Šuper, Z. Kolar-Begović, V.Volenec, J. Beban-Brkić, *Metrical relationships in a standard triangle in an isotropic plane*, Math. Commun. **10** (2005), 149–157.

[3] E. F. Krause, *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*, Dover Books on Mathematics, 1986.

[4] D. Palman, *Planimetrija*, Element, Zagreb, 1999.

[5] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 2004.

[6] Ž. Milin Šipuš, R. Capor, *Geometrija Minkowskog*, Matematičko-fizički list, 3/231 (2008) 161–167.

[7] H. Sachs, *Ebene Isotrope Geometrie*, Wieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1987.

Ivona Čatipović
Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 30, 10 000 Zagreb, Hrvatska
E-mail adresa: `ivona.catipovic@gmail.com`

Ema Jurkin
Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Pierottijeva 6, 10 000 Zagreb, Hrvatska
E-mail adresa: `ema.jurkin@rgn.hr`

Željka Milin Šipuš
Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 30, 10 000 Zagreb, Hrvatska
E-mail adresa: `zeljka.milin-sipus@math.hr`

Zaprimljen: 15. veljače 2019.
Prihvaćen: 15. travnja 2019.