Matematika 1 : Preddiplomski studij rudarstva, naftnog rudarstva i geološkog inženjerstva

Rajić, Rajna

Rajna Rajić

MATEMATIKA 1

Preddiplomski studij rudarstva, naftnog rudarstva i geološkog inženjerstva

Sadržaj

1 Skupovi **4**
1.1 Pojam skupa 4
1.2 Operacije sa skupovima 4

2 Brojevi **8**
2.1 Prirodni, cijeli i racionalni brojevi 8
2.2 Realni brojevi 9
2.3 Kompleksni brojevi 13

3 Matrice **20**
3.1 Pojam matrice 20
3.2 Operacije s matricama 23
3.3 Determinanta matrice 28
3.4 Inverz matrice 37
3.5 Rang matrice 42
3.6 Sustavi linearnih jednadžbi 49
3.7 Gaussova metoda eliminacije 53

4 Funkcije **66**
4.1 Pojam funkcije 66
4.2 Svojstva realnih funkcija realne varijable 72
4.3 Popis elementarnih funkcija i njihovi grafovi 78

5 Limes funkcije **96**
5.1 Pojam limesa 96
5.2 Neprekidne funkcije 115

6 Derivacija funkcije **120**
6.1 Pojam derivacije 120
6.2 Derivacija i neprekidnost 124
6.3 Pravila deriviranja 125
6.4 Derivacija složene funkcije 126
6.5 Derivacija inverzne funkcije 128
6.6 Logaritamsko deriviranje 131
6.7 Derivacije višeg reda 133
6.8 Derivacija implicitno zadane funkcije 133
6.9 Derivacija parametarski zadane funkcije 137
6.10 Fizikalno značenje prve derivacije u točki 140
6.11 Geometrijsko značenje prve derivacije u točki 141

6.12 Kut između krivulja 146
6.13 Diferencijal funkcije 148
6.14 L'Hospitalovo pravilo 151
6.15 Asimptote 156
6.16 Osnovni teoremi diferencijalnog računa 164
6.17 Intervali monotonosti. Lokalni ekstremi 169
6.18 Konveksnost i konkavnost. Točke infleksije 175
6.19 Tijek funkcije 179

7 Neodređeni integral 189
7.1 Pojam neodređenog integrala 189
7.2 Metoda supstitucije (zamjene varijable) 193
7.3 Parcijalna integracija 195
7.4 Integracija racionalnih funkcija 199
7.5 Integracija nekih iracionalnih funkcija 212
7.6 Integracija nekih trigonometrijskih funkcija 218
7.7 Primjena trigonometrijskih supstitucija na određivanje integrala

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx,$$

gdje je R racionalna funkcija 221

1 Skupovi

1.1 Pojam skupa

Skup je jedan od osnovnih pojmova matematike, što znači da pojam skupa ne možemo objasniti pomoću nekih već poznatih i jednostavnijih pojmova.

Skup je sastavljen od objekata koje nazivamo *elementima* ili *članovima* skupa.

Skupove obično označavamo velikim slovima: $A, B, C, X, \ldots$ a njihove elemente malim slovima $a, b, c, x, \ldots$.

Ako element a pripada skupu A, pišemo $a \in A$. U protivnom kažemo da a nije element, odnosno ne pripada skupu A i pišemo $a \notin A$.

Skup možemo zadati ili nabrajanjem svih njegovih elemenata koje onda stavljamo u vitičaste zagrade, npr.

$$A = \{a, b, c\},$$

ili navođenjem karakterističnog svojstva koje njegovi elementi moraju zadovoljiti, npr.

$$B = \{x \mid \sin x = 0\}.$$

Skup koji nema niti jedan element zove se *prazan skup* i označava simbolom $\emptyset$.

Kažemo da je skup A *podskup* skupa B ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B. Tu činjenicu kraće zapisujemo $A \subseteq B$. Ako pak A nije podskup od B, tj. ako postoji barem jedan element skupa A koji ne pripada skupu B, pišemo $A \not\subseteq B$.

Napomenimo da prazan skup smatramo podskupom svakog skupa.

Za skupove A i B kažemo da su *jednaki*, i pišemo $A = B$, ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

U slučaju da vrijedi $A \subseteq B$ i $A \neq B$ koristimo oznaku $A \subset B$.

1.2 Operacije sa skupovima

Neka je U univerzalni skup. Neka su A i B podskupovi skupa U. Na skupovima A i B definiramo sljedeće operacije:

(a) *presjek* skupova A i B

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\},$$

(b) *unija* skupova A i B

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ili } x \in B\},$$

(c) *razlika* skupova A i B

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\},$$

(d) *komplement* skupa A

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

Uočimo $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Slično, za n podskupova $A_1, \ldots, A_n$ skupa U definiramo njihov presjek i uniju na sljedeći način:

(i) *presjek* skupova $A_1, \ldots, A_n$

$$\cap_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ i } x \in A_2 \text{ i } \ldots \text{ i } x \in A_n\},$$

(ii) *unija* skupova $A_1, \ldots, A_n$

$$\cup_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ ili } x \in A_2 \text{ ili } \ldots \text{ ili } x \in A_n\}.$$

Za skupove A i B kažemo da su *disjunktni* ako je $A \cap B = \emptyset$.

Operacije sa skupovima imaju sljedeća svojstva:

(1) komutativnost

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A,$$

(2) asocijativnost

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

(3) distributivnost

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

(4) zakoni jedinice

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap U = A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cup U = U,$$

(5) idempotentnost

$$A \cap A = A, \quad A \cup A = A,$$

(6) De Morganovi zakoni

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$

(7) involutivnost

$\overline{(\overline{A})} = A.$

Kartezijev umnožak (*produkt*) skupova A i B, u oznaci $A \times B$, definiramo kao skup svih uređenih parova (a, b), pri čemu je $a \in A$, $b \in B$. Prema tome,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ i } b \in B\}.$$

(Prisjetimo se da su dva uređena para (a, b) i (a', b') jednaka ako i samo ako je $a = a'$ i $b = b'$.)

Analogno se definira i Kartezijev umnožak $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ n skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kao skup uređenih n-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, pri čemu je $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$. Pritom dvije uređene n-torke $(a_1, a_2 \ldots, a_n)$ i $(a'_1, a'_2 \ldots, a'_n)$ smatramo jednakima ako i samo ako je $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2, \ldots, a_n = a'_n$. Dakle,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2 \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \text{ i } a_2 \in A_2 \text{ i } \ldots \text{ i } a_n \in A_n\}.$$

Ako je $A_1 = \cdots = A_n$, pišemo $A^n = A \times \cdots \times A$.

Kardinalni broj skupa A, u oznaci $k(A)$, je broj elemenata skupa A. Npr.,

$A = \{2, 3, 7, 9\}, \quad k(A) = 4,$
$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}, \quad k(B) = \infty.$

Primjer 1.

Dani su skupovi $A = \{1, 2, 5, 10\}$ i $B = \{-3, 5, 10\}$. Naći $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

Rješenje
$A \cap B = \{5, 10\}$
$A \cup B = \{-3, 1, 2, 5, 10\}$
$A \setminus B = \{1, 2\}$
$B \setminus A = \{-3\}$

Primjer 2.

Za skupove $A = \{2, 3\}$ i $B = \{1, 4, 9\}$ naći $A \times B$. Koliko je $k(A \times B)$?

Rješenje
$A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (2, 9), (3, 1), (3, 4), (3, 9)\}$
$k(A \times B) = 6$

Primjer 3.

Dani su skupovi $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\}$ i $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin 2x = 0\}$ (pri čemu smo s $\mathbb{R}$ označili skup svih realnih brojeva). Naći $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

Rješenje

Uočimo da je

$A = \{\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$,

$B = \{\dots, -3\pi, -\frac{5\pi}{2}, -2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \dots\}$.

Jasno je da je $A \subset B$, pa je stoga $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ i $A \setminus B = \emptyset$. Nadalje,

$B \setminus A = \{\dots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots\}$.

2 Brojevi

2.1 Prirodni, cijeli i racionalni brojevi

U skupu $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ svih prirodnih brojeva vrijedi:

(a) $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m + n \in \mathbb{N}$,

(b) $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m \cdot n \in \mathbb{N}$.

Uočimo da razlika dvaju prirodnih brojeva ne mora biti prirodni broj. Stoga jednadžba $n + x = m$, gdje su $m, n \in \mathbb{N}$ dani prirodni brojevi, ne mora imati rješenje u skupu $\mathbb{N}$. Zato se javila potreba za proširenjem skupa $\mathbb{N}$, tj. uvođenjem skupa svih cijelih brojeva $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Ovaj skup ima sljedeća svojstva:

(a) $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m + n \in \mathbb{Z}$,

(b) $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m - n \in \mathbb{Z}$,

(c) $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \cdot n \in \mathbb{Z}$.

Međutim, količnik dvaju cijelih brojeva ne mora biti cijeli broj. Zato za dane brojeve $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}$, jednadžba $nx = m$ nema uvijek rješenje u skupu $\mathbb{Z}$. Stoga $\mathbb{Z}$ proširujemo do skupa svih razlomaka, tj. uvodimo skup

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$$

koji nazivamo skupom svih racionalnih brojeva. Vrijedi:

(a) $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}$,

(b) $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a - b \in \mathbb{Q}$,

(c) $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Q}$,

(d) $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \quad$ (ako je $b \neq 0$).

Skup $\mathbb{Q}$ ima jedno važno svojstvo:

$$a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a + b}{2} \in \mathbb{Q}.$$

Ako je pritom $a < b$, tada je $a < \frac{a+b}{2} < b$. Odavde slijedi da između svaka dva različita racionalna broja postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Kažemo, $\mathbb{Q}$ je *gust* u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Uočimo

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Među realnim brojevima postoje brojevi koji nisu racionalni, npr. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, $\log 5$, itd. Takve brojeve zovemo iracionalnima. Skup svih iracionalnih brojeva također je gust u skupu $\mathbb{R}$.

Primjer 1. $\log 5$ je iracionalni broj.

Pretpostavimo suprotno, $\log 5 = \frac{p}{q}$ za neke $p, q \in \mathbb{N}$. Tada je $10^{\frac{p}{q}} = 5$, odnosno $10^p = 5^q$. Međutim to je nemoguće budući da je 10^p paran, a 5^q neparan broj. Time je pokazano da $\log 5$ nije racionalan broj.

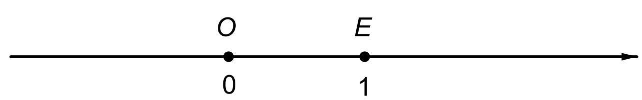
2.2 Realni brojevi

Skupovi racionalnih i iracionalnih brojeva zajedno tvore skup realnih brojeva.

Realne brojeve geometrijski prikazujemo na brojevnom pravcu. Na proizvoljnom pravcu izaberemo neku točku koju zovemo *ishodište*, te ju označimo s O. Zatim desno od O izaberemo neku drugu točku koju označimo s E. Udaljenost od O do E uzimamo kao jedinicu duljine. Svakom realnom broju moguće je pridružiti točno jednu točku na promatranom pravcu, i obrnuto, svakoj točki na pravcu točno jedan realni broj. Pritom, ako su a, b realni brojevi takvi da je $a < b$, tada je točka pridružena broju a lijevo od točke pridružene broju b. Tako dobiveni pravac zovemo *brojevnim pravcem*.

Realni broj pridružen točki na pravcu zove se *koordinata* te točke. Tako je, primjerice, koordinata točke O nula, koordinata točke E jedan, koordinata polov

Na taj



Slika 1: Brojevni pravac

U skupu $\mathbb{R}$ definiramo sljedeće intervale:

(a) *otvoreni intervali*:

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, gdje je $b \in \mathbb{R}$,

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$, gdje je $a \in \mathbb{R}$,

$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

(b) *zatvoreni intervali* (*segmenti*):

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \leq b\}$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) *poluotvoreni* (*poluzatvoreni*) *intervali*:

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$, gdje je $a \in \mathbb{R}$,

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$, gdje je $b \in \mathbb{R}$.

Omeđeni skupovi

Neka je S neprazan podskup skupa $\mathbb{R}$.

Kažemo da je skup S *omeđen odozgo* ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da za sve $x \in S$ vrijedi $x \leq M$. Takav M zovemo *gornjom međom* skupa S.

Skup S je *omeđen odozdo* ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da za sve $x \in S$ vrijedi $m \leq x$. Takav m zovemo *donjom međom* skupa S.

Skup S je *omeđen* ako je omeđen odozgo i odozdo.

Ako je M gornja međa skupa S, tada je očito da je i svaki realni broj veći od M također gornja međa skupa S. Slično, ako je m donja međa skupa S, tada je i svaki realni broj manji od m donja međa skupa S.

Primjer 2.

1.) $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen skup.
0 je donja međa skupa S, a također i svaki realni broj manji od 0.
1 je gornja međa skupa S, a također i svaki realni broj veći od 1.

2.) $S = [2, 5)$ je omeđen skup.
Svaki realni broj manji ili jednak 2 je donja međa skupa S.
Svaki realni broj veći ili jednak 5 je gornja međa skupa S.

Supremum skupa S, u oznaci $\sup S$, je najmanja gornja međa skupa S (ako postoji).

Ako je pritom $\sup S$ sadržan u skupu S, kažemo da je $\sup S$ *maksimum* skupa S i označavamo ga s $\max S$.

Infimum skupa S, u oznaci $\inf S$, je najveća donja međa skupa S (ako postoji).

Ako je $\inf S$ sadržan u skupu S, kažemo da je $\inf S$ *minimum* skupa S i označavamo ga s $\min S$.

Jedno bitno svojstvo (aksiom) skupa realnih brojeva kaže nam sljedeće.

Svaki odozgo omeđen neprazan podskup skupa realnih brojeva ima supremum u $\mathbb{R}$.

Odavde odmah slijedi:

Svaki odozdo omeđen neprazan podskup skupa realnih brojeva ima infimum u $\mathbb{R}$.

Primjer 3.

1.) $S = \{-5, -2, 3, 7, 11\}$
$\inf S = \min S = -5$, $\sup S = \max S = 11$

2.) $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
$\inf S = 0$, $\sup S = \max S = 1$
Skup S nema minimum.

3.) $S = [2, 5)$
$\inf S = \min S = 2$, $\sup S = 5$
Skup S nema masksimum.

4.) $S = (-\infty, 7)$
$\sup S = 7$
Skup S nema infimum u $\mathbb{R}$ (pišemo $\inf S = -\infty$).
Skup S nema maksimum.

5.) $S = [-3, 5) \cup (7, \infty)$
$\inf S = \min S = -3$
Skup S nema supremum u $\mathbb{R}$ (pišemo $\sup S = \infty$).

6.) $S = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$
$\inf S = \min S = -1$, $\sup S = \max S = 1$

Apsolutna vrijednost

Za $x \in \mathbb{R}$ definiramo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ako je } x \geq 0, \\ -x & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$

Npr., $|7| = 7$, $|-5| = 5$, $|0| = 0$.

Uočimo,

$|x| \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$,

$x \leq |x|$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Također, $|x|$ je udaljenost točke x od ishodišta na brojevnom pravcu. Stoga za $r > 0$ vrijedi

$$|x| < r \Leftrightarrow x \in (-r, r).$$

Slično, $|x-a|$ je udaljenost točke x od a na brojevnom pravcu. Prema tome, za $r > 0$ imamo

$$|x-a| < r \Leftrightarrow x-a \in (-r, r) \Leftrightarrow x \in (a-r, a+r).$$

Za apsolutnu vrijednost vrijede sljedeća svojstva:

(a) $|-a| = |a|, \quad a \in \mathbb{R}$,

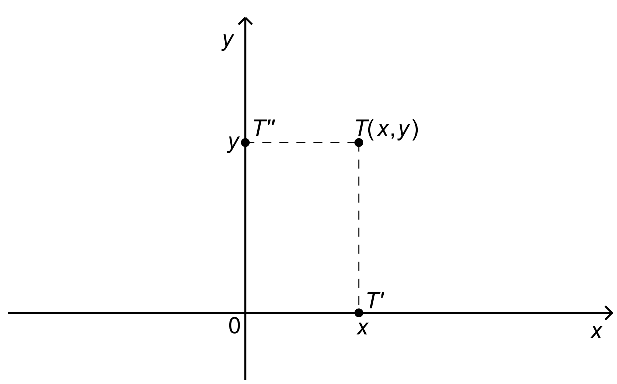
(b) $|ab| = |a||b|, \quad a, b \in \mathbb{R}$,

(c) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0$,

(d) $|a+b| \leq |a| + |b|, \quad a, b \in \mathbb{R} \qquad$ (nejednakost trokuta).

Kartezijev koordinatni sustav u ravnini

Uzmimo dva međusobno okomita pravca. Jedan od tih pravaca označimo s x i zovemo x-os, a drugi s y i zovemo y-os koordinatnog sustava. Točka O u kojoj se pravci sijeku zove se ishodište koordinatnog sustava. Uzmimo sada proizvoljnu točku T ravnine. Pravac kroz točku T paralelan s y-osi siječe x-os u točki T' čiju koordinatu označimo s x. Pravac kroz T paralelan s x-osi siječe y-os u točki T'' čiju koordinatu označimo s y.



Slika 2: Brojevna ravnina

Realni broj x zove se *apscisa točke* T, a broj y *ordinata točke* T. Na taj način moguće je svakoj točki T ravnine pridružiti jedinstveni par realnih brojeva (x, y). Obrnuto, svakom uređenom paru (x, y) realnih brojeva moguće je pridružiti jedinstvenu točku T ravnine. Ravnina u kojoj smo točke na opisani način poistovijetili s uređenim parovima realnih brojeva zove se *brojevna ravnina.* Prema tome, koordinatnim sustavom na x i na y-osi određen je pravokutni Kartezijev koordinatni sustav u ravnini.

Ravninu označavamo s $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2.3 Kompleksni brojevi

Uočimo da postoje jednadžbe koje nemaju rješenje u skupu realnih brojeva. Takva je primjerice jednadžba $x^2 + 1 = 0$. Naime, kako je $x^2 \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, jasno je da nema realnog broja x sa svojstvom $x^2 = -1$. Zato se javila potreba za proširenjem skupa svih realnih brojeva. Najprije uvodimo novi objekt, koji označavamo s i, te za koji zahtijevamo da vrijedi

$$i^2 = -1.$$

Drugim riječima, i je rješenje jednadžbe $x^2 + 1 = 0$. Pišemo $i = \sqrt{-1}$ te i nazivamo *imaginarnom jedinicom.*

Broj z oblika $z = a + bi$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, nazivamo *kompleksnim brojem.*

Označimo s

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

skup svih kompleksnih brojeva.

Kako svaki $a \in \mathbb{R}$ možemo pisati $a = a + 0 \cdot i$, to je očito $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Ako je $z = a + bi$, tada a zovemo *realnim*, a b *imaginarnim dijelom* kompleksnog broja z. Pišemo:

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z.$$

Kompleksni brojevi $a + bi$ i $c + di$ su *jednaki* ako i samo ako su im realni dijelovi jednaki i imaginarni dijelovi jednaki, tj.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ i } b = d.$$

Zbrajanje i *množenje kompleksnih brojeva* definiramo na sljedeći način:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Za zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva vrijede sva uobičajena pravila (komutativnost, asocijativnost, distributivnost množenja prema zbrajanju) kao i za realne brojeve.

Oduzimanje kompleksnih brojeva definiramo s

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Dijeljenje kompleksnih brojeva definira se kao

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,$$

uz uvjet da je $c+di\neq 0$.

Konjugirani kompleksni broj broja $z=a+bi$ je broj $\overline{z}=a-bi$.

Konjugiranje ima sljedeća svojstva:

(a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}, \quad z_1,z_2\in\mathbb{C}$,

(b) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}, \quad z_1,z_2\in\mathbb{C}$,

(c) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}, \quad z_1,z_2\in\mathbb{C}$,

(d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_1,z_2\in\mathbb{C}, \quad z_2\neq 0$,

(e) $\overline{\overline{z}}=z, \quad z\in\mathbb{C}$.

Primjer 4.

1.) $(2+3i)+(6-4i)=8-i$

2.) $(2-i)(3+5i)=6+10i-3i+5=11+7i$

3.) $\dfrac{1+i}{2-3i}=\dfrac{1+i}{2-3i}\cdot\dfrac{2+3i}{2+3i}=\dfrac{2+3i+2i-3}{4+9}=-\dfrac{1}{13}+\dfrac{5}{13}i$

4.) $(2-i)^2-(3i+1)=4-4i-1-3i-1=2-7i$

5.) $\overline{3+4i}+(1+i)^3=3-4i+1+3i-3-i=1-2i$

Primjer 5.

Riješiti jednadžbu $(3-2i)z=4+i$.

Rješenje

$z=\dfrac{4+i}{3-2i}=\dfrac{4+i}{3-2i}\cdot\dfrac{3+2i}{3+2i}=\dfrac{12+8i+3i-2}{9+4}=\dfrac{10}{13}+\dfrac{11}{13}i$

Apsolutna vrijednost (*modul*) kompleksnog broja $z=a+bi$ definira se kao $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Lako se provjeri da je:

(a) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$

(b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_2 \neq 0,$

(c) $z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad z \in \mathbb{C},$

(d) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (nejednakost trokuta).

Primjer 6.

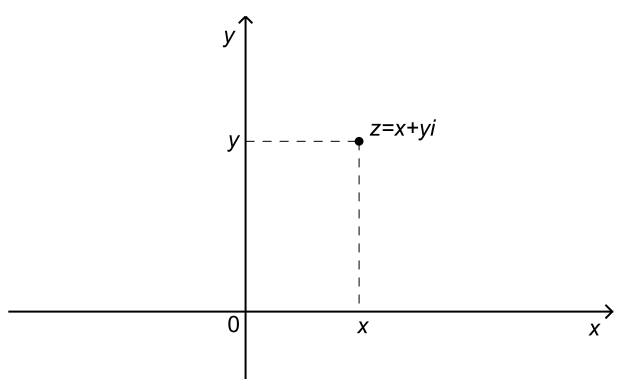
Izračunati apsolutnu vrijednost sljedećih kompleksnih brojeva:
(a) $z = 3 + 4i$
(b) $z = -5$
(c) $z = 2i$
(d) $z = -1 + \sqrt{2}i$.

Rješenje
(a) $|z| = \sqrt{9 + 16} = 5$
(b) $|z| = 5$
(c) $|z| = 2$
(d) $|z| = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$

Kompleksna (Gaussova) ravnina

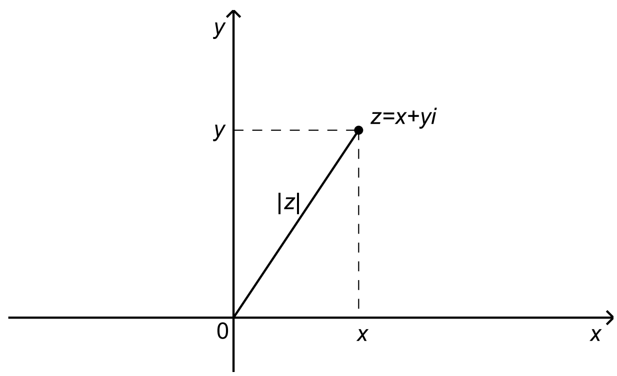
Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ možemo poistovjetiti sa skupom $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ svih uređenih parova realnih brojeva tako da kompleksni broj $z = x + yi$ identificiramo s točkom $T(x, y)$. Ravnina $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ u kojoj su točke identificirane s kompleksnim brojevima zove se *kompleksna* ili *Gaussova ravnina.*

Os x nazivamo realnom osi, a os y imaginarnom osi.



Slika 3: Kompleksna (Gaussova) ravnina

Uočimo da je apsolutna vrijednost kompleksnog broja z njegova udaljenost od ishodišta.



Slika 4: Apsolutna vrijednost kompleksnog broja

Štoviše, $|z-z_0|$ je udaljenost kompleksnih brojeva z i z_0. Naime, neka je $z = x+yi$, $z_0 = x_0+y_0i$. Kompleksnom broju z pridružimo točku $T(x,y)$, a broju z_0 točku $T_0(x_0,y_0)$. Budući da je

$$z - z_0 = (x-x_0) + (y-y_0)i,$$

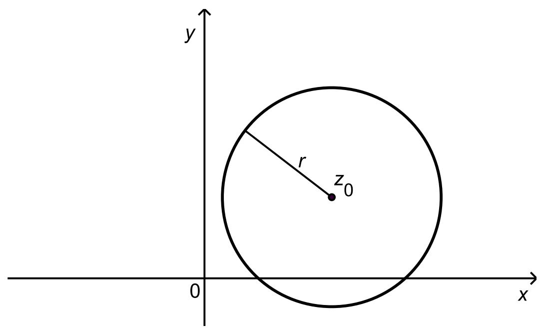
slijedi

$$|z-z_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

što je formula za udaljenost točaka T i T_0, tj. (uz opisanu identifikaciju) kompleksnih brojeva z i z_0.

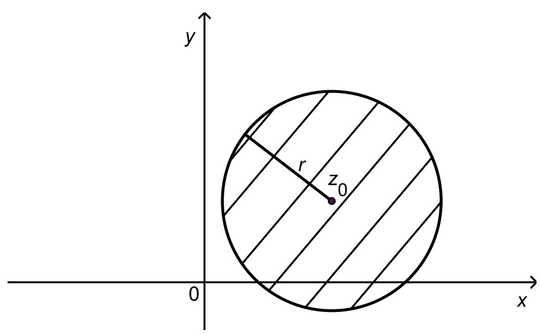
Nadalje, za dani $r > 0$ i $z_0 \in \mathbb{C}$ jednakošću $|z-z_0| = r$ određena je kružnica u kompleksnoj ravnini sa središtem u z_0 i polumjerom r. Zaista,

$$|z-z_0| = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2.$$



Slika 5: Kružnica u kompleksnoj ravnini

Slično, nejednakošću $|z - z_0| \leq r$ određen je zatvoren krug polumjera r sa središtem u točki z_0.



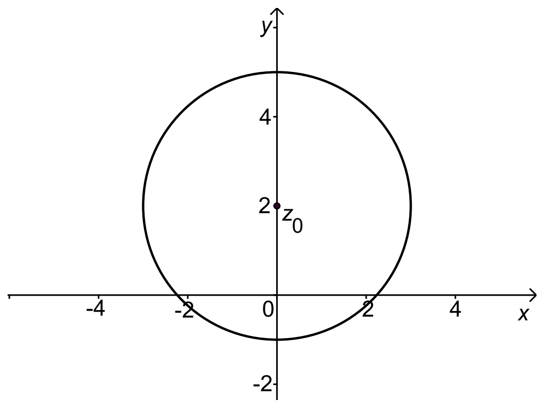
Slika 6: Krug u kompleksnoj ravnini

Primjer 7.

Naći skup kompleksnih brojeva zadan sa

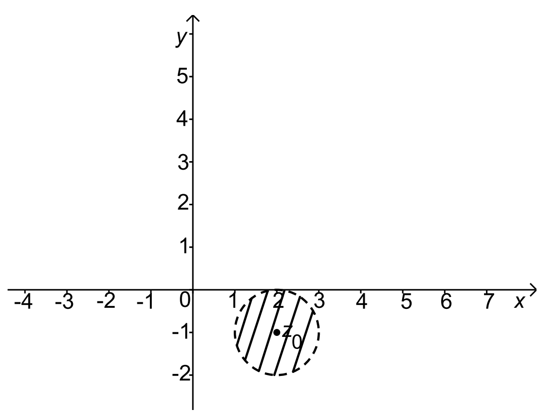
(a) $|z - 2i| = 3$,
(b) $|z - 2 + i| < 1$,
(c) $|z + 1 - 3i| \geq 2$.

Rješenje
(a) $z_0 = 2i \quad r = 3$



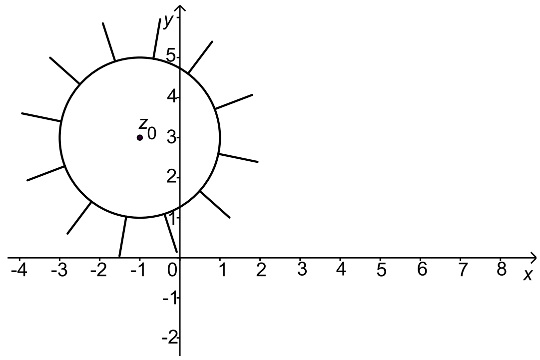
Slika 7: $|z - 2i| = 3$

(b) $z_0 = 2 - i \quad r = 1$



Slika 8: $|z - 2 + i| < 1$

(c) $z_0 = -1 + 3i \quad r = 2$



Slika 9: $|z + 1 - 3i| \geq 2$

3 Matrice

3.1 Pojam matrice

Tablicu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gdje su $a_{ij} \in \mathbb{R}$ nazivamo *realnom matricom tipa* (m, n).

Matrica tipa (m, n) ima m redaka i n stupaca.

Brojeve a_{ij} nazivamo *elementima matrice* A.

Element a_{ij} nalazi se na presjeku i-tog retka i j-tog stupca matrice A, tj. na mjestu (i, j) u matrici A.

Elementi

$$a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}$$

čine i-ti redak, a elementi

$$\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$$

j-ti stupac matrice A.

Matricu A kraće označavamo $A = (a_{ij})_m^n$ ili samo $A = (a_{ij})$ kada je jasno kojeg tipa je matrica A.

Primjer 1.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -8 \\ -7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrica A ima dva retka i tri stupca, dakle A je tipa $(2, 3)$.
Element 5 nalazi se na presjeku prvog retka i drugog stupca, tj. na mjestu $(1, 2)$.
Elementi $4, 5, -8$ čine prvi redak matrice A.
Elementi $-8, 3$ čine treći stupac matrice A.

Za dvije matrice $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ kažemo da su *jednake* (i pišemo $A = B$) ako su istoga tipa i ako su im odgovarajući elementi jednaki, tj. $a_{ij} = b_{ij}$ za sve i, j.

Matricu čiji su svi elementi jednaki nuli zovemo *nul-matricom* i označavamo ju s 0.

Primjerice,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

su nul-matrice.

Ako matrica A ima jednak broj redaka i stupaca, tj. ako je tipa (n, n), onda kažemo da je A *kvadratna matrica reda* n.

Kvadratnu matricu označavamo s

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ili kraće $A = (a_{ij})_n$, odnosno samo $A = (a_{ij})$ ako je iz konteksta jasno kojeg je reda matrica A.

Elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ čine *glavnu*, a elementi $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{n1}$ *sporednu* dijagonalu kvadratne matrice A.

Primjer 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A je kvadratna matrica reda 3.
Elementi $2, 1, -1$ čine glavnu dijagonalu matrice A.
Elementi $6, 1, 2$ čine sporednu dijagonalu matrice A.

Kvadratnu matricu čiji su svi elementi koji ne leže na glavnoj dijagonali jednaki nuli nazivamo *dijagonalnom matricom*.

Npr.,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

je dijagonalna matrica reda 4.

Dijagonalnu matricu čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki jedinici nazivamo *jediničnom matricom* i označavamo ju s I.

Npr.,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

su jedinične matrice reda 2, odnosno 3.

Za kvadratnu matricu kažemo da je *gornja trokutasta* ako su svi njezini elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli.

Takve su primjerice matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Za kvadratnu matricu kažemo da je *donja trokutasta* ako su svi njezini elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli.

Takve su primjerice matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matrica $B = (b_{ij})$ je *transponirana matrica* matrice $A = (a_{ij})$ ako je

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad \text{za sve } i, j.$$

Uočimo, ako je matrica A tipa (m, n), tada je njezina transponirana matrica B tipa (n, m), a dobiva se iz matrice A zamjenom redaka sa stupcima u istom poretku.

Transponiranu matricu matrice A označavamo s A^T.

Primjer 3.

Neka je dana matrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & -7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tada je transponirana matrica matrice A

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 7 & 2 & -7 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da je $(A^T)^T = A$.

Za kvadratnu matricu A kažemo da je *simetrična* ako je $A^T = A$.

Primjerice, matrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

je simetrična.

3.2 Operacije s matricama

U daljnjem ćemo s M_{mn} označavati skup svih matrica tipa (m, n). Skup M_{nn} svih kvadratnih matrica reda n kraće označavamo s M_n.

Na skupu M_{mn} definirane su operacije zbrajanja matrica, te množenja matrica skalarom.

Zbrajanje matrica

Neka su dane matrice

$$A = (a_{ij}) \in M_{mn}, \quad B = (b_{ij}) \in M_{mn}$$

istog tipa (m, n).

Tada je *zbroj matrica* A i B matrica istog tipa (m, n), čiji se elementi dobiju tako da se zbroje odgovarajući elementi matrica A i B.

Dakle, označimo li s $C = A + B$ zbroj matrica A i B, tada elemente matrice $C = (c_{ij})$ računamo kao

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \text{za sve } i, j.$$

Primijetimo, zbrajati možemo *samo* matrice istog tipa.

Primjer 4.

Dane su matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -6 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 5+0 \\ 3-4 & -6+2 \\ -7+7 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Svojstva matričnog zbrajanja

Ako su $A, B, C, 0$ matrice istoga tipa, tada vrijede sljedeća svojstva:

(a) $A + B = B + A$ (komutativnost);

(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asocijativnost);

(c) $A + 0 = 0 + A = A$.

Množenje matrice skalarom

Neka je $k \in \mathbb{R}$ i $A = (a_{ij}) \in M_{mn}$.

Matrica A množi se skalarom k tako da se svaki njezin element pomnoži skalarom k.

Dakle, označimo li s $B = kA$ *umnožak matrice A skalarom k*, tada elemente matrice $B = (b_{ij})$ računamo kao

$$b_{ij} = ka_{ij}, \quad \text{za sve } i, j.$$

Uočimo, matrica $B = kA$ je istoga tipa kao i matrica A.

Primjer 5.

Dana je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$5A = \begin{pmatrix} 5\cdot 4 & 5\cdot 1 \\ 5\cdot 2 & 5\cdot 5 \\ 5\cdot 3 & 5\cdot(-3) \\ 5\cdot(-2) & 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 10 & 25 \\ 15 & -15 \\ -10 & 15 \end{pmatrix}.$$

Umnožak matrice A skalarom -1, tj. matricu $(-1)A$ označavamo kraće s $-A$.

Sada se *razlika matrica* $A \in M_{mn}$ *i* $B \in M_{mn}$ istog tipa definira formulom

$$A - B := A + (-1)B.$$

Primjer 6.

Dane su matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$A - B = \begin{pmatrix} 3-2 & -1-6 & 5-(-3) \\ -1-(-1) & 2-2 & 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Svojstva množenja matrice skalarom

Neka su A, B matrice istoga tipa, te neka su $k, r \in \mathbb{R}$. Tada vrijede sljedeća svojstva:

(a) $k(rA) = (kr)A$ (asocijativnost);

(b) $k(A + B) = kA + kB$, $(k + r)A = kA + rA$ (distributivnost);

(c) $1A = A$.

Množenje matrica

Za dane matrice A i B, njihov *umnožak* AB definiramo ako su matrice A i B *ulančane*, tj. ako je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B.

Neka je

$$A = (a_{ij}) \in M_{mn}, \quad B = (b_{ij}) \in M_{np}.$$

Tada je umnožak $C = AB$ matrica $C = (c_{ij}) \in M_{mp}$ čije elemente računamo ovako:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \quad \text{za sve } i, j.$$

Drugim riječima, element c_{ij} matrice C na mjestu (i, j) dobije se kao zbroj umnožaka elemenata i-tog retka matrice A i odgovarajućih elemenata j-tog stupca matrice B. Kažemo, c_{ij} je umnožak i-tog retka matrice A i j-tog stupca matrice B :

$$C{=}AB{=}\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{pmatrix} {=} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je u umnošku $C = AB$ broj redaka matrice C jednak broju redaka matrice A, dok je broj stupaca matrice C jednak broju stupaca matrice B.

Primjer 7.

Dane su matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Matrica A je tipa $(2, 3)$, a matrica B tipa $(3, 2)$. Kako je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B, to je umnožak AB dobro definiran, i to je matrica tipa $(2, 2)$ koja ima četiri elementa.

Element na mjestu $(1, 1)$ umnoška AB računamo tako da prvi redak matrice A pomnožimo prvim stupcem matrice B.

Element na mjestu $(1, 2)$ umnoška AB računamo tako da prvi redak matrice A pomnožimo drugim stupcem matrice B.

Element na mjestu $(2, 1)$ umnoška AB računamo tako da drugi redak matrice A pomnožimo prvim stupcem matrice B.

Element na mjestu $(2, 2)$ umnoška AB računamo tako da drugi redak matrice A pomnožimo drugim stupcem matrice B.

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 4\cdot 0 - 3\cdot(-1) & 2\cdot 3 + 4\cdot(-2) - 3\cdot 4 \\ 5\cdot 1 - 2\cdot 0 + 1\cdot(-1) & 5\cdot 3 - 2\cdot(-2) + 1\cdot 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -14 \\ 4 & 23 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Uočimo da je ovdje i umnožak BA dobro definiran budući da matrica B ima onoliko stupaca koliko matrica A ima redaka. Rezultat je matrica tipa $(3,3)$ koja ima isti broj redaka kao matrica B i isti broj stupaca kao i A.

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 5 & 1\cdot 4 + 3\cdot(-2) & 1\cdot(-3) + 3\cdot 1 \\ 0\cdot 2 - 2\cdot 5 & 0\cdot 4 - 2\cdot(-2) & 0\cdot(-3) - 2\cdot 1 \\ -1\cdot 2 + 4\cdot 5 & -1\cdot 4 + 4\cdot(-2) & -1\cdot(-3) + 4\cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 17 & -2 & 0 \\ -10 & 4 & -2 \\ 18 & -12 & 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Umnožak AC također je dobro definiran, jer je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice C. Rezultat je matrica tipa $(2,1)$.

$$
\begin{aligned}
AC &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cdot(-2) + 4\cdot 7 - 3\cdot 3 \\ 5\cdot(-2) - 2\cdot 7 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -21 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Međutim umnožak CA nije definiran budući da je broj stupaca matrice C različit od broja redaka matrice A.

Ovaj nam primjer pokazuje da množenje matrica općenito nije komutativno. Naime, može se dogoditi da umnožak BA nije definiran čak i u slučaju kad je umnožak AB moguć, ili su pak oba umnoška AB i BA dobro definirana, ali $AB \neq BA$.

Ipak, množenje matrica ima neka dobra svojstva.

Svojstva matričnog množenja

Neka su A, B, C dane matrice. Tada vrijede sljedeća svojstva:

(a) $(AB)C = A(BC)$ (asocijativnost);

(b) $(A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC$

(distributivnost množenja prema zbrajanju);

(c) $AI = IA = A$;

(d) $(AB)^T = B^T A^T$,

kad god su ti umnošci definirani.

Potenciranje matrica

Potenciranje matrica definira se samo za kvadratne matrice, i to na sljedeći način.

Neka je $A \in M_n$ kvadratna matrica reda n.

Stavimo $A^0 := I$, $A^1 := A$.

Sada se definira $A^2 := AA$, $A^3 := A^2A = AAA$, itd. za $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$A^k := \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ faktora}}.$$

Primjer 8.

Dana je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 7 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.3 Determinanta matrice

Pojam determinante definiramo samo za kvadratne matrice.

Neka je $A = (a_{ij})$ kvadratna matrica reda n.

Determinanta matrice A je broj koji označavamo s det$A$ ili s

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

a definira se na sljedeći način.

Za $n = 1$,

$$\det A = |a_{11}| = a_{11},$$

tj. determinanta prvog reda jednaka je svom jedinom elementu.

Za $n = 2$,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

tj. determinanta drugog reda jednaka je razlici umnožaka elemenata na glavnoj i sporednoj dijagonali.

Npr.

$|7| = 7, \quad |-5| = -5\,;$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7,$

$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t).$

Računanje determinanti višeg reda vrši se rekurzivno. Naime, determinanta trećeg reda definira se pomoću determinanti drugog reda, determinanta četvrtog reda pomoću determinanti trećeg reda itd., determinanta n-tog reda pomoću determinanti $(n-1)$-og reda. Pritom koristimo sljedeću metodu.

Laplaceov razvoj determinante

Neka je $A = (a_{ij}) \in M_n$.

Označimo s D_{ij} determinantu matrice $(n-1)$-og reda koju dobijemo brisanjem i-tog retka i j-tog stupca matrice A; dakle retka i stupca na čijem se presjeku nalazi element a_{ij}. Broj D_{ij} nazivamo *minorom* elementa a_{ij}.

Sada definiramo *algebarski komplement* ili *kofaktor* elementa a_{ij}, u oznaci A_{ij}, kao

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

Primijetimo da je $A_{ij} = D_{ij}$ ako je suma indeksa $i + j$ paran broj, odnosno $A_{ij} = -D_{ij}$ u slučaju kad je $i + j$ neparan broj.

Odaberemo zatim proizvoljan redak matrice A, te njenu determinantu računamo kao zbroj umnožaka elemenata toga retka s odgovarajućim algebarskim komplementima. Dakle,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= (-1)^{i+1}a_{i1}D_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}D_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}D_{in}, \end{aligned}$$

pri čemu $i \in \{1, \ldots, n\}$ biramo proizvoljno. (Naime, može se pokazati da vrijednost gornjeg izraza ne ovisi o izboru indeksa i.)

Kažemo da smo determinantu *razvili po elementima i-tog retka.*

Na taj način smo računanje determinante n-tog reda sveli na računanje n determinanti $D_{i1}, D_{i2}, \ldots, D_{in}$ $(n-1)$-og reda. Postupak nastavljamo analogno, tj. sada svaku od tih n determinanti $(n-1)$-og reda računamo pomoću $n-1$ determinanti $(n-2)$-og reda itd., snižavamo red determinanti sve dok ne dođemo do determinanti drugog reda koje znamo računati. Ovaj postupak može biti dugotrajan; primjerice već za računanje determinanti četvrtog reda potrebno je izračunati četiri determinante reda tri, odnosno $4 \cdot 3 = 12$ determinanti reda dva. Međutim, uočimo da pri razvoju determinante po elementima i-tog retka, minore $D_{i1}, D_{i2}, \ldots, D_{in}$ množimo redom s elementima i-tog retka matrice A. Stoga je za razvijanje determinante dane matrice najprikladnije odabrati onaj redak matrice A koji se sastoji od najviše nula, jer u tom slučaju odgovarajuće minore nije potrebno računati.

Osim razvojem po elementima nekog retka, determinantu možemo računati i razvojem po elementima proizvoljnog stupca. Dakle,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\ &= (-1)^{1+j}a_{1j}D_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}D_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}D_{nj}, \end{aligned}$$

pri čemu $j \in \{1, \ldots, n\}$ biramo proizvoljno.

Kažemo da smo determinantu *razvili po elementima j-tog stupca.*

Vrijednost determinante ne ovisi o izboru retka, odnosno stupca po kojem determinantu razvijamo.

Primjer 9.

Dana je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Izračunati sve njezine minore i algebarske komplemente.
(b) Izračunati $\det A$.

Rješenje

(a) Matrica A je reda 3, pa ima $3 \cdot 3 = 9$ minora i isto toliko algebarskih komplemenata.

Minora D_{11} je determinanta matrice drugog reda koju dobivamo brisanjem prvog retka i prvog stupca matrice A. Dakle,

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = -6.$$

Minora D_{12} dobije se iz polazne matrice brisanjem prvog retka i drugog stupca

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-2) - 2 \cdot (-4) = 8;$$

minora D_{13} brisanjem prvog retka i trećeg stupca

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-4) = 8.$$

Slično računamo

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5, \quad D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 13,$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Algebarski komplementi iznose redom
$A_{11} = (-1)^{1+1} D_{11} = D_{11} = -6,$
$A_{12} = (-1)^{1+2} D_{12} = -D_{12} = -8,$
$A_{13} = (-1)^{1+3} D_{13} = D_{13} = 8,$
$A_{21} = (-1)^{2+1} D_{21} = -D_{21} = 5,$
$A_{22} = (-1)^{2+2} D_{22} = D_{22} = -6,$
$A_{23} = (-1)^{2+3} D_{23} = -D_{23} = -13,$

$A_{31} = (-1)^{3+1} D_{31} = D_{31} = 8,$
$A_{32} = (-1)^{3+2} D_{32} = -D_{32} = -2,$
$A_{33} = (-1)^{3+3} D_{33} = D_{33} = 2.$

(b) Vrijednost determinante možemo izračunati razvojem po bilo kojem retku, odnosno stupcu matrice A. Tako, npr. razvojem po prvom retku imamo

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1 \cdot (-6) + 3 \cdot (-8) - 1 \cdot 8 = -38,$$

ili razvojem po recimo drugom stupcu dobivamo također

$$\det A = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = 3 \cdot (-8) + 2 \cdot (-6) + 1 \cdot (-2) = -38.$$

Primjer 10.

Izračunati determinantu matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Rješenje

Za računanje determinante najprikladnije je odabrati redak, odnosno stupac koji sadrži najviše nula; dakle u našem slučaju to je prvi stupac. Budući da prvi stupac sadrži tri nule, to će se računanje determinante ove matrice četvrtog reda umjesto na četiri determinante trećeg reda svesti na jednu determinantu trećeg reda. Naime, razvojem po prvom stupcu imamo

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} \\ &= 2 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} \\ &= 2 \cdot A_{11} = 2 \cdot (-1)^{1+1} D_{11} \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \text{(vidi primjer 9)} \\ &= 2 \cdot (-38) = -76. \end{aligned}$$

Za računanje determinanti trećeg reda koristimo i *Sarrusovo pravilo*, koje se sastoji u sljedećem.

Determinanti $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ dopišemo s desna prva dva stupca. Zatim zbrojimo umnoške elemenata na glavnoj dijagonali i njoj paralelnim pravcima, te od toga broja oduzmemo umnoške elemenata na sporednoj dijagonali i njoj paralelnim pravcima:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Primjerice, za matricu iz primjera 9 imali bismo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right.$$

$$= 1\cdot 2\cdot(-2) + 3\cdot 2\cdot(-4) + (-1)\cdot 0\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot(-4) - 1\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot(-2)$$
$$= -38.$$

Važno je zapamtiti da Sarrusovo pravilo smijemo primijeniti *samo* za računanje determinanti matrica trećeg reda.

Primjer 11.

Izračunati determinantu matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rješenje

Determinantu dane matrice računat ćemo razvojem po prvom retku, budući da taj redak sadrži najviše nula.

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}D_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}D_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}D_{13} + a_{14}(-1)^{1+4}D_{14} \\ &= 3\cdot(-1)^{1+1}D_{11} + 0\cdot(-1)^{1+2}D_{12} + 0\cdot(-1)^{1+3}D_{13} + 2\cdot(-1)^{1+4}D_{14} \\ &= 3\cdot D_{11} - 2\cdot D_{14} \\ &= 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Primjenom Sarrusovog pravila imamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 4 + 18 + 1 + 6 + 2 - 6 = 25,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} = -2 + 4 + 36 - 6 - 12 + 4 = 24,$$

pa je

$$\det A = 3 \cdot 25 - 2 \cdot 24 = 27.$$

Osnovna svojstva determinanti

Kao što smo već ranije primijetili, postupak računanja determinanti matrica višeg reda opisanom metodom može biti dugotrajan, praktički često i nemoguć. Vidjeli smo da je pri Laplaceovom razvoju determinante poželjno birati onaj redak, odnosno stupac matrice, koji sadrži najviše nula. Navest ćemo sada osnovna svojstva determinanti, koja nam olakšavaju računanje determinanti, tj. pomoću kojih vršimo transformacije nad retcima, odnosno stupcima dane matrice s ciljem postizanja što većeg broja nula u nekom retku, odnosno stupcu matrice.

(a) *Ako matrica ima dva jednaka retka, odnosno stupca, onda je njezina determinanta jednaka nuli.*

(b) *Zamjenom dvaju redaka, odnosno stupaca matrice, njezina determinanta mijenja predznak.*

Npr.,

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & 11 \end{vmatrix} = (\text{zamjena 1. i 3. retka}) = - \begin{vmatrix} 4 & 6 & 11 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & 11 \end{vmatrix} = (\text{zamjena 2. i 3. stupca}) = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 11 & 6 \end{vmatrix}.$$

(c) *Determinanta se množi skalarom tako da se jedan njezin redak, odnosno stupac, pomnoži tim skalarom.*

Npr.,

$$3\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & -3 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (2.\text{ stupac množimo s } 3) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -15 & -3 \\ 2 & 21 & 0 \end{vmatrix}.$$

(d) *Vrijednost determinante se ne mijenja ako nekom retku (stupcu) matrice dodamo neki drugi redak (stupac) pomnožen skalarom.*

Npr.,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{c} 1.\text{ redak pomnožen s } -2 \\ \text{dodamo 2. retku} \end{array} \right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

(e) *Ako svaki element nekog retka, odnosno stupca matrice, prikažemo kao zbroj dvaju elemenata, onda je determinanta matrice jednaka zbroju dviju odgovarajućih determinanata.*

Npr.,

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ -4 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+2 & -5+4 & 6+1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 \\ -4 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(f) *Determinanta trokutaste matrice jednaka je umnošku elemenata na glavnoj dijagonali.*

Npr.,

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 8 & 11 \\ 0 & -5 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-5) \cdot 2 \cdot 3 = -120.$$

(g) *Transponiranjem matrice vrijednost determinante se ne mijenja*:

$$\det A = \det A^T.$$

(h) (**Binet-Cauchyjev teorem**) *Determinanta umnoška dviju matrica jednaka je umnošku njihovih determinanata*:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Primjer 12.

Izračunati determinantu matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 0 & -3 \\ 11 & 4 & 3 & 10 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje

Dodamo li trećem retku matrice A prvi redak pomnožen s -3 dobit ćemo nulu na mjestu $(3,3)$. Isto tako, dodamo li četvrtom retku prvi redak pomnožen s 2 dobit ćemo nulu na mjestu $(4,3)$. Time se vrijednost determinante neće promijeniti (svojstvo (d)). Treći stupac tako dobivene matrice imati će tri nule, pa ćemo determinantu računati razvojem po elementima toga stupca. Dakle,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 0 & -3 \\ 11 & 4 & 3 & 10 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{1. redak pomnožen s } -3 \\ \text{dodamo 3. retku} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 0 & -3 \\ 5 & -5 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \text{1. redak pomnožen s 2} \\ \text{dodamo 4. retku} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 0 & -3 \\ 5 & -5 & 0 & -5 \\ 1 & 10 & 0 & 11 \end{vmatrix} \\ &= \text{(razvoj po elementima 3. stupca)} \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 5 & -5 & -5 \\ 1 & 10 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 5 & -5 & -5 \\ 1 & 10 & 11 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Preostaje izračunati determinantu trećeg reda. Budući da su svi elementi drugog retka djeljivi s 5, primjenom svojstva (c) imamo

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 5 & -5 & -5 \\ 1 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 10 & 11 \end{vmatrix}.$$

Dodamo li sada drugom i trećem stupcu prvi stupac, imat ćemo dvije nule u drugom retku. Determinantu ćemo izračunati razvojem po elementima toga retka.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 10 & 11 \end{vmatrix} &= (\text{1. stupac dodamo 2. stupcu}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 11 & 11 \end{vmatrix} \\
&= (\text{1. stupac dodamo 3. stupcu}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 12 \end{vmatrix} \\
&= (\text{razvoj po elementima 2. retka}) \\
&= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 12 - 1 \cdot 11) = -13
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 0 & -3 \\ 11 & 4 & 3 & 10 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 5 & -5 & -5 \\ 1 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-13) = -65.$$

3.4 Inverz matrice

Neka je $A \in M_n$ kvadratna matrica reda n.

Kažemo da je matrica A *regularna* ako postoji matrica B reda n tako da je

$$AB = BA = I,$$

gdje je I jedinična matrica reda n.

Matricu B tada zovemo *inverznom matricom* matrice A i označavamo ju s A^{-1}. Dakle,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Npr., matrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

je regularna. Njezina inverzna matrica je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

budući da je $AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Inverzna matrica ne mora uvijek postojati. Međutim, ukoliko postoji, ona je jednoznačno određena. Drugim riječima, matrica može imati najviše jednu inverznu matricu.

Nadalje, ako za kvadratnu matricu A postoji matrica B sa svojstvom $AB = I$, tada se može pokazati da vrijedi i $BA = I$. Također, ako za kvadratnu matricu A postoji matrica B tako da je $BA = I$, slijedi $AB = I$.

Prema tome, čim za kvadratnu matricu A postoji matrica B sa svojstvom $AB = I$ ili $BA = I$, zaključujemo da je A regularna matrica, te da je njezin inverz $A^{-1} = B$.

Za matricu koja nije regularna, kažemo da je *singularna*.

Takva je primjerice nul-matrica, jer je $0 \cdot B = B \cdot 0 = 0 \neq I$ za svaku kvadratnu matricu B istoga reda kao i 0.

Sljedeći primjer pokazuje da nul-matrice nisu jedine singularne matrice.

Primjer 13.

Ispitati regularnost matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rješenje

Kada bi A bila regularna matrica, tada bi postojala matrica

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

sa svojstvom da je $AB = BA = I$. Dakle, vrijedilo bi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odavde bismo množenjem matrica s lijeve strane gornje jednakosti dobili

$$\begin{pmatrix} 2b_{11} + b_{21} & 2b_{12} + b_{22} \\ 6b_{11} + 3b_{21} & 6b_{12} + 3b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Slijedilo bi

$$\begin{aligned} 2b_{11} + b_{21} &= 1 \\ 2b_{12} + b_{22} &= 0 \\ 6b_{11} + 3b_{21} &= 0 \\ 6b_{12} + 3b_{22} &= 1 \end{aligned}$$

što je nemoguće za bilo koju vrijednost realnih brojeva $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$. (Naime, uočimo da množenjem prve jednadžbe gornjeg sustava s 3 dobijemo $6b_{11} + 3b_{21} = 3$, što je u suprotnosti s trećom jednadžbom.)

Prema tome, matrica B sa svojstvom $AB = BA = I$ ne postoji, pa je A singularna matrica.

Umjesto da postupamo kao u prethodnom primjeru, regularnost dane matrice možemo ispitati računanjem njezine determinante. Jasno je da regularne matrice imaju determinantu različitu od nule. Naime, ako je matrica A regularna, tada iz $AA^{-1} = I$ slijedi

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = (\text{Binet-Cauchyjev teorem}) = \det A \cdot \det(A^{-1}).$$

Stoga mora biti $\det A \neq 0$.

Međutim, pokazuje se da vrijedi i obratno; čim je $\det A \neq 0$ matrica A je regularna.

Dakle, imamo sljedeću karakterizaciju regularnosti matrice.

Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako je $\det A \neq 0$.

Uočimo da je determinanta matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ iz primjera 13 jednaka nuli, pa odmah zaključujemo da je A singularna matrica.

Računanje inverzne matrice

Inverznu matricu regularne matrice računat ćemo primjenom *Cramerovog pravila*.

Neka je dana matrica $A = (a_{ij}) \in M_n$.

Kao i ranije, s D_{ij} označit ćemo minoru matrice A određenu elementom a_{ij}. Također, $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ je algebarski komplement elementa a_{ij}.

Formiramo transponiranu matricu matrice (A_{ij}) algebarskih komplemenata elemenata matrice A :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T .$$

Matricu $\tilde{A}$ zovemo *adjunktom* matrice A.

Pokazuje se da vrijedi

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A) I.$$

Ako je matrica A regularna tada dijeljenjem gornjeg izraza s $\det A \neq 0$ dobijemo

$$A\Big(\frac{1}{\det A}\tilde{A}\Big) = \Big(\frac{1}{\det A}\tilde{A}\Big)A = I,$$

pa je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}.$$

Primjer 14.

Naći inverznu matricu matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rješenje

Računanjem determinante dane matrice provjerit ćemo da li je matrica regularna.

$$\det A = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2.$$

Kako je $\det A \neq 0$, matrica A je regularna.

Izračunajmo sada algebarske komplemente elemenata matrice A :

$A_{11} = (-1)^{1+1}D_{11} = |2| = 2$
$A_{12} = (-1)^{1+2}D_{12} = -|4| = -4$
$A_{21} = (-1)^{2+1}D_{21} = -|1| = -1$
$A_{22} = (-1)^{2+2}D_{22} = |3| = 3.$

Adjunkta matrice A jednaka je

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Inverzna matrica matrice A glasi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Na kraju provjerimo ispravnost rješenja. Dovoljno je izračunati jedan od umnožaka AA^{-1}, odnosno $A^{-1}A$ i usporediti ga s jediničnom matricom I. (Prisjetimo se da iz $AA^{-1} = I$ slijedi $A^{-1}A = I$, i obrnuto, iz $A^{-1}A = I$ slijedi $AA^{-1} = I$.)

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primjer 15.

Naći inverznu matricu matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rješenje

Najprije provjerimo regularnost dane matrice računanjem njezine determinante. Budući da se radi o matrici trećeg reda, determinantu možemo računati primjenom Sarrusovog pravila. Dakle,

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{matrix} = 6 - 5 + 4 - 10 + 6 - 2 = -1.$$

Kako je $\det A \neq 0$, zaključujemo da je A regularna matrica.

Algebarski komplementi elemenata matrice A iznose redom

$$A_{11} = (-1)^{1+1} D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(2 + 5) = -7$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 5 = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} D_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 4) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} D_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} D_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 5) = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} D_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} D_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 2) = 5$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} D_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Adjunkta matrice A je

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 4 & -7 & -3 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -7 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tada je inverzna matrica

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\tilde{A}=-1\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -7 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 7 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Provjerimo ispravnost rješenja.

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 7 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Napomena

Opisanom metodom jednostavno je računati inverznu matricu regularne matrice drugog, odnosno trećeg reda, što je za primjenu često dovoljno. Međutim, za matrice višeg reda ova metoda postaje komplicirana, prije svega zbog računanja velikog broja determinanti. Stoga se tada koristi tzv. Gaussov algoritam za računanje inverzne matrice.

3.5 Rang matrice

Neka je $A \in M_{mn}$ matrica tipa (m, n).

Podmatricu matrice A dobivamo brisanjem nekoliko njenih redaka i/ili nekoliko stupaca.

Npr., brisanjem prvog retka, te drugog, trećeg i petog stupca stupca matrice

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 7 & 9 \\ -5 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

dobije se podmatrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -5 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

dok se brisanjem drugog i četvrtog retka matrice A dobije podmatrica

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Kažemo da matrica A ima *rang* r ($r \in \mathbb{N}$) ako među kvadratnim podmatricama matrice A postoji barem jedna regularna podmatrica reda r, dok su sve kvadratne podmatrice reda većeg od r, ako postoje, singularne.

Tada pišemo $r(A) = r$, pri čemu smo s $r(A)$ označili rang matrice A.

Za nul-matricu kažemo da je ranga nula.

Očito je

$$0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\} \quad (A \in M_{mn}).$$

Primjer 16.

Naći rang matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rješenje

A je matrica tipa $(3, 4)$, pa je njezin rang

$$r(A) \leq \min\{3, 4\} = 3.$$

Matrica A ima kvadratne podmatrice prvog, drugog reda i trećeg reda.

Među kvadratnim podmatricama drugog reda postoji barem jedna regularna; točnije, to su podmatrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pa je $r(A) \geq 2$.

Kvadratne podmatrice trećeg reda su:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i sve su očito singularne.

Zaključujemo da je $r(A) = 2$.

Primjer 17.

Naći rang matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Rješenje

A je matrica tipa $(3, 4)$, pa je njezin rang

$$r(A) \leq \min\{3, 4\} = 3.$$

Matrica A ima kvadratne podmatrice prvog, drugog i trećeg reda.

Među kvadratnim podmatricama trećeg reda postoji regularna; to je $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, pa je $r(A) = 3$.

Opisani način računanja ranga matrice nije efikasan i obično se ne koristi. Postoji puno brža i jednostavnija metoda za određivanje ranga matrice. Ona se sastoji u tome da se izvođenjem određenih transformacija nad retcima i/ili stupcima dane matrice, a kojima se ne mijenja rang polazne matrice, dobije nova matrica čiji je rang evidentan, i naravno, jednak rangu polazne matrice.

U tu svrhu uvodimo sljedeću definiciju.

Za dvije matrice $A, B \in M_{mn}$ kažemo da su *ekvivalentne*, i pišemo $A \sim B$, ako se jedna matrica može dobiti iz druge konačnom primjenom *elementarnih transformacija*, a to su:

(a) zamjena dvaju redaka (stupaca) matrice;

(b) množenje nekog retka (stupca) skalarom različitim od nule;

(c) dodavanje nekog retka (stupca) nekom drugom retku (stupcu).

Pokazuje se da ekvivalentne matrice imaju isti rang. Štoviše, primjenom elementarnih transformacija moguće je svaku matricu $A \in M_{mn}$, $A \neq 0$, svesti na njoj ekvivalentnu matricu $D_r \in M_{mn}$ koja u gornjem lijevom kutu ima jediničnu podmatricu reda r za neki $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$, a ostali elementi su joj nule; tj.

$$D_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Očito je

$$r(D_r) = r \quad \text{za sve} \quad 1 \leq r \leq \min\{m, n\}.$$

Matricu D_r zovemo *kanonskom matricom* ranga r.

Jasno je da izbor elementarnih transformacija koje vršimo nad retcima, odnosno stupcima matrice A da bismo je sveli na kanonski oblik nije jednoznačan. Međutim, važno je napomenuti da krajnji rezultat, tj. kanonska matrica D_r do koje ovim transformacijama dolazimo, ne ovisi o tom izboru.

Prema tome, matrica A je ranga r ako i samo ako je ekvivalentna matrici D_r.

Posebno, ako je $A \in M_n$ kvadratna matrica reda n, tada je $r(A) = n$ ako i samo ako je A ekvivalentna matrici $D_n = I$. Tada kažemo da je A matrica *punog ranga*.

Karakterizacija regularnosti kvadratne matrice, osim putem determinante, može se iskazati i u terminima ranga matrice.

Kvadratna matrica A reda n je regularna ako i samo ako ima puni rang, tj. $r(A) = n$.

Primjer 18.

Naći rang matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 2 \\ -5 & 5 & 8 & -4 \\ 6 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Rješenje

Rang dane matrice odredit ćemo primjenom elementarnih transformacija nad njenim retcima, odnosno stupcima.

Dodamo li elementima prvog stupca matrice A elemente drugog stupca dobit ćemo nulu na mjestu $(2, 1)$. Dakle,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 2 \\ -5 & 5 & 8 & -4 \\ 6 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \text{2. stupac} \\ \text{dodamo 1. stupcu} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & -4 \\ 10 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Sada elemente prvog stupca podijelimo s 5.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & -4 \\ 10 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & -4 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Elemente prvog retka pomnožene s -2 dodamo trećem retku. Tako ćemo dobiti nule na mjestima $(3,1)$ i $(3,2)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & -4 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \text{1. redak pomnožen s } -2 \\ \text{dodamo 3. retku} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

Elemente prvog stupca pomnožene s -2 dodamo drugom stupcu, pomnožene s 4 trećem stupcu, te pomnožene s -2 četvrtom stupcu. Na taj način imat ćemo u prvom retku sve nule osim na mjestu $(1,1)$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} \text{1. stupac pomnožen s } -2 \\ \text{dodamo 2. stupcu} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \text{1. stupac pomnožen s } 4 \\ \text{dodamo 3. stupcu} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \text{1. stupac pomnožen s } -2 \\ \text{dodamo 4. stupcu} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Elemente drugog stupca podijelimo s 5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

Elemente drugog stupca pomnožene s -8 dodamo trećem stupcu, a pomnožene s 4 četvrtom stupcu. Tako ćemo dobiti nule na mjestima $(2,3)$ i $(2,4)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \text{2. stupac pomnožen s } -8 \\ \text{dodamo 3. stupcu} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{2. stupac pomnožen s } 4 \\ \text{dodamo 4. stupcu} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

Elemente trećeg stupca podijelimo s 11.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Dodamo li elemente trećeg stupca pomnožene s -5 četvrtom stupcu dobit ćemo nulu na mjestu $(4,1)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \text{3. stupac pomnožen s } -5 \\ \text{dodamo 4. stupcu} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang matrice A je maksimalan i iznosi 3.

Primjer 19.

Naći rang matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -7 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -7 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \text{1. redak pomnožen s } 3 \\ \text{dodamo 3. retku} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{1. redak} \\ \text{dodamo 4. retku} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{1. redak pomnožen s } -2 \\ \text{dodamo 5. retku} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{1. stupac pomnožen s } -2 \\ \text{dodamo 2. stupcu} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{1. stupac pomnožen s 2} \\ \text{dodamo 3. stupcu} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{od 3. stupca} \\ \text{oduzmemo 2. stupac} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{2. redak} \\ \text{dodamo 3. retku} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{od 4. retka} \\ \text{oduzmemo 2. redak} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{2. redak pomnožen s } -3 \\ \text{dodamo 5. retku} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zaključujemo da je $r(A) = 2$.

3.6 Sustavi linearnih jednadžbi

Sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica općenito zapisujemo ovako:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}.$$

Realni brojevi a_{ij} zovu se *koeficijenti sustava*, realni brojevi b_i *slobodni članovi*, a x_i *nepoznanice sustava*.

Ako su svi slobodni članovi b_i jednaki nuli, kažemo da je sustav *homogen*.
Ako je barem jedan od slobodnih članova b_i različit od nule, sustav je *nehomogen*.

Rješenje sustava je svaka uređena n-torka $(x_1, \ldots, x_n)$ realnih brojeva koja uvrštena u sustav identički zadovoljava sve njegove jednadžbe.

Primjer 20.

Sustav

$$\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 9 \\ 2x & - & 3y & = & 4 \end{array}$$

dviju jednadžbi s dvije nepoznanice (koje smo ovdje označili s x i y) ima jedinstveno rješenje. To je uređeni par $(x, y) = (5, 2)$.
Geometrijski gledano, $x+2y = 9$ i $2x-3y = 4$ su jednadžbe dvaju pravaca u ravnini. Riješiti dani sustav znači naći presjek ovih dvaju pravaca. Rješenje sustava je jedinstveno, što nam govori da se pravci sijeku u jednoj točki.

Sustav

$$\begin{array}{cccc} x & + & 3y & = 1 \\ 2x & + & 6y & = 2 \end{array}$$

ima beskonačno mnogo rješenja. Naime, druga jednadžba dobije se množenjem prve jednadžbe brojem 2. Stoga se rješavanje ovog sustava svodi na rješavanje njegove prve jednadžbe. Jasno je da za nepoznanicu y možemo uzeti bilo koji realan broj t, a zatim x izraziti preko t. Dakle, rješenje sustava zapisujemo u parametarskom obliku

$$\begin{array}{ccc} y & = & t \\ x & = & 1-3t \end{array}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Geometrijski gledano, ovim je sustavom zapravo dana jednadžba jednog pravca u ravnini i njegovo rješenje čine sve točke tog pravca.

Sustav

$$
\begin{array}{rcrl}
5x & - & 2y & = 1 \\
5x & - & 2y & = 7
\end{array}
$$

očito nema rješenja. Geometrijski gledano, ovim su sustavom dane jednadžbe dvaju pravaca u ravnini koji se ne sijeku.

Općenito, dva pravca u ravnini mogu se sjeći u jednoj točki, mogu se podudarati ili se ne sijeku. Prema tome, sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice može imati jedinstveno rješenje, može imati beskonačno mnogo rješenja ili uopće nema rješenja. Interesantno je da ovaj zaključak vrijedi i za sustav proizvoljnog broja jednadžbi i nepoznanica.

Sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica može imati jedinstveno rješenje, može imati beskonačno mnogo rješenja ili nema niti jedno rješenje.

Zanima nas kako odrediti je li dani sustav rješiv ili nije, te ukoliko je sustav rješiv je li njegovo rješenje jedinstveno. Da bismo na to odgovorili, prikladno je sustav zapisati u matričnom obliku. Preciznije, svakom sustavu pridružujemo sljedeće matrice:

$$
A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

koju zovemo *matricom koeficijenata sustava*, te zatim dvije matrice koje imaju samo jedan stupac,

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

koju zovemo *vektorom nepoznanica*, te

$$
b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

koju nazivamo *vektorom slobodnih članova*, odnosno *desnom stranom sustava*.

Sada se sustav zapisuje u obliku matrične jednadžbe

$$Ax = b.$$

Uz sustav vežemo još jednu matricu koju dobijemo tako da matrici koeficijenata sustava dopišemo još jedan stupac koji čine slobodni članovi sustava:

$$A_p = (A \vdots b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix}.$$

Matricu A_p zovemo *proširenom matricom sustava.*

Uočimo da je rang matrice A_p ili jednak ili za jedan veći od ranga matrice A. Usporedbom ranga ovih dviju matrica, možemo saznati je li sustav rješiv ili nije, te ako rješenje postoji je li ono jednoznačno određeno. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem (Kronecker-Capelli)
Sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica ima rješenje ako i samo ako matrica koeficijenata tog sustava i njegova proširena matrica imaju isti rang, tj. ako vrijedi

$$r(A) = r(A_p).$$

Pritom, ako je

(a) $r(A) = r(A_p) = n$, *sustav ima jedinstveno rješenje*;

(b) $r(A) = r(A_p) < n$, *sustav ima beskonačno mnogo rješenja.*

Ako je sustav linearnih jednadžbi homogen, tada se posljednji stupac matrice A_p sastoji od samih nula, pa je stoga $r(A) = r(A_p)$. Prema tome, homogeni sustav je uvijek rješiv. Jedno rješenje tog sustava je

$$(0, 0, \dots, 0)$$

(tj. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$) koje nazivamo *trivijalnim rješenjem.*

Pomoću Kronecker-Capellijevog teorema možemo odrediti kada homogen sustav ima samo trivijalno rješenje, a kada beskonačno mnogo rješenja.

Homogeni sustav ima

(a) *samo trivijalno rješenje ako i samo ako je* $r(A) = n$;

(b) *beskonačno mnogo rješenja ako i samo ako je* $r(A) < n$.

Ako homogeni sustav ima isti broj jednadžbi i nepoznanica, tada se, osim pomoću ranga, struktura skupa rješenja sustava može odrediti pomoću determinante (kvadratne) matrice koeficijenata toga sustava. Naime,

$$r(A) = n \Leftrightarrow A \text{ je regularna matrica } \Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

Prema tome, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem (Rouche)

Homogeni sustav u kojem se broj jednadžbi podudara s brojem nepoznanica ima

(a) *samo trivijalno rješenje ako i samo ako je* $\det A \neq 0$;

(b) *beskonačno mnogo rješenja ako i samo ako je* $\det A = 0$.

Primjer 21.

Promotrimo homogeni sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Računanjem determinante matrice koeficijenata toga sustava

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

možemo utvrditi ima li ovaj sustav netrivijalnih rješenja.
Primjenom Sarrusovog pravila računamo

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{array} = 3 - 12 + 4 + 2 + 2 + 36 = 35.$$

Kako je $\det A \neq 0$, ovaj sustav ima samo trivijalno rješenje

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

3.7 Gaussova metoda eliminacije

Kao što smo vidjeli, pomoću Kronecker-Capellijevog teorema možemo provjeriti je li dani sustav linearnih jednadžbi rješiv ili nije. Također, ako rješenje postoji, možemo utvrditi je li ono jedinstveno.

Međutim, ovaj nam teorem ne daje algoritam pomoću kojeg bismo, u slučaju da je sustav rješiv, pronašli sva njegova rješenja.

Gaussovom metodom eliminacije može se ustanoviti je li dani sustav linearnih jednadžbi rješiv ili nije. Ako je sustav rješiv, mogu se pronaći sva njegova rješenja.

Postupak se sastoji u sljedećem.

Neka je zadan sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}.$$

Ovaj sustav zamijenit ćemo s *ekvivalentnim sustavom*, tj. sustavom koji ima ista rješenja kao i polazni, a kojeg je pak moguće riješiti na jednostavan način.

Pretpostavimo da matrica $A = (a_{ij})$ koeficijenata sustava ima rang r, tj.,

$$r(A) = r.$$

Tada se elementarnim transformacijama nad *retcima* proširene matrice sustava A_p, te eventualnim zamjenama mjesta prvih n stupaca, što odgovara prenumeraciji nepoznanica u sustavu, matrica A_p prevodi na njoj ekvivalentnu matricu

$$A'_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a'_{1\,r+1} & \ldots & a'_{1n} & \vdots & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a'_{2\,r+1} & \ldots & a'_{2n} & \vdots & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a'_{r\,r+1} & \ldots & a'_{rn} & \vdots & b'_r \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \vdots & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \vdots & b'_m \end{pmatrix}.$$

Ovoj matrici odgovara sustav

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & & & & & + & a'_{1\,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\
& & x_2 & & & + & a'_{2\,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & & & x_r & + & a'_{r\,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & a'_{rn}x_n & = & b'_r \\
0\cdot x_1 & + & 0\cdot x_2 & + \cdots + & 0\cdot x_r & + & 0\cdot x_{r+1} & + & \cdots & + & 0\cdot x_n & = & b'_{r+1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0\cdot x_1 & + & 0\cdot x_2 & + \cdots + & 0\cdot x_r & + & 0\cdot x_{r+1} & + & \cdots & + & 0\cdot x_n & = & b'_m
\end{array}$$

koji ima ista rješenja kao i polazni sustav.

Pritom, ako je barem jedan od slobodnih članova $b'_{r+1}, \ldots, b'_m$ različit od nule, tada sustav nema rješenja. (Uočimo da je tada $r(A_p) = r + 1 > r = r(A)$.)

Ako je $b'_{r+1} = \cdots = b'_m = 0$, tada su posljednjih $m - r$ jednadžbi sustava trivijalni identiteti, pa se sustav reducira na sustav od r jednadžbi

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & & & + & a'_{1\,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\
& x_2 & & + & a'_{2\,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & x_r & + & a'_{r\,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & a'_{rn}x_n & = & b'_r
\end{array}.$$

Pritom je $r(A_p) = r = r(A)$. U tom slučaju sustav je rješiv. Naime, svaka od prvih r nepoznanica $x_1, \ldots, x_r$ može se izraziti pomoću preostalih $k = n - r$ nepoznanica $x_{r+1}, \ldots, x_n$. To znači da za nepoznanice $x_{r+1}, \ldots, x_n$ možemo birati proizvoljne realne brojeve,

$$\begin{array}{ccc}
x_{r+1} & = & t_1 \\
x_{r+2} & = & t_2 \\
& \vdots & \\
x_n & = & t_k
\end{array}$$

$(t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R})$, te zatim $x_1, \ldots, x_r$ izraziti pomoću $t_1, \ldots, t_k$, tj.

$$\begin{array}{ccl}
x_1 & = & b'_1 - a'_{1\,r+1}t_1 - \cdots - a'_{1n}t_k \\
x_2 & = & b'_2 - a'_{2\,r+1}t_1 - \cdots - a'_{2n}t_k \\
& \vdots & \\
x_r & = & b'_r - a'_{r\,r+1}t_1 - \cdots - a'_{rn}t_k
\end{array}.$$

Brojeve $t_1, \ldots, t_k$ zovemo *slobodnim parametrima.*

Primijetimo da u slučaju $n = r = r(A) = r(A_p)$ sustav nema slobodnih parametara (jer je $k = n - r = 0$), tj. rješenje danog sustava je jedinstveno i glasi

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & b'_1 \\ x_2 & = & b'_2 \\ & \vdots & \\ x_n & = & b'_n \end{array}.$$

Ako je $n > r = r(A) = r(A_p)$, tada sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Rješenje sustava dano je u parametarskom obliku, pri čemu broj slobodnih parametara iznosi $k = n - r$.

Primjer 22.

Riješiti nehomogeni sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & - & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ -3x_1 & + & 10x_2 & + & 7x_3 & = & -9 \\ -x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & = & -6 \end{array}.$$

Rješenje

Koristeći Gaussovu metodu eliminacije ispitat ćemo je li dani sustav linearnih jednadžbi rješiv, te ako jest pronaći sva njegova rješenja. Proširena matrica ovog sustava je

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ -3 & 10 & 7 & \vdots & -9 \\ -1 & 7 & 3 & \vdots & -6 \end{pmatrix}.$$

Nad retcima ove matrice vršimo elementarne transformacije s ciljem svođenja matrice na njoj ekvivalentnu matricu, kojoj odgovara sustav koji ima ista rješenja kao i polazni, a jednostavno ga je riješiti.

Kako je element matrice na mjestu $(1, 1)$ različit od nule, pomoću elementarnih transformacija nad retcima ove matrice moguće je postići da u prvom stupcu imamo sve nule osim na mjestu $(1, 1)$. To ćemo učiniti na sljedeći način. Elemente prvog retka samo prepišemo. Zatim elementima drugog retka dodamo elemente prvog retka prethodno pomnožene s -2. Tako ćemo dobiti nulu na mjestu $(2, 1)$. Nakon toga elementima trećeg retka dodamo elemente prvog retka pomnožene s 3. Sada ćemo i na mjestu $(3,1)$ imati nulu. Da bismo dobili nulu na mjestu $(4,1)$ dovoljno je elementima četvrtog retka dodati elemente prvog retka. Prema tome,

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -4 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 10 & 7 & -9 \\ -1 & 7 & 3 & -6 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} \text{1. redak pomnožen s } -2 \\ \text{dodamo 2. retku} \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \\ -3 & 10 & 7 & -9 \\ -1 & 7 & 3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{1. redak pomnožen s } 3 \\ \text{dodamo 3. retku} \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -6 \\ -1 & 7 & 3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{1. redak dodamo} \\ \text{3. retku} \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \end{array}\right).$$

Podijelimo elemente drugog retka s 11, te elemente trećeg retka s -2.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

U dobivenoj matrici je element na mjestu $(2,2)$ različit od nule. To nam omogućuje da pomoću elementarnih transformacija nad retcima ove matrice u drugom stupcu dobijemo sve nule osim na mjestu $(2,2)$. Ovoga puta drugi redak prepisujemo. Zatim elementima prvog retka dodamo elemente drugog retka pomnožene s 4. Tako ćemo na mjestu $(1,2)$ dobiti nulu. Nulu na mjestu $(3,2)$ dobit ćemo tako da od elemenata trećeg retka oduzmemo elemente drugog retka. Dodamo li elementima četvrtog retka elemente drugog retka pomnožene s -3, dobit ćemo nulu i na mjestu $(4,2)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \text{2. redak pomnožen s 4} \\ \text{dodamo 1. retku} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & -5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{od 3. retka} \\ \text{oduzmemo 2. redak} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & -5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{2. redak pomnožen s } -3 \\ \text{dodamo 4. retku} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & -5 & \vdots & -5 \end{pmatrix}$$

Elemente trećeg retka podijelimo s 3, a elemente četvrtog retka s -5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & -5 & \vdots & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Uočimo da je u dobivenoj matrici element na mjestu $(3,3)$ različit od nule. Stoga i u trećem stupcu možemo dobiti sve nule osim na mjestu $(3,3)$. To ćemo postići tako da elemente trećeg retka samo prepišemo, elementima prvog retka dodamo elemente trećeg retka, od elemenata drugog retka oduzmemo elemente trećeg retka, te konačno od elemenata četvrtog retka oduzmemo elemente trećeg retka.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \text{3. redak} \\ \text{dodamo 1. retku} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{od 2. retka} \\ \text{oduzmemo 3. redak} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{od 4. retka} \\ \text{oduzmemo 3. redak} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Četvrti redak se sastoji iz samih nula, pa ga možemo ispustiti. Dakle, dobili smo matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da je rang matrice koeficijenata ovog sustava jednak rangu proširene matrice sustava i u našem slučaju iznosi tri, pa sustav ima rješenje. Kako se taj broj podudara s brojem nepoznanica sustava, ovaj sustav ima jedinstveno rješenje. Iz dobivene matrice lako očitamo da je rješenje sustava

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1.$$

Primjer 23.

Riješiti homogeni sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 7x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Rješenje

Koristeći Gaussovu metodu eliminacije odredit ćemo sva rješenja ovog homogenog sustava. Primjenjujući elementarne transformacije *samo* nad retcima proširene matrice sustava, svodimo sustav na njemu ekvivalentni čija rješenja možemo neposredno očitati.

Proširena matrica sustava glasi

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Uočimo da je element na mjestu $(1,1)$ različit od nule. Stoga vršeći elementarne transformacije nad retcima ove matrice možemo postići da su svi elementi prvog stupca, osim onog na mjestu $(1,1)$, jednaki nuli. Prvi redak matrice prepišemo. Dodamo li zatim elementima drugog retka elemente prvog retka pomnožene s -4, dobit ćemo nulu na mjestu $(2,1)$. Isto tako, ako elementima trećeg retka dodamo elemente prvog retka pomnožene s -7, dobit ćemo nulu na mjestu $(3,1)$.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c} \text{1. redak pomnožen s } -4 \\ \text{dodamo 2. retku} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & 0 \\ 7 & 7 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c} \text{1. redak pomnožen s } -7 \\ \text{dodamo 3. retku} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 14 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

Kako je u tako dobivenoj matrici element na mjestu $(2,2)$ različit od nule, možemo pomoću elementarnih transformacija nad retcima postići da i u drugom stupcu imamo sve nule, osim na mjestu $(2,2)$. Ovoga puta elemente drugog retka prepisujemo. Dodamo li elemente drugog retka elementima prvog retka koje smo prethodno pomnožili sa 7, dobit ćemo nulu na mjestu $(1,2)$. Zatim ćemo elementima trećeg retka dodati elemente drugog retka pomnožene s -2 i time dobiti nulu na mjestu $(3,2)$.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 14 & 18 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c} \text{1. retku pomnoženom sa 7} \\ \text{dodamo 2. redak} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 7 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 14 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c} \text{2. redak pomnožen s } -2 \\ \text{dodamo 3. retku} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 7 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Kako je element na mjestu $(3, 3)$ jednak nuli, a matrica ima tri retka, postupak je završen. Budući da se treći redak sastoji od samih nula, možemo ga ispustiti. Dakle, preostaje nam da iz matrice

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 7 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

očitamo rješenje sustava.

Najprije primijetimo da je $r = r(A) = r(A_p) = 2$, a broj nepoznanica $n = 3$. Stoga ovaj sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Pritom je broj slobodnih parametara jednak $k = n - r = 3 - 2 = 1$.

Prvom retku matrice odgovara jednadžba

$$7x_1 - 5x_3 = 0,$$

a drugom retku jednadžba

$$7x_2 + 9x_3 = 0.$$

Ako za slobodni parametar stavimo $x_3 = t$, $(t \in \mathbb{R})$, tada se nepoznanice x_1 i x_2 mogu izraziti preko parametra t. Stoga je rješenje sustava

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{5}{7}t \\ x_2 & = & -\frac{9}{7}t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ x_3 & = & t \end{array}$$

Primjer 24.

Riješiti nehomogeni sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & & & = & 4 \\ 5x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 3 \end{array} .$$

Rješenje

Ovom sustavu odgovara proširena matrica sustava

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & -4 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Kako je element na mjestu $(1,1)$ različit od nule, pomoću elementarnih transformacija nad retcima ove matrice možemo postići da i na mjestima $(2,1)$ i $(3,1)$ imamo nule. Elemente prvog retka prepišemo. Da bismo dobili nulu na mjestu $(2,1)$, elementima drugog retka pomnoženima s -2 dodat ćemo elemente prvog retka pomnožene s 3. Zatim ćemo elementima trećeg retka pomnoženima s -2 dodati elemente prvog retka pomnožene s 5 i time dobiti nulu na mjestu $(3,1)$.

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & -4 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c} \text{1. redak pomnožen s 3} \\ \text{dodamo 2. retku} \\ \text{pomnoženom s } -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & -4 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c} \text{1. redak pomnožen s 5} \\ \text{dodamo 3. retku} \\ \text{pomnoženom s } -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Ako sada od elemenata trećeg retka oduzmemo elemente drugog retka, imamo

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

Uočimo da trećem retku ove matrice odgovara linearna jednadžba

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 6,$$

koja nema rješenja, pa stoga ovaj sustav nije rješiv. (Primijetimo da je $r(A) = 2 \neq 3 = r(A_p)$.)

Primjer 25.

Riješiti nehomogeni sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 7x_3 & - & 7x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 5x_4 & = & -1 \end{array}.$$

Rješenje

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 2 & -1 & -5 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & -7 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c} \text{(1. redak } \times(-2) + \text{ 2. redak)} \to \text{ 2. redak} \\ \text{(1. redak } \times 3 + \text{ 3. redak } \times(-2)) \to \text{ 3. redak} \\ \text{(4. redak } - \text{ 1. redak)} \to \text{ 4. redak} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr:r} 2 & -1 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -9 & -9 \\ 0 & -5 & -5 & 15 & 15 \\ 0 & 2 & 2 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c} \text{2. redak/3} \\ \text{3. redak } /(-5) \\ \text{4. redak } /2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr:r} 2 & -1 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c} \text{(1. redak } + \text{ 2. redak)} \to \text{ 1. redak} \\ \text{(3. redak } - \text{ 2. redak)} \to \text{ 3. redak} \\ \text{(4. redak } - \text{ 2. redak)} \to \text{ 4. redak} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr:r} 2 & 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \text{(1. redak /2)}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Uočimo da je $r = r(A) = r(A_p) = 2$, pa zaključujemo da je sustav rješiv. Kako je broj nepoznanica $n = 4$, sustav ima beskonačno mnogo rješenja; broj slobodnih parametara je $k = n - r = 2$.

Iz dobivene matrice očitamo

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & -3 \end{array} .$$

Stavimo

$$\begin{array}{ccl} x_3 & = & t \\ x_4 & = & s \quad (t, s \in \mathbb{R}) \end{array} ,$$

pa je

$$\begin{array}{ccl} x_1 & = & 2t + s + 1 \\ x_2 & = & -t + 3s - 3 \end{array} .$$

Primjer 26.

Riješiti nehomogeni sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 8x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & -6 \end{array} .$$

Rješenje

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & -8 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c} \text{(1. redak } \times(-2) + \text{ 2. redak)} \to \text{ 2. redak} \\ \text{(1. redak } \times(-5) + \text{ 3. redak)} \to \text{ 3. redak} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 24 & -8 & -16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c} \text{2. redak } \times(-1) \\ \text{3. redak/8} \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 3 & -1 & \vdots & -2 \end{pmatrix}$$

Budući da je element na mjestu $(2,2)$ jednak nuli, te da u drugom stupcu matrice *ispod* tog elementa postoji element koji je različit od nule (to je element 3 na mjestu $(3,2)$), zamijenit ćemo drugi i treći redak matrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 3 & -1 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \sim \text{(zamjena 2. i 3. retka)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 3 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \text{((1. redak} \times 3 + \text{2. redak} \times 4) \rightarrow \text{1. redak)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & \vdots & -2 \\ 0 & 3 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \text{(3. redak} \times (-2) + \text{1. redak)} \rightarrow \text{1. redak} \\ \text{(2. redak + 3. redak)} \rightarrow \text{2. redak} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \vdots & -12 \\ 0 & 3 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \text{1. redak/3} \\ \text{2. redak/3} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5 \end{pmatrix}$$

Zaključujemo da sustav ima jedinstveno rješenje

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 5.$$

Primjer 27.

Riješiti nehomogeni sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 3x_5 & = & 5 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & 6x_5 & = & 4 \end{array}.$$

Rješenje

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & -5 & -3 & 5 \\ 5 & 7 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c} (1.\text{ redak } \times 2 + 2.\text{ redak}) \to 2.\text{ redak} \\ (1.\text{ redak } \times(-5) + 3.\text{ redak}) \to 3.\text{ redak} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 7 & -7 & -1 & 9 \\ 0 & -8 & -7 & 7 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left((2.\text{ redak} + 3.\text{ redak}) \to 3.\text{ redak} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 7 & -7 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Zadnjem retku dobivene matrice odgovara jednadžba

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 3$$

koja nema rješenja, pa stoga ovaj sustav nije rješiv.

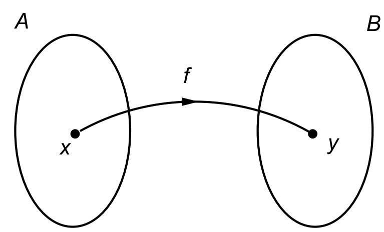
4 Funkcije

4.1 Pojam funkcije

Neka su A i B dva neprazna skupa.

Funkcija ili *preslikavanje* sa skupa A u skup B je pravilo (propis) f po kojem svakom elementu $x \in A$ pridružujemo točno jedan element $y \in B$.

Ako



Slika 10: $f : A \to B$

Element $y \in B$ koji je funkcijom f pridružen elementu $x \in A$ zovemo *slikom elementa* x ili *vrijednošću funkcije* f na elementu x.

Pišemo $f : x \mapsto y$, odnosno $y = f(x)$.

Kažemo da je x *original* ili *praslika* od $f(x)$.

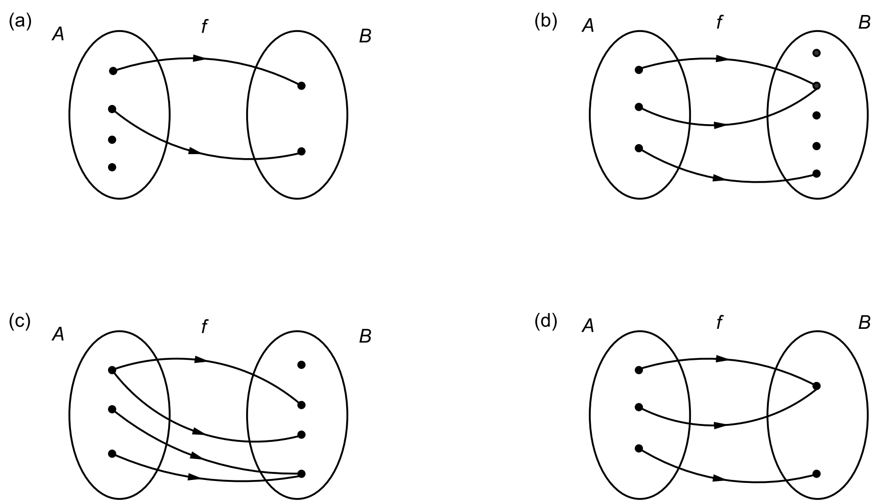
Skup A zove se *područje definicije* ili *domena* preslikavanja f, a skup B *područje vrijednosti* ili *kodomena* preslikavanja f.

Za domenu funkcije f koristimo oznaku $\mathcal{D}(f)$.

Prema tome, svaka je funkcija zadana svojom domenom, kodomenom i pravilom po kojem svakom elementu domene pridružujemo jedinstveni element kodomene.

Za dvije funkcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$ kažemo da su *jednake* (i pišemo $f = g$) ako je $A = C$, $B = D$ i $f(x) = g(x)$ za sve $x \in A$.

Primjer 1.



Slika 11: Dijagramima (a) i (c) nije dobro zadano $f : A \to B$; dijagramima (b) i (d) je dobro zadano $f : A \to B$.

Dijagramima (a) i (c) nije dobro definirano preslikavanje sa skupa A u skup B, dok je dijagramima (b) i (d) dobro zadano preslikavanje f sa skupa A u B.

Nadalje, za danu funkciju $f : A \to B$ i podskup A' skupa A definiramo *sliku podskupa* A' kao skup

$$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}.$$

Uočimo $f(A') \subseteq B$.

Posebno, skup $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ zovemo *slikom funkcije* f. Za skup $f(A)$ koristi se i oznaka $Im(f)$.

Uz funkciju $f : A \to B$ i podskup A' skupa A usko je povezana i funkcija $g : A' \to B$ definirana ovako:

$$g(x) = f(x) \text{ za sve } x \in A'.$$

Tako definiranu funkciju g zovemo *restrikcijom* ili *suženjem funkcije* f na A' i označavamo ju s $g = f|_{A'}$.

Dakle, domena funkcije $f|_{A'}$ je skup A' i na tom je skupu funkcija $f|_{A'}$ zadana istim pravilom kao i funkcija f.

Primjer 2.

Neka je $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 5, 7, 8\}$ i $A' = \{b, c\}$. Neka je $f : A \to B$ funkcija zadana sljedećim pravilom:

$$f(a) = 5, \quad f(b) = 7, \quad f(c) = 7.$$

Tada vrijedi:

(a) $Im(f) = \{f(a), f(b), f(c)\} = \{5, 7\}$;

(b) $f(A') = \{f(b), f(c)\} = \{7\}$;

(c) $f|_{A'} : A' \to B$ je restrikcija funkcije f na skup A' definirana s

$$f|_{A'}(b) = f(b) = 7, \quad f|_{A'}(c) = f(c) = 7;$$

(d) funkcije f i $f|_{A'}$ nisu jednake budući da su im domene različite.

Surjektivna, injektivna i bijektivna preslikavanja

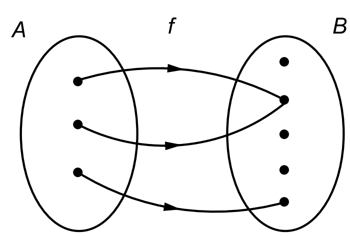
Kažemo da je preslikavanje $f : A \to B$ *surjektivno* ili *surjekcija* ako je $Im(f) = B$, tj. ako za svaki $y \in B$ postoji $x \in A$ sa svojstvom $f(x) = y$.

Preslikavanje $f : A \to B$ je *injektivno* ili *injekcija* ako različite elementa skupa A preslikava u različite elementa skupa B, tj. ako iz $x, x' \in A$, $x \neq x'$, slijedi $f(x) \neq f(x')$.

Preslikavanje $f : A \to B$ je *bijektivno* ili *bijekcija* ako je f injektivno i surjektivno preslikavanje.

Primjer 3.

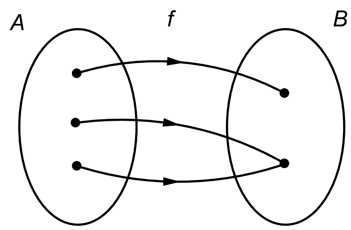
(a)



Slika 12: $f : A \to B$

$f : A \to B$ nije niti surjekcija niti injekcija.

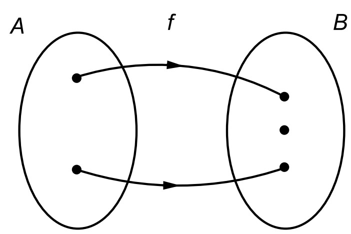
(b)



Slika 13: $f : A \to B$

$f : A \to$

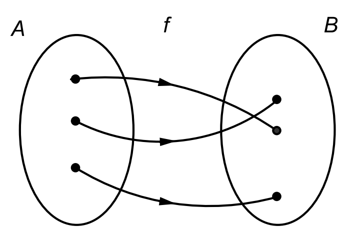
(c)



Slika 14: $f : A \to B$

$f : A \to$

(d)



Slika 15: $f : A \to B$

$f : A \to B$ je bijekcija.

Primjer 4.

Neka je $A = \{-3, 0, 1, 5\}$, $B = \{-2, 1, 4\}$ i $A' = \{-3, 0, 1\}$. Neka je $f : A \to B$ funkcija zadana sljedećim pravilom:

$$f(-3) = 4, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = -2, \quad f(5) = 1.$$

Tada vrijedi:

(a) funkcija f je surjekcija, jer je $Im(f) = B$;

(b) funkcija f nije injekcija, jer je $f(0) = f(5)$;

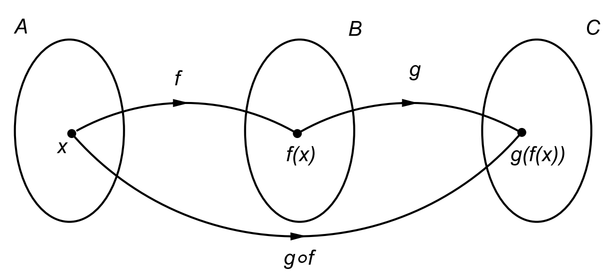
(c) funkcija $f|_{A'} : A' \to B$ je bijekcija.

Kompozicija funkcija

Neka su A, B i C neprazni skupovi, te neka su dane funkcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$. *Kompozicija funkcija* f i g je funkcija $g \circ f : A \to C$ definirana s

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{za sve } x \in A.$$

Za kompoziciju funkcija upotrebljava se i termin *složena funkcija*.



Slika 16: Kompozicija funkcija f i g

Lako se pokaže da je kompozicija funkcija asocijativna operacija, tj. da za funkcije $f : A \to B$, $g : B \to C$ i $h : C \to D$ vrijedi

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Međutim, kompozicija funkcija nije komutativna operacija. Naime, ako je $g \circ f$ dobro definirana funkcija, to ne znači da je i $f \circ g$ dobro definirana. Štovise, i u slučaju dobro definiranih funkcija $g \circ f$ i $f \circ g$ ne mora biti $g \circ f = f \circ g$.

Inverzna funkcija

Uz svaki neprazni skup S vezano je *identično preslikavanje* id_S skupa S na S ili *identitet* na S koje svakom elementu skupa S pridružuje taj isti element.

Dakle, $id_S : S \to S$ je preslikavanje zadano s

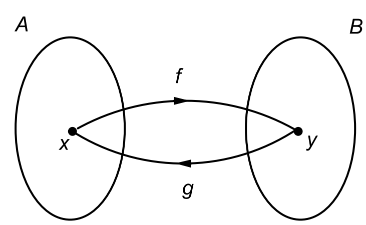
$$id_S(x) = x \quad \text{za sve } x \in S.$$

Neka su A i B neprazni skupovi, te $f : A \to B$ dana funkcija. Kažemo da je $g : B \to A$ *inverzna funkcija* od f ako je

$$g \circ f = id_A \quad \text{i } f \circ g = id_B.$$

Drugim riječima, mora vrijediti

$$g(f(x)) = x \quad \text{za sve } x \in A \quad \text{i} \quad f(g(y)) = y \quad \text{za sve } y \in B.$$



Slika 17: g je inverzna funkcija od f

Inverznu funkciju funkcije f označavamo s f^{-1}.

Dakle, ako je $y = f(x)$, onda je $x = f^{-1}(y)$.

Jasno je da za danu funkciju inverzno preslikavanje općenito ne mora postojati.

Ako je $f : A \to B$ bijekcija, onda postoji inverzno preslikavanje $f^{-1} : B \to A$ i ono je također bijektivno.

Štoviše, bijekcije su jedina preslikavanja za koja postoje inverzna preslikavanja.

Također, inverzno preslikavanje (ukoliko postoji) je jedinstveno.

Napomenimo da ukoliko je preslikavanje $f : A \to B$ injektivno, tada je $f : A \to Im(f)$ bijekcija sa skupa A na skup $Im(f)$, pa stoga postoji inverzno preslikavanje $f^{-1} : Im(f) \to A$.

4.2 Svojstva realnih funkcija realne varijable

Funkciju f čija domena i kodomena su podskupovi skupa realnih brojeva zovemo *realnom funkcijom realne varijable*.

U daljnjem proučavamo takve funkcije.

Ako je pritom funkcija f zadana analitički, tj. formulom, tada obično pišemo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ali smatrajući da domena funkcije f ne mora biti cijeli skup $\mathbb{R}$, nego skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje se danom formulom nakon naznačenih operacija dobiva realan broj.

Npr, ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

tada je prirodna domena funkcije f skup $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

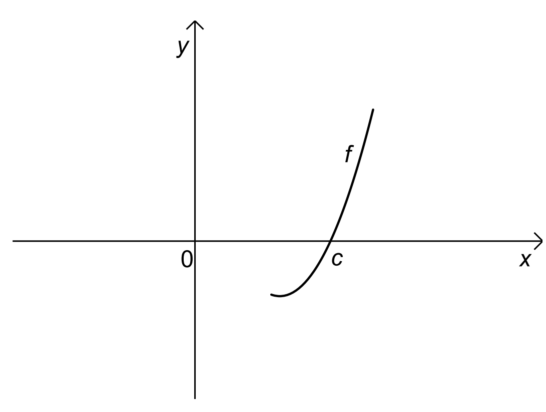
Realne funkcije realne varijable često proučavamo pomoću njihova grafa. Pritom pod *grafom funkcije* f podrazumijevamo skup $G(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiran ovako:

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}(f)\}.$$

Crtanjem grafa funkcije dobivamo krivulju u ravnini. Osnovna svojstva funkcije zadane nekim matematičkim izrazom teško je uvidjeti iz same formule, međutim lako su vidljiva iz njenog grafa.

Na grafu funkcije f značajne su točke u kojima graf od f siječe os apscisa. Takve točke zovemo *nultočkama* funkcije f.

Dakle, $c \in \mathcal{D}(f)$ *je nultočka funkcije* f *ako je* $f(c) = 0$.



Slika 18: c je nultočka funkcije f.

Skup svih nultočaka funkcije f označavat ćemo s $N(f)$.
Uočimo da $N(f)$ može biti prazan skup.

Ako je f injektivno preslikavanje, tada svaka paralela s osi x siječe $G(f)$ u najviše jednoj točki.

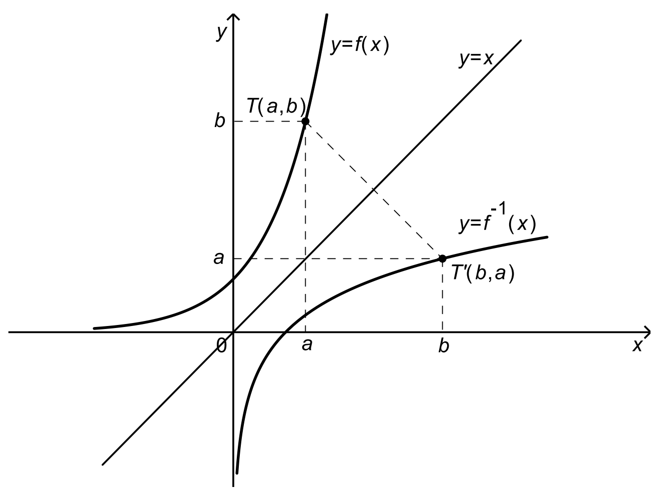
Nadalje, u slučaju injektivnog preslikavanja $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ jasno je da je preslikavanje $f : \mathcal{D}(f) \to Im(f)$ bijektivno. Stoga postoji inverzno preslikavanje $f^{-1} : Im(f) \to \mathcal{D}(f)$. Uočimo da je $\mathcal{D}(f^{-1}) = Im(f)$ i $Im(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$. Osim toga, vrijedi

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{za sve } x \in \mathcal{D}(f),$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{za sve } x \in \mathcal{D}(f^{-1}).$$

Ako točka $T(a, b)$ pripada grafu funkcije f, tj. ako je $b = f(a)$, tada vrijedi $a = f^{-1}(b)$ što znači da točka $T'(b, a)$ pripada grafu funkcije f^{-1}.

Prema tome, graf funkcije f^{-1} simetričan je grafu funkcije f s obzirom na pravac $y = x$.



Slika 19: Grafovi funkcija f i f^{-1}

Parnost i neparnost

Kažemo da je funkcija f *parna* ako iz $x \in \mathcal{D}(f)$ slijedi $-x \in \mathcal{D}(f)$, te vrijedi

$$f(-x) = f(x) \quad \text{za sve } x \in \mathcal{D}(f).$$

Funkcija f je *neparna* ako iz $x \in \mathcal{D}(f)$ slijedi $-x \in \mathcal{D}(f)$, te vrijedi

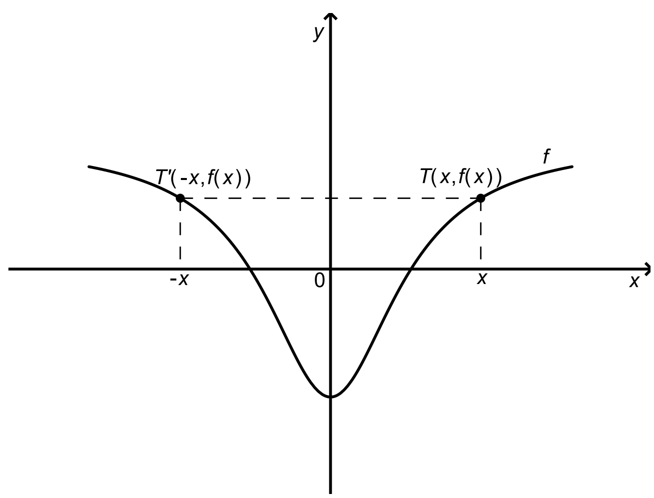
$$f(-x) = -f(x) \quad \text{za sve } x \in \mathcal{D}(f).$$

Uočimo da je domena parne, odnosno neparne funkcije simetričan skup s obzirom na točku $x = 0$.

Nadalje, ako je f parna funkcija, tada

$$T(x, f(x)) \in G(f) \quad \Rightarrow \quad T'(-x, f(x)) \in G(f).$$

Dakle, graf parne funkcije je osno simetrična krivulja s obzirom na os y.

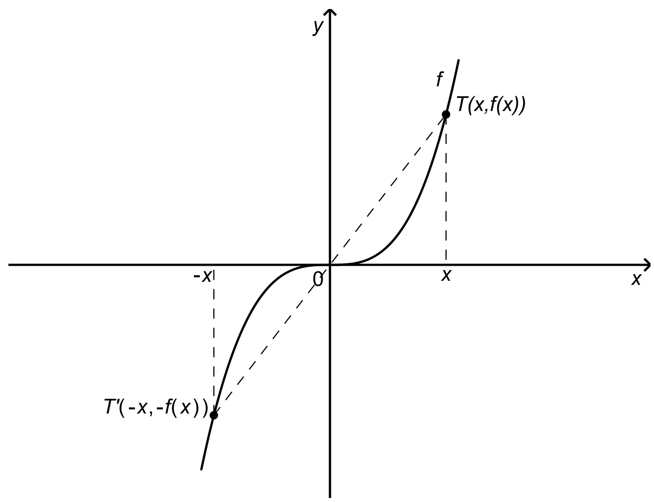


Slika 20: Graf parne funkcije

Ako je pak f neparna funkcija, tada

$$T(x, f(x)) \in G(f) \quad \Rightarrow \quad T'(-x, -f(x)) \in G(f)).$$

Graf neparne funkcije je centralno simetrična krivulja s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.



Slika 21: Graf neparne funkcije

Ako je f neparna funkcija, te ako $0 \in \mathcal{D}(f)$, tada je $f(0) = 0$.
(Zaista, uvrstimo li $x = 0$ u $f(-x) = -f(x)$ dobit ćemo $f(0) = -f(0)$. Odavde je $2f(0) = 0$, odnosno $f(0) = 0$.)

Primjer 5.

1.) $f(x) = x^2$ je parna funkcija.

2.) $f(x) = \cos x$ je parna funkcija.

3.) $f(x) = x^3$ je neparna funkcija.

4.) $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \text{tg } x$ i $f_3(x) = \text{ctg } x$ su neparne funkcije.

5.) Funkcija $f(x) = 2x + 1$ nije niti parna niti neparna.
(Naime, $-1 = f(-1) \neq f(1) = 3$, pa f nije parna funkcija. Također, $f(0) = 1 \neq 0$, pa f nije neparna funkcija.)

Periodičnost

Kažemo da je funkcija f *periodična* ako postoji realan broj $T > 0$ takav da čim je $x \in \mathcal{D}(f)$ slijedi da su $x - T \in \mathcal{D}(f)$ i $x + T \in \mathcal{D}(f)$, te vrijedi

$$f(x + T) = f(x) \quad \text{za sve } x \in \mathcal{D}(f).$$

Najmanji takav broj T (ako postoji) zove se *temeljni period* funkcije f.

Primjer 6.

1.) $f_1(x) = \sin x$ i $f_2(x) = \cos x$ su periodične funkcije s temeljnim periodom 2π. Dakle,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R},$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}.$$

2.) $f_1(x) = \operatorname{tg} x$ i $f_2(x) = \operatorname{ctg} x$ su periodične funkcije s temeljnim periodom π. Dakle,

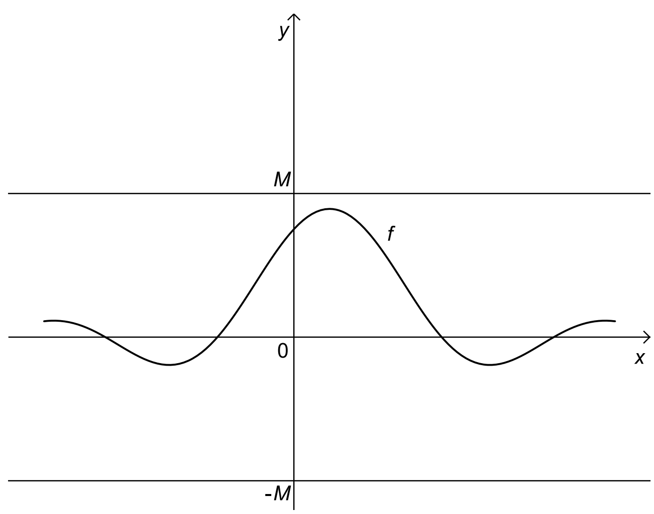
$$\operatorname{tg}\,(x + \pi) = \operatorname{tg}\, x \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$\operatorname{ctg}\,(x + \pi) = \operatorname{ctg}\, x \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Omeđenost

Kažemo da je funkcija f *omeđena* ako postoji realan broj $M > 0$ tako da je $|f(x)| \leq M$ za sve $x \in \mathcal{D}(f)$.

Geometrijsko značenje omeđenosti funkcije je u tome da se njen graf nalazi između pravaca $y = -M$ i $y = M$.



Slika 22: Graf omeđene funkcije

Primjer 7.

1.) $f(x) = \sin x$ je omeđena funkcija na $\mathbb{R}$ budući da je $|f(x)| = |\sin x| \leq 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

2.) $f(x) = 2x + 5$ nije omeđena funkcija na $\mathbb{R}$.

3.) $f(x) = 2x + 5$ je omeđena na segmentu $[-2, 1]$.
Naime, $|f(x)| = |2x + 5| \leq 7$ za sve $x \in [-2, 1]$.

Monotonost

Funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ je *monotono rastuća* na skupu S ako za sve $x_1, x_2 \in S$ takve da je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ je *monotono padajuća* na skupu S ako za sve $x_1, x_2 \in S$ takve da je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ je *monotona* na skupu S ako je monotono rastuća ili monotono padajuća na S.

Funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ je *strogo rastuća* na skupu S ako za sve $x_1, x_2 \in S$ takve da je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ je *strogo padajuća* na skupu S ako za sve $x_1, x_2 \in S$ takve da je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ je *strogo monotona* na skupu S ako je strogo rastuća ili strogo padajuća na S.

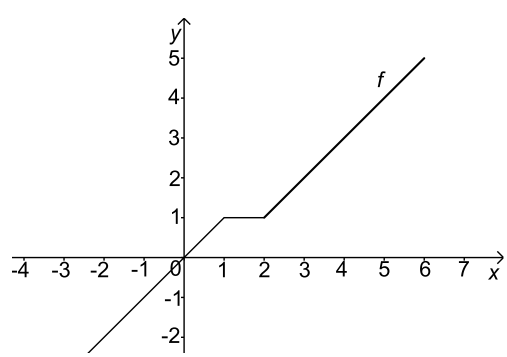
Napomena. Ove pojmove uglavnom ćemo upotrebljavati kada je S interval.

Primjer 8.

1.) $f(x) = x^2$ je strogo padajuća na $(-\infty, 0]$ i strogo rastuća na $[0, \infty)$.

2.) $f(x) = e^x$ je strogo rastuća na $\mathbb{R}$.

3.) $f(x) = \begin{cases} x & \text{ako je } x \leq 1 \\ 1 & \text{ako je } 1 < x \leq 2 \\ x - 1 & \text{ako je } x > 2 \end{cases}$ je monotono rastuća na $\mathbb{R}$.



Slika 23: Graf funkcije f

Uočimo da iz same definicije stroge monotonosti slijedi da su strogo monotone funkcije injektivne.

Prema tome, ako je $f : S \to \mathbb{R}$ strogo monotona funkcija, tada je $f : S \to Im(f)$ bijekcija. Stoga postoji inverzno preslikavanje $f^{-1} : Im(f) \to S$. Pritom vrijede sljedeće tvrdnje.

(a) *Ako je funkcija f strogo rastuća na S, tada je funkcija f^{-1} strogo rastuća na $Im(f)$.*

(b) *Ako je funkcija f strogo padajuća na S, tada je funkcija f^{-1} strogo padajuća na $Im(f)$.*

4.3 Popis elementarnih funkcija i njihovi grafovi

U *osnovne elementarne funkcije* ubrajamo polinome, racionalne funkcije, eksponencijalne funkcije, logaritamske funkcije, opće potencije, trigonometrijske funkcije i ciklometrijske funkcije.

Elementarnim funkcijama nazivamo funkcije koje se mogu dobiti iz osnovnih elementarnih funkcija konačnim brojem osnovnih aritmetičkih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje), te konačnim brojem kompozicija osnovnih elementarnih funkcija.

U daljnjem iznosimo osnovna svojstva nekih osnovnih elementarnih funkcija i skiciramo njihove grafove.

Opća potencija

Funkciju zadanu formulom $f(x) = x^r$ $(r \in \mathbb{R})$ nazivamo *općom potencijom.*

Područje definicije takve funkcije ovisit će o broju r.

Promotrimo pobliže takve funkcije za neke posebne r.

(a) $r = 1$

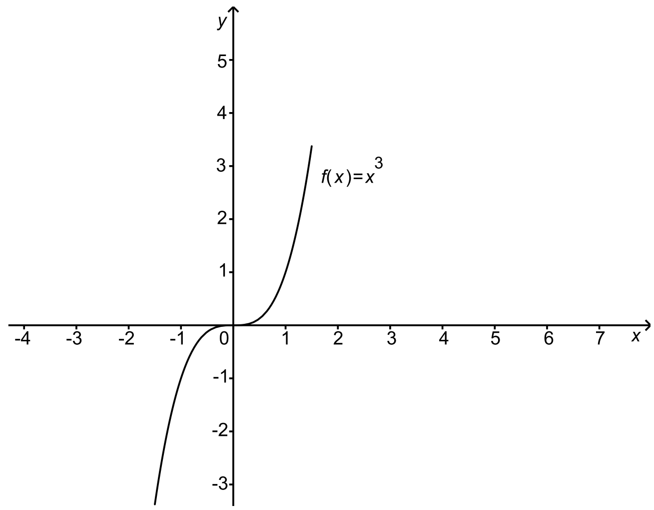
Funkciju $f(x) = x$ nazivamo *identitetom.* Njena domena i slika su skup $\mathbb{R}$ realnih brojeva. Funkcija je neparna i strogo rastuća na $\mathbb{R}$. Njezin graf je pravac (simetrala prvog i trećeg kvadranta).

(b) $r = 2$

Domena funkcije $f(x) = x^2$ je skup $\mathbb{R}$, a slika interval $[0, \infty)$. Ova funkcija je parna. Ona je strogo padajuća na intervalu $(-\infty, 0]$, te strogo rastuća na intervalu $[0, \infty)$. Graf kvadratne funkcije f je parabola s tjemenom u ishodištu i otvorom prema gore.

(c) $r = 3$

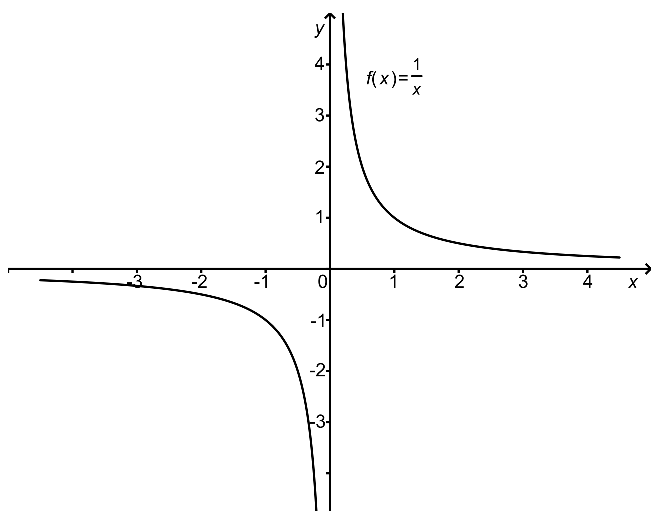
Domena i slika kubne funkcije $f(x) = x^3$ je skup $\mathbb{R}$. Ova funkcija je neparna i strogo rastuća na $\mathbb{R}$.



Slika 24: Graf funkcije $f(x) = x^3$

(d) $r = -1$

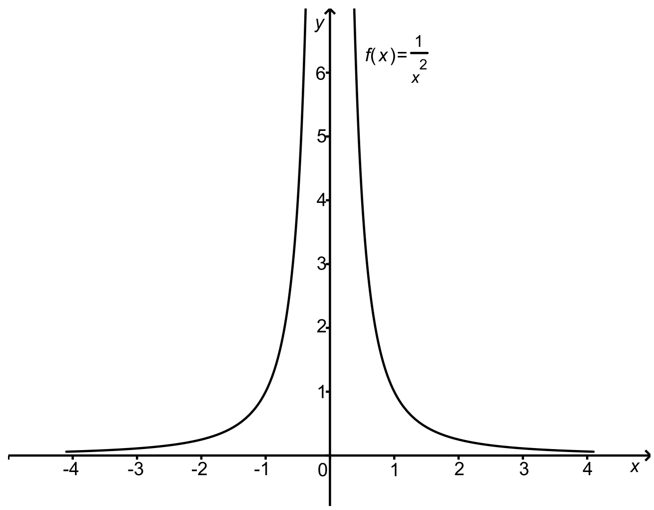
Domena i slika funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x}$ je skup $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ova funkcija je neparna. Ona je strogo padajuća na intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$.



Slika 25: Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$

(e) $r = -2$

Domena funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ je skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a njena slika je interval $(0, \infty)$. Ova funkcija je parna. Ona je strogo rastuća na $(-\infty, 0)$ i strogo padajuća na $(0, \infty)$.



Slika 26: Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$

(f) $r = \frac{1}{2}$

Restringiramo li funkciju $g(x) = x^2$ na interval $[0, \infty)$ dobit ćemo funkciju $g|_{[0,\infty)} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ koja bijektivno preslikava interval $[0, \infty)$ na $[0, \infty)$.

Stoga $g|_{[0,\infty)}$ ima inverznu funkciju koju označavamo s $f(x) = \sqrt{x}$.
Domena i slika funkcije f je interval $[0, \infty)$.
Funkcija f ima nultočku $c = 0$.
Vrijedi

$$(f \circ g|_{[0,\infty)})(x) = x \quad \text{za sve } x \in \mathcal{D}(g|_{[0,\infty)}) = [0, \infty),$$
$$(g|_{[0,\infty)} \circ f)(x) = x \quad \text{za sve } x \in \mathcal{D}(f) = [0, \infty),$$

odnosno

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{za sve } x \in [0, \infty),$$
$$(\sqrt{x})^2 = x \quad \text{za sve } x \in [0, \infty).$$

Funkcija f je strogo rastuća na $[0, \infty)$ jer je to inverzna funkcija strogo rastuće funkcije $g|_{[0,\infty)}$.

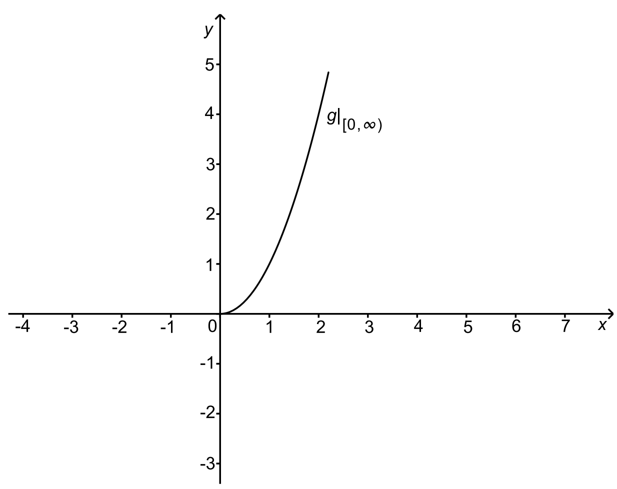
Graf funkcije f dobiva se iz grafa funkcije $g|_{[0,\infty)}$ simetrijom s obzirom na pravac $y = x$.

(g) $r = \frac{1}{3}$

Funkcija $g(x) = x^3$ je bijekcija sa skupa $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, pa stoga ima inverznu funkciju koju označavamo s $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Domena i slika funkcije f je skup $\mathbb{R}$.
Funkcija f ima nultočku $c = 0$.
Vrijedi

$$(f \circ g)(x) = x \quad \text{za sve } x \in \mathcal{D}(g) = \mathbb{R},$$



Slika 27: Graf funkcije $g(x) = x^2$ na intervalu $[0, \infty)$

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{za sve } x \in \mathcal{D}(f) = \mathbb{R},$$

odnosno

$$\sqrt[3]{x^3} = x \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R},$$
$$(\sqrt[3]{x})^3 = x \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija f je neparna.

Funkcija f je strogo rastuća na $\mathbb{R}$ jer je to inverzna funkcija strogo rastuće funkcije g.

Graf funkcije f dobiva se iz grafa funkcije g simetrijom s obzirom na pravac $y = x$.

Polinomi

Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

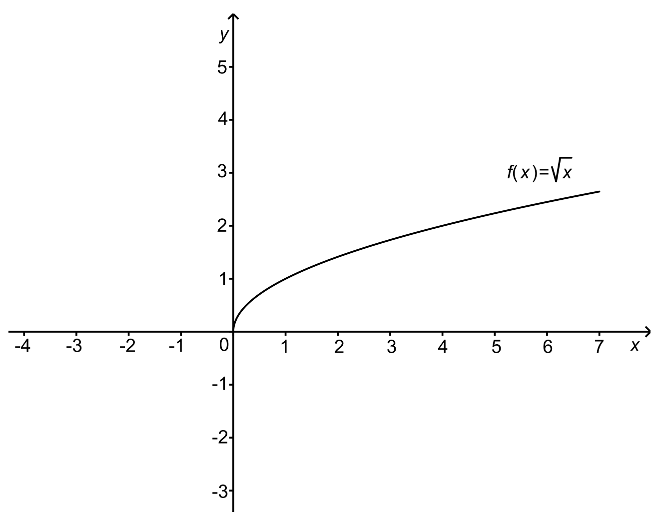
gdje je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, te $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ nazivamo *polinomom*.

Ako je $a_n \neq 0$, tada je f polinom n-tog stupnja.

Brojeve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazivamo *koeficijentima* polinoma f.

Uočimo da je domena polinoma cijeli skup $\mathbb{R}$.

Promotrimo sada polinome nultog, prvog i drugog stupnja.



Slika 28: Graf funkcije $f(x) = \sqrt{x}$

Polinom $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ nultog stupnja nazivamo *konstantnim polinomom* ili *konstantom*. Graf polinoma nultog stupnja je pravac paralelan s osi x.

Polinom $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ prvog stupnja zove se *linearna* (*afina*) *funkcija*.

Graf polinoma prvog stupnja je pravac. Pritom, ako je $a > 0$, funkcija f je strogo rastuća na $\mathbb{R}$, dok je za $a < 0$ funkcija f strogo padajuća na $\mathbb{R}$.

Polinom $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ drugog stupnja zove se *kvadratna funkcija*.

Graf ovog polinoma je parabola s tjemenom $T(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$.

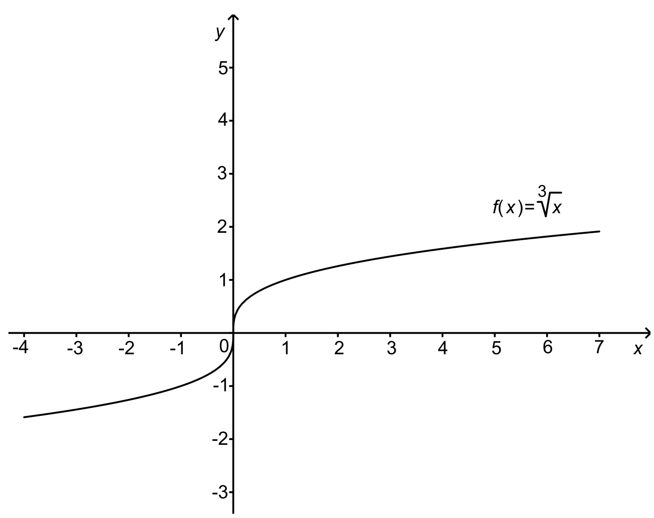
Ako je $a > 0$ parabola ima otvor prema gore, pa je $Im(f) = [\frac{4ac-b^2}{4a}, \infty)$. Tada je funkcija f strogo padajuća na $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ i strogo rastuća na $[-\frac{b}{2a}, \infty)$.

Ako je $a < 0$ parabola ima otvor prema dolje, pa je $Im(f) = (-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$. Tada je funkcija f strogo rastuća na $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ i strogo padajuća na $[-\frac{b}{2a}, \infty)$.

Ako je $b^2 - 4ac > 0$, tada funkcija f ima dvije nultočke: $c_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ i $c_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Ako je $b^2 - 4ac = 0$, tada funkcija f ima jednu nultočku $c = -\frac{b}{2a}$.

U slučaju $b^2 - 4ac < 0$ funkcija f nema nultočaka.



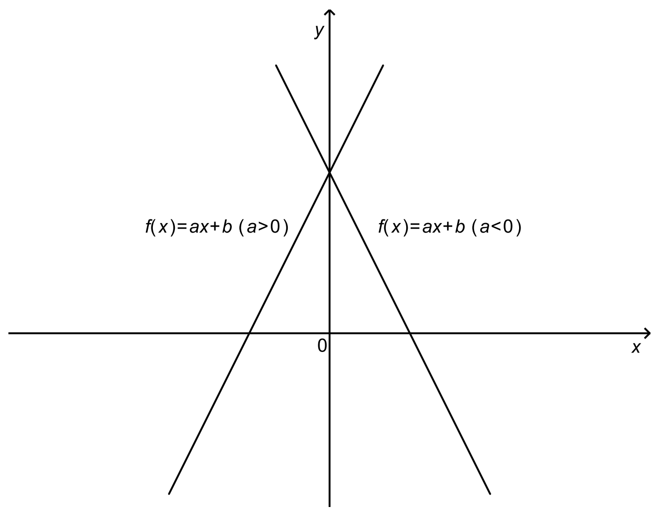
Slika 29: Graf funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Eksponencijalna funkcija

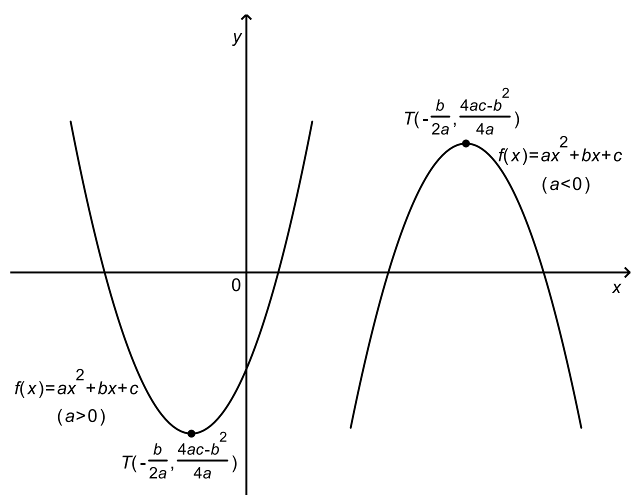
Eksponencijalna funkcija je funkcija oblika

$$f(x) = a^x \quad (a > 0,\, a \neq 1).$$

Domena eksponencijalne funkcije je skup $\mathbb{R}$, a slika interval $(0, \infty)$. Eksponencijalna funkcija nema nultočaka.

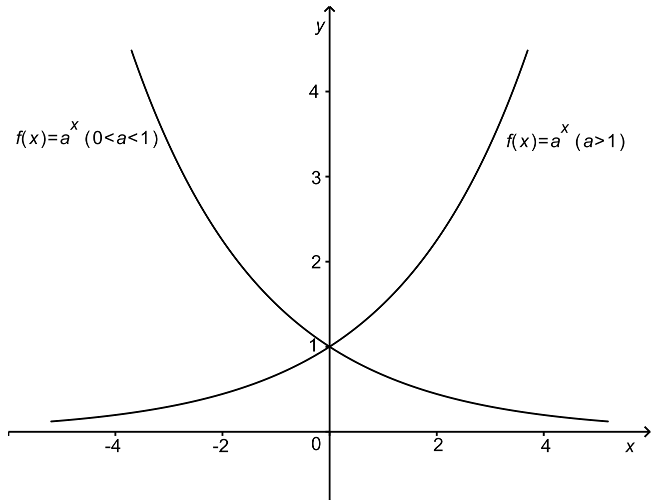


Slika 30: Graf funkcije $f(x) = ax + b$



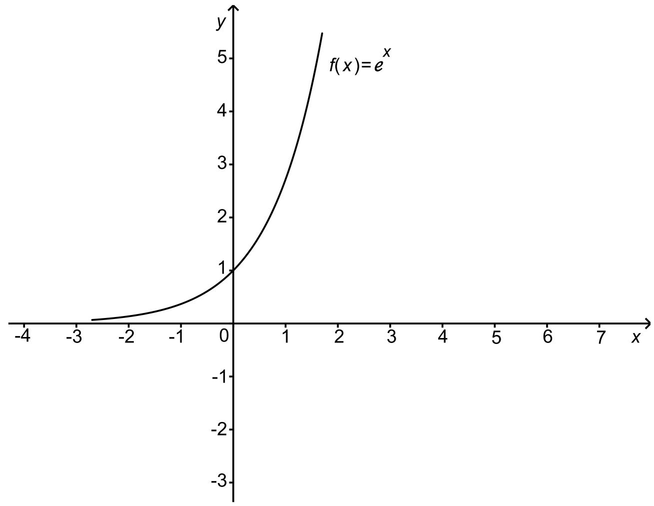
Slika 31: Graf funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$

Ako je $a > 1$, onda je f strogo rastuća funkcija na $\mathbb{R}$.
Ako je $0 < a < 1$, onda je f strogo padajuća funkcija na $\mathbb{R}$.



Slika 32: Graf funkcije $f(x) = a^x$

Posebno, za $a = e$ graf funkcije $f(x) = e^x$ izgleda ovako:



Slika 33: Graf funkcije $f(x) = e^x$

Logaritamska funkcija

Uočimo da je eksponencijalna funkcija $g(x) = a^x$ bijektivno preslikavanje sa skupa $\mathbb{R}$ na interval $(0, \infty)$. Stoga za nju postoji inverzno preslikavanje koje nazivamo *logaritamskom funkcijom* i označavamo s

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0,\, a \neq 1).$$

Domena logaritamske funkcije je interval $(0, \infty)$, a njena slika je cijeli skup $\mathbb{R}$. Ova funkcija ima nultočku $c = 1$.

Vrijedi

$(f \circ g)(x) = x \quad$ za sve $x \in \mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$,

$(g \circ f)(x) = x \quad$ za sve $x \in \mathcal{D}(f) = (0, \infty)$,

odnosno

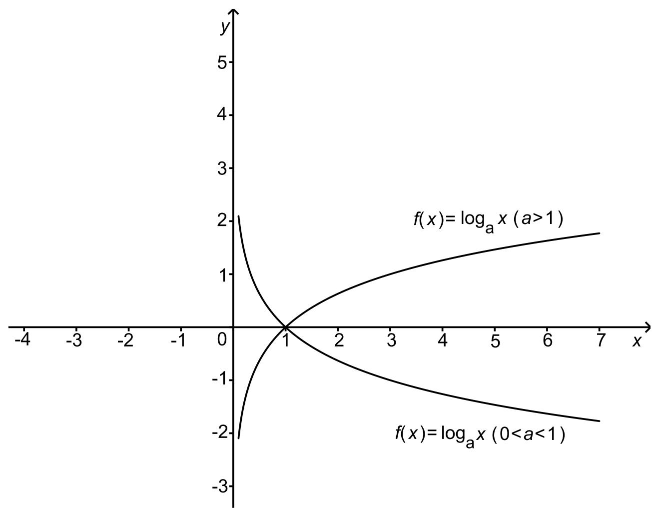
$\log_a a^x = x \quad$ za sve $x \in \mathbb{R}$,

$a^{\log_a x} = x \quad$ za sve $x \in (0, \infty)$.

Ako je $a >, 1$ onda je f strogo rastuća funkcija na $(0, \infty)$.

Ako je $0 < a < 1$, onda je f strogo padajuća funkcija na $(0, \infty)$.

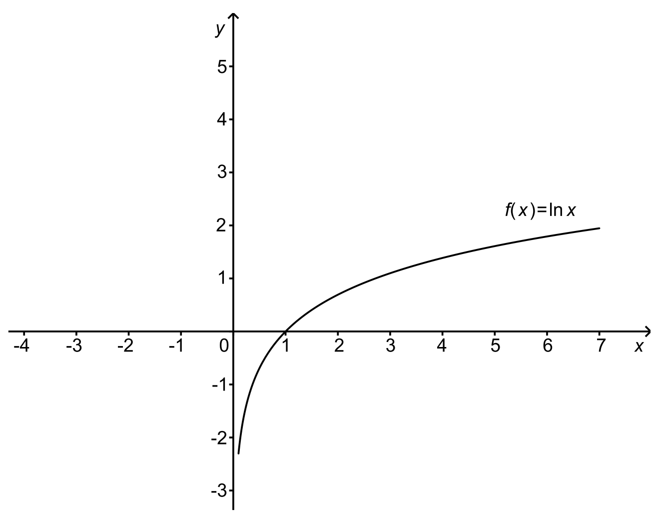
Graf funkcije f dobiva se iz grafa funkcije g simetrijom s obzirom na pravac $y = x$.



Slika 34: Graf funkcije $f(x) = \log_a x$

Posebno, ako je $a = e$ uvodimo oznaku $\ln x = \log_e x$ i funkciju $f(x) = \ln x$ nazivamo *prirodnim logaritmom*.

Graf funkcije $f(x) = \ln x$ izgleda ovako:



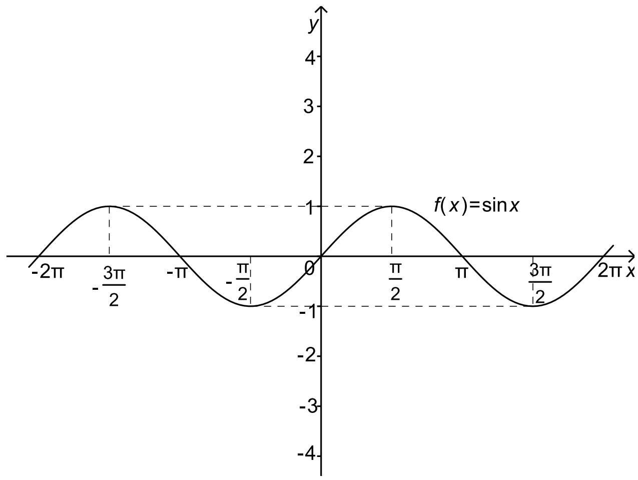
Slika 35: Graf funkcije $f(x) = \ln x$

Trigonometrijske funkcije

(a) Funkcija *sinus* $f(x) = \sin x$

Domena funkcije sinus je skup $\mathbb{R}$, a slika segment $[-1, 1]$.

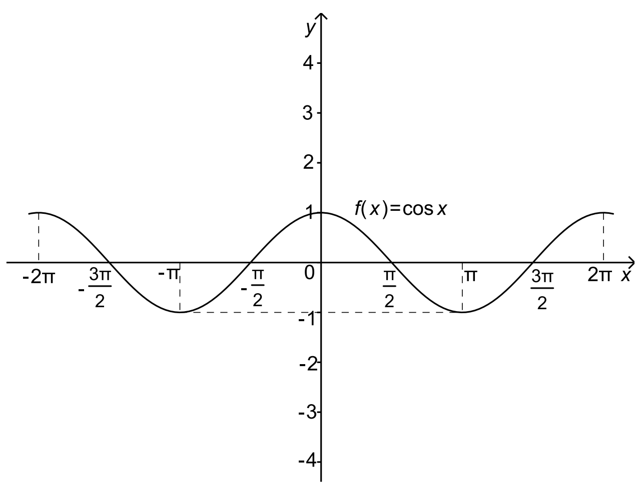
$N(f) = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Funkcija f je neparna.
Funkcija f je periodična s temeljnim periodom $T = 2\pi$.



Slika 36: Graf funkcije $f(x) = \sin x$

(b) Funkcija *kosinus* $f(x) = \cos x$

Domena funkcije kosinus je skup $\mathbb{R}$, a slika segment $[-1, 1]$.
$N(f) = \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Funkcija f je parna.
Funkcija f je periodična s temeljnim periodom $T = 2\pi$.



Slika 37: Graf funkcije $f(x) = \cos x$

(c) Funkcija *tangens* $f(x) = \operatorname{tg} x$ definira se formulom

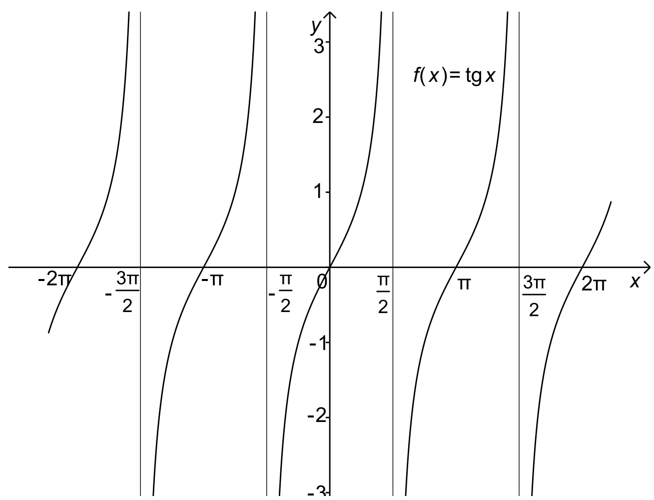
$$\operatorname{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Funkcija tangens dobro je definirana za sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je $\cos x \neq 0$. Stoga je njena domena skup $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Slika funkcije tangens je skup $\mathbb{R}$.

Funkcija tangens ima nultočke u točkama $x \in \mathbb{R}$ za koje je $\sin x = 0$. Dakle, $N(f) = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Funkcija f je neparna.

Funkcija f je periodična s temeljnim periodom $T = \pi$.



Slika 38: Graf funkcije $f(x) = \operatorname{tg} x$

(d) Funkcija *kotangens* $f(x) = \operatorname{ctg} x$ definira se formulom

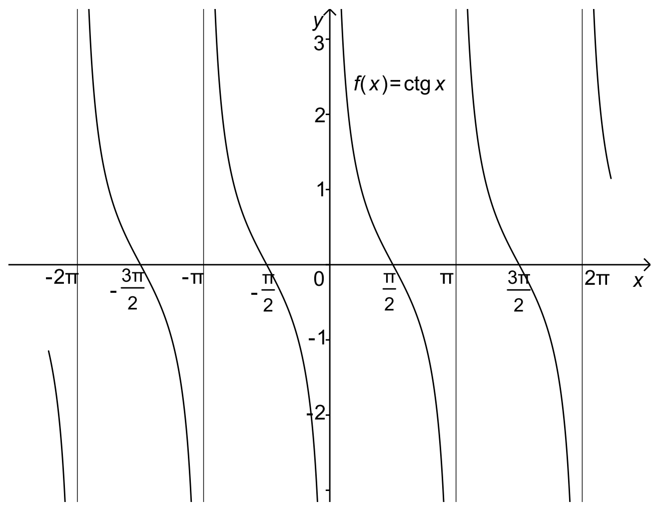
$$\operatorname{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkcija kotangens dobro je definirana za sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je $\sin x \neq 0$. Stoga je njena domena skup $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Slika funkcije kotangens je skup $\mathbb{R}$.

Funkcija kotangens ima nultočke u točkama $x \in \mathbb{R}$ za koje je $\cos x = 0$. Dakle, $N(f) = \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Funkcija f je neparna.

Funkcija f je periodična s temeljnim periodom $T = \pi$.

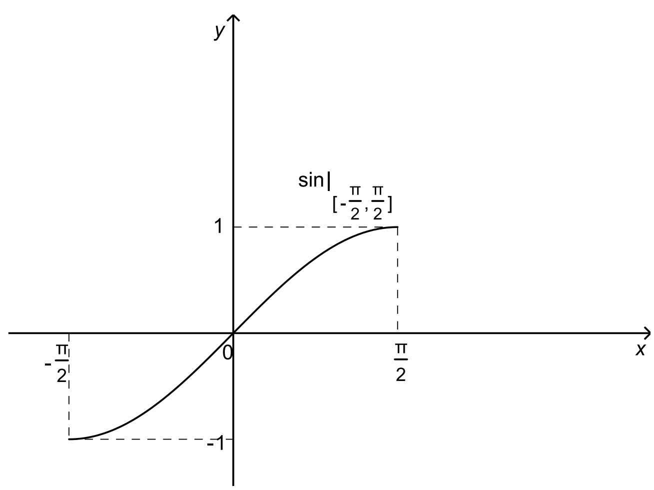


Slika 39: Graf funkcije $f(x) = \operatorname{ctg} x$

Ciklometrijske funkcije (arkus funkcije)

(a) Funkcija *arkus-sinus* $f(x) = \arcsin x$

Restringiramo li funkciju $x \mapsto \sin x$ na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dobit ćemo funkciju koja bijektivno preslikava interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ na $[-1, 1]$.



Slika 40: Graf funkcije sinus na segmentu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Stoga $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ ima inverznu funkciju koju označavamo s $f(x) = \arcsin x$.

Domena funkcije arkus-sinus je segment $[-1, 1]$, a njena slika je segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Funkcija arkus-sinus ima nultočku $c = 0$.

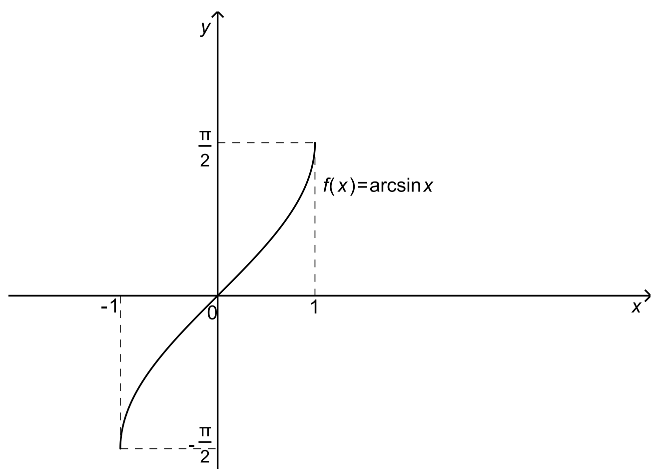
Vrijedi

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin x) &= x \quad \text{za sve } x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \\ \sin(\arcsin x) &= x \quad \text{za sve } x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Funkcija f je neparna.

Funkcija f je strogo rastuća na $[-1, 1]$ jer je to inverzna funkcija strogo rastuće funkcije $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$.

Graf funkcije f dobiva se iz grafa funkcije $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ simetrijom s obzirom na pravac $y = x$.

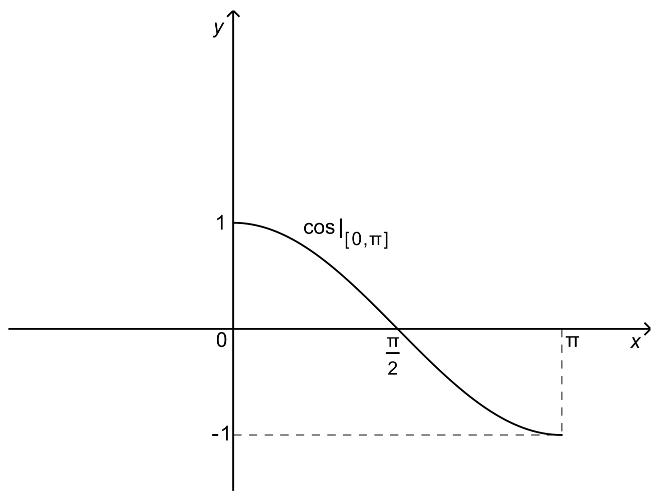


Slika 41: Graf funkcije $f(x) = \arcsin x$

(b) Funkcija *arkus-kosinus* $f(x) = \arccos x$

Restringiramo li funkciju $x \mapsto \cos x$ na interval $[0, \pi]$ dobit ćemo funkciju koja bijektivno preslikava interval $[0, \pi]$ na $[-1, 1]$.
Stoga $\cos|_{[0,\pi]}$ ima inverznu funkciju koju označavamo s $f(x) = \arccos x$.

Domena funkcije arkus-kosinus je segment $[-1, 1]$, a njena slika je segment $[0, \pi]$. Funkcija arkus-kosinus ima nultočku $c = 1$.



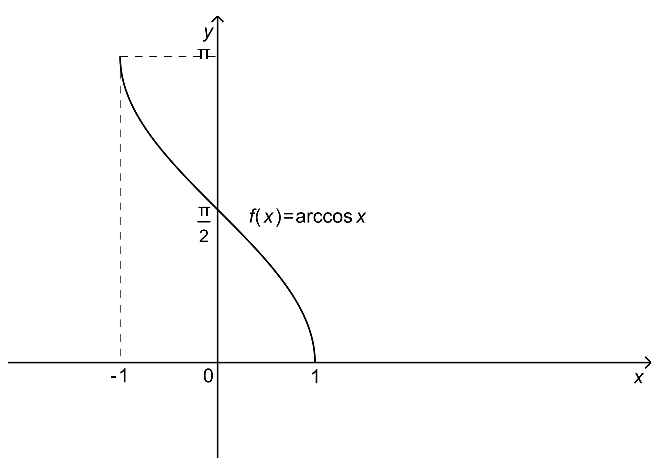
Slika 42: Graf funkcije kosinus na segmentu $[0, \pi]$

Vrijedi

$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{za sve } x \in [0, \pi],$$
$$\cos(\arccos x) = x \quad \text{za sve } x \in [-1, 1].$$

Funkcija f je strogo padajuća na $[-1, 1]$ jer je to inverzna funkcija strogo padajuće funkcije $\cos|_{[0,\pi]}$.

Graf funkcije f dobiva se iz grafa funkcije $\cos|_{[0,\pi]}$ simetrijom s obzirom na pravac $y = x$.



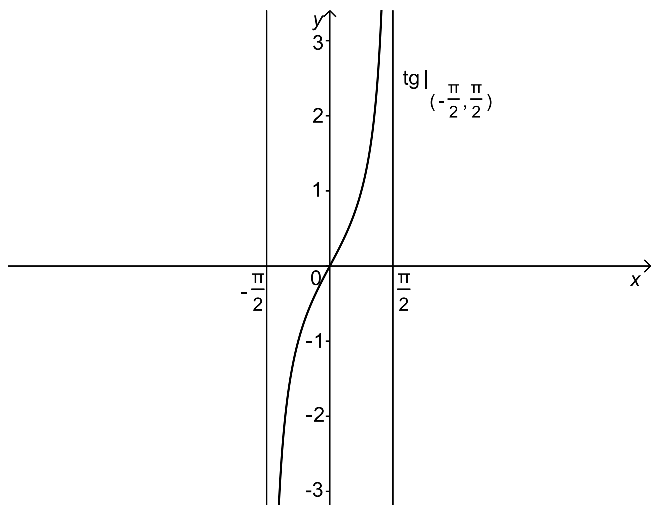
Slika 43: Graf funkcije $f(x) = \arccos x$

Funkcije arkus-sinus i arkus-kosinus vezane su relacijom

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1].$$

(c) Funkcija *arkus-tanges* $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Restringiramo li funkciju $x \mapsto \operatorname{tg} x$ na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dobit ćemo funkciju koja bijektivno preslikava interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na $\mathbb{R}$.



Slika 44: Graf funkcije tangens na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Stoga $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ ima inverznu funkciju koju označavamo s $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Domena funkcije arkus-tangens je skup $\mathbb{R}$, a njena slika je interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Funkcija arkus-tangens ima nultočku $c = 0$.

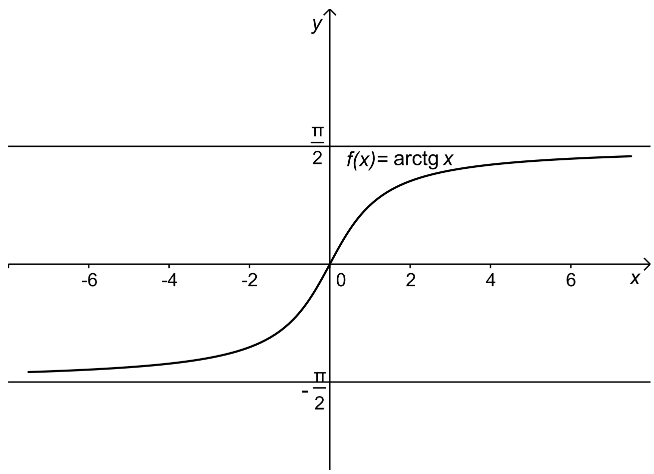
Vrijedi

$$\begin{aligned} &\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \text{za sve } x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}),\\ &\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Funkcija f je neparna.

Funkcija f je strogo rastuća na $\mathbb{R}$ jer je to inverzna funkcija strogo rastuće funkcije $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$.

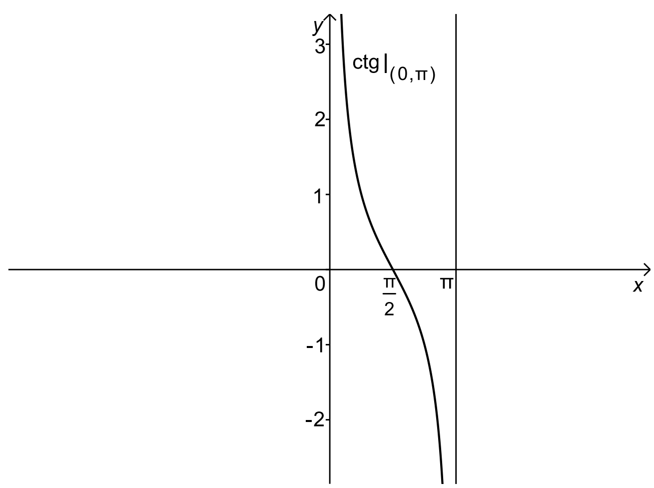
Graf funkcije f dobiva se iz grafa funkcije $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ simetrijom s obzirom na pravac $y = x$.



Slika 45: Graf funkcije $f(x) = \text{arctg } x$

(d) Funkcija *arkus-kotanges* $f(x) = \text{arcctg } x$

Restringiramo li funkciju $x \mapsto \text{ctg } x$ na interval $(0, \pi)$ dobit ćemo funkciju koja bijektivno preslikava interval $(0, \pi)$ na $\mathbb{R}$.



Slika 46: Graf funkcije kotanges na intervalu $(0, \pi)$

Stoga $\text{ctg }|_{(0,\pi)}$ ima inverznu funkciju koju označavamo s $f(x) = \text{arcctg } x$.

Domena funkcije arkus-kotanges je skup $\mathbb{R}$, a njena slika je interval $(0, \pi)$.

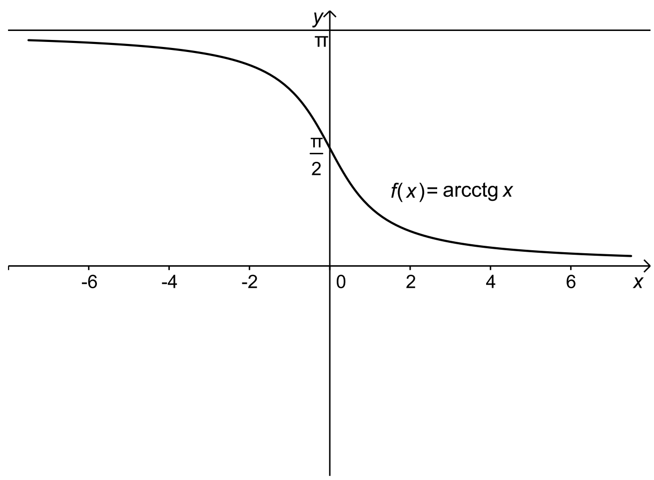
Ova funkcija nema nultočaka.

Vrijedi

$$\text{arcctg}\,(\text{ctg}\,x) = x \quad \text{za sve } x \in (0, \pi),$$
$$\text{ctg}\,(\text{arcctg}\,x) = x \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija f je strogo padajuća na $\mathbb{R}$ jer je to inverzna funkcija strogo padajuće funkcije ctg $|_{(0,\pi)}$.

Graf funkcije f dobiva se iz grafa funkcije ctg $|_{(0,\pi)}$ simetrijom s obzirom na pravac $y = x$.



Slika 47: Graf funkcije $f(x) = \text{arcctg}\ x$

Funkcije arkus-tangens i arkus-kotangens vezane su relacijom

$$\text{arctg}\ x + \text{arcctg}\ x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5 Limes funkcije

5.1 Pojam limesa

Neka je f realna funkcija realne varijable. Želimo proučiti ponašanje funkcije f u okolini neke točke $c \in \mathbb{R}$ za koju vrijedi sljedeće: postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je $(c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\} \subseteq \mathcal{D}(f)$. Prema tome, funkcija f je definirana u svakoj točki intervala $(c-\delta, c+\delta)$, osim možda u točki c.

Zanima nas što možemo reći o vrijednostima $f(x)$ koje funkcija f poprima na skupu $(c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ kada je δ "mali" broj, odnosno kada se varijabla x "približava" broju c. Ako vrijednosti funkcije $f(x)$ pripadaju proizvoljno maloj okolini broja $L \in \mathbb{R}$ čim su vrijednosti argumenta x dovoljno blizu broju c, tada kažemo da funkcija f ima *limes* L u točki c.

Preciznije, pojam limesa definira se ovako.

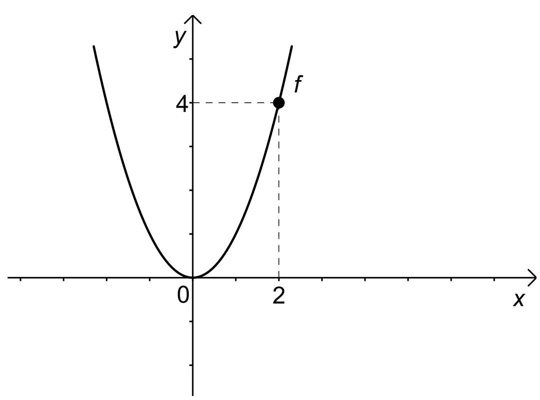
Za realan broj L kažemo da je *limes* funkcije f u točki $c \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $(c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\} \subseteq \mathcal{D}(f)$, te da iz $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ slijedi $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Tada pišemo $L = \lim_{x \to c} f(x)$ (ili $f(x) \to L$ kada $x \to c$) i kažemo da $f(x)$ *teži* (*konvergira*) prema L kada x teži prema c.

Ako funkcija f ima limes u točki $c \in \mathbb{R}$, tada je on jedinstven.

Primjer 1.

1.) $f(x) = x^2$



Slika 48: Limes funkcije f u točki $c = 2$

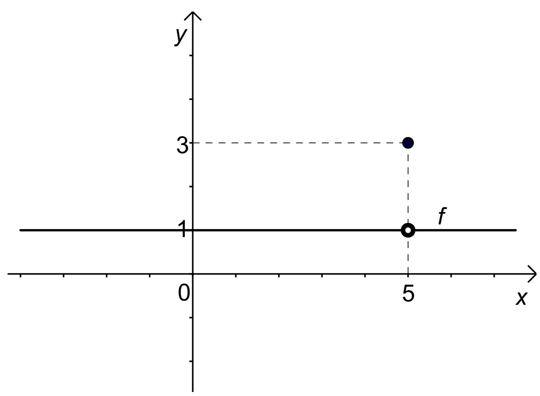
Tada je $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$.

Uočimo da je $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

2.) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x \neq 5, \\ 3 & \text{ako je } x = 5. \end{cases}$

Tada je $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \lim\limits_{x\to 5} 1 = 1$.

Uočimo da je $\lim\limits_{x\to 5} f(x) \neq f(5)$.



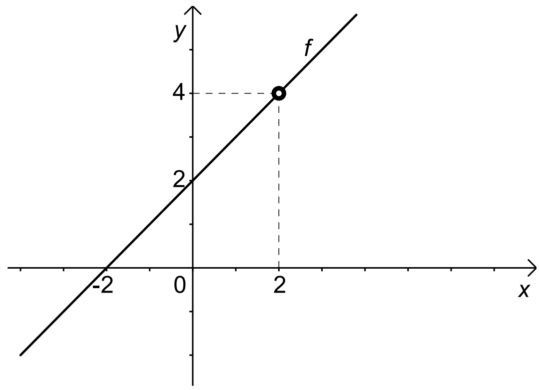
Slika 49: Limes funkcije f u točki $c = 5$

3.) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

Uočimo da $2 \notin \mathcal{D}(f)$, te da je

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2, \quad x \neq 2.$$

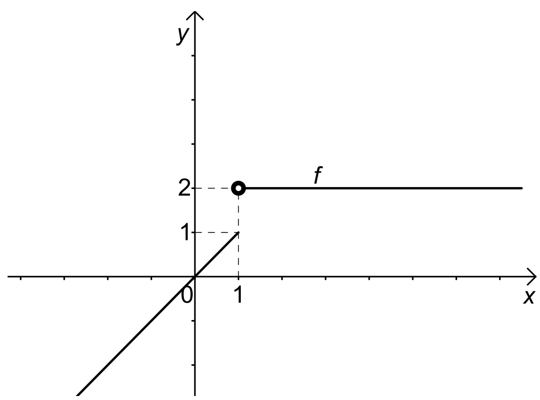
Tada je $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$.



Slika 50: Limes funkcije f u točki $c = 2$

4.) $f(x) = \begin{cases} x & \text{ako je } x \leq 1, \\ 2 & \text{ako je } x > 1. \end{cases}$

Tada ne postoji $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.



Slika 51: Ne postoji limes funkcije f u točki $c = 1$.

Limes u beskonačnosti i beskonačni limes

Dodamo li skupu $\mathbb{R}$ dva istaknuta elementa $-\infty$ i ∞, tj. uvedemo li skup $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, dobivamo niz mogućnosti za poopćenje pojma limesa funkcije.

Limes u beskonačnosti

Za realan broj L kažemo da je *limes* ili *granična vrijednost* funkcije f u točki ∞ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $M > 0$ tako da je $(M, \infty) \subseteq \mathcal{D}(f)$, te da iz $x > M$ slijedi $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

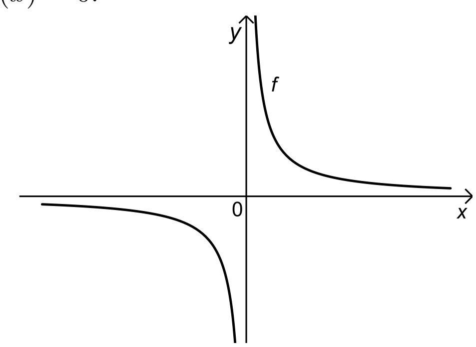
Pišemo $L = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ (ili $f(x) \to L$ kada $x \to \infty$).

Drugim riječima, $L \in \mathbb{R}$ je limes funkcije f u točki ∞ ako vrijednosti funkcije $f(x)$ pripadaju proizvoljno maloj okolini broja L čim su vrijednosti argumenta x dovoljno velike.

Primjer 2.

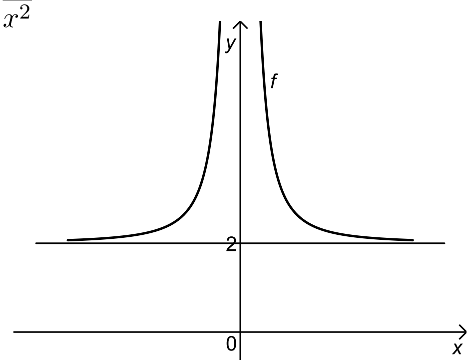
1.) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Tada je $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.



Slika 52: Limes funkcije f u točki $c = \infty$

2.) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2}$



Slika 53: Limes funkcije f u točki $c = \infty$

Tada je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$.

Slično se definira limes funkcije f u točki $-\infty$.

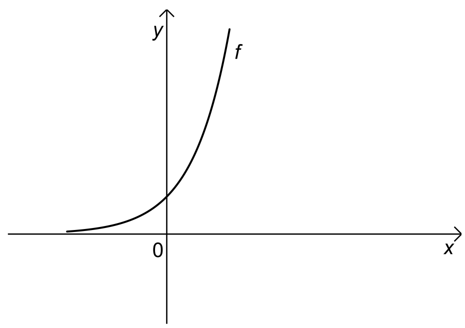
Realan broj L je *limes* funkcije f u točki $-\infty$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $m < 0$ tako da je $(-\infty, m) \subseteq \mathcal{D}(f)$, te da iz $x < m$ slijedi $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Pišemo: $L = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (ili $f(x) \to L$ kada $x \to -\infty$).

Primjer 3.

1.) $f(x) = e^x$

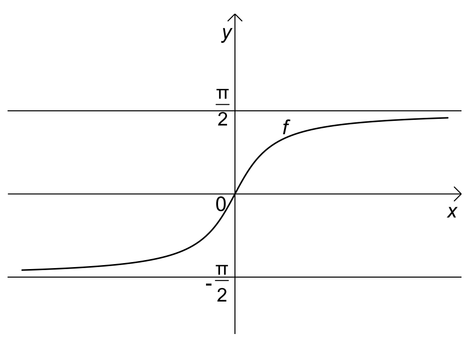
Tada je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.



Slika 54: Limes funkcije f u točki $c = -\infty$

2.) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Tada je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.



Slika 55: Limes funkcije f u točki $c = -\infty$

Beskonačni limes

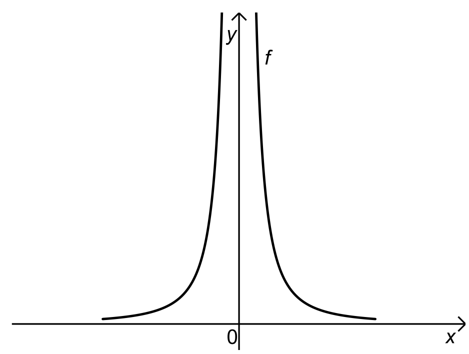
Kažemo da funkcija f ima *beskonačni limes* ∞ u točki $c \in \mathbb{R}$ ako za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $(c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\} \subseteq \mathcal{D}(f)$, te da iz $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ slijedi $f(x) > M$.

Pišemo: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ (ili $f(x) \to \infty$ kada $x \to c$).

Primjer 4.

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Tada je $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$.



Slika 56: Limes funkcije f u točki $c = 0$

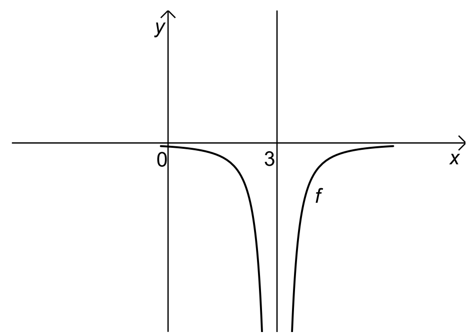
Kažemo da funkcija f ima *beskonačni limes* $-\infty$ u točki $c \in \mathbb{R}$ ako za svaki $m < 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $(c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\} \subseteq \mathcal{D}(f)$, te da iz $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ slijedi $f(x) < m$.

Pišemo: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$ (ili $f(x) \to -\infty$ kada $x \to c$).

Primjer 5.

$f(x) = -\dfrac{1}{(x-3)^2}$

Tada je $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty$.



Slika 57: Limes funkcije f u točki $c = 3$

Analogno bismo uveli sljedeće *beskonačne limese u beskonačnosti*:

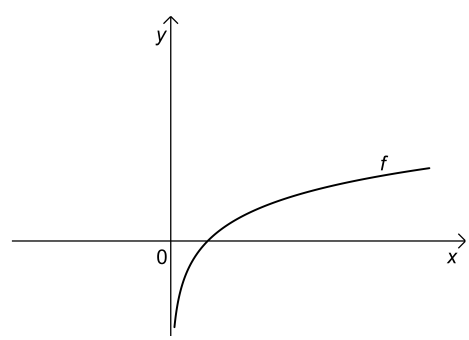
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Primjer 6.

1.) $f(x) = \ln x$

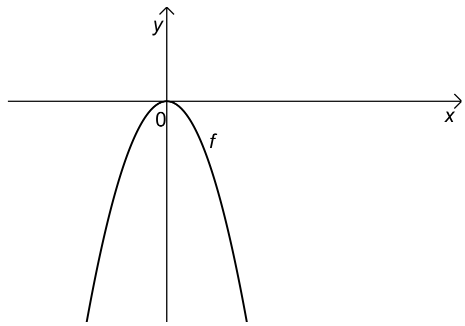
Tada je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.



Slika 58: Limes funkcije f u točki $c = \infty$

2.) $f(x) = -x^2$

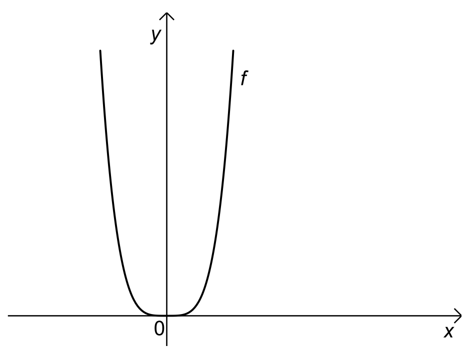
Tada je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.



Slika 59: Limes funkcije f u točki $c = \pm\infty$

3.) $f(x) = x^4$

Tada je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.



Slika 60: Limes funkcije f u točki $c = \pm\infty$

Svojstva limesa

(a) *Neka je* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ *i* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$, *gdje je* $c \in \overline{\mathbb{R}}$. *Tada vrijedi:*

$$\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L_1 + L_2,$$

$$\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = L_1 - L_2,$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = L_1 L_2,$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad \textit{ako je } L_2 \neq 0,$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)^{g(x)}) = L_1^{L_2}, \quad \textit{ako je } L_1 > 0.$$

(b) *Neka je* $\lim_{x\to c} f(x) = L \in \mathbb{R}$ *i* $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, *gdje je* $c \in \overline{\mathbb{R}}$. *Tada vrijedi*:

$$\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = \infty,$$

$$\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = \infty, \quad \textit{ako je } L > 0,$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = -\infty, \quad \textit{ako je } L < 0,$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)^{g(x)}) = 0, \quad \textit{ako je } |L| < 1,$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)^{g(x)}) = \infty, \quad \textit{ako je } L > 1,$$

$$\lim_{x\to c}(g(x)^{f(x)}) = \infty, \quad \textit{ako je } L > 0,$$

$$\lim_{x\to c}(g(x)^{f(x)}) = 0, \quad \textit{ako je } L < 0.$$

(c) *Neka je* $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ *i* $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, *gdje je* $c \in \overline{\mathbb{R}}$. *Tada vrijedi*:

$$\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = \infty,$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = \infty,$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)^{g(x)}) = \infty.$$

Tvrdnje navedene pod (b) i (c) simbolički redom zapisujemo ovako:

$$L + \infty = \infty, \quad \text{ako je } L \in \mathbb{R},$$

$$L - \infty = -\infty, \quad \text{ako je } L \in \mathbb{R},$$

$$L \cdot \infty = \infty, \quad \text{ako je } L > 0,$$

$$L \cdot \infty = -\infty, \quad \text{ako je } L < 0,$$
$$\frac{L}{\infty} = 0, \quad \text{ako je } L \in \mathbb{R},$$
$$L^{\infty} = 0, \quad \text{ako je } |L| < 1,$$
$$L^{\infty} = \infty, \quad \text{ako je } L > 1,$$
$$\infty^{L} = \infty, \quad \text{ako je } L > 0,$$
$$\infty^{L} = 0, \quad \text{ako je } L < 0,$$
$$\infty + \infty = \infty,$$
$$\infty \cdot \infty = \infty,$$
$$\infty^{\infty} = \infty.$$

(d) *Neka je* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L > 0$, *gdje je* $c \in \mathbb{R}$. *Neka postoji* $\delta > 0$ *tako da je* $g(x) > 0$ *za sve* $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$, *te neka je* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$. *Tada je*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

(e) *Neka je* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$, *gdje je* $c \in \mathbb{R}$. *Neka postoji* $\delta > 0$ *tako da je* g *omeđena na skupu* $(c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$. *Tada je*

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0.$$

Tvrdnje (d) i (e) mogu se iskazati i u slučaju kada je $c = \infty$ ili $c = -\infty$.

Primjer 7.

Koristeći svojstva limesa izračunati sljedeće limese:

1.) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-1}{x-2} = \dfrac{(-3)^2-1}{-3-2} = -\dfrac{8}{5}$

2.) $\lim\limits_{x\to 2} (x+5)\sqrt{x} = (2+5)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

3.) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin 4}{4}$

4.)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(2x^3-4x^2-7x+6) &= \lim_{x\to\infty} 2x^3\Big(1-\frac{2}{x}-\frac{7}{2x^2}+\frac{3}{x^3}\Big)\\ &= \infty\cdot(1-0-0+0)\\ &= \infty\cdot 1 = \infty\end{aligned}$$

5.) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-4x^2-7x+6) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3\Big(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{7}{2x^2}+\dfrac{3}{x^3}\Big)$
$= -\infty\cdot(1+0-0-0)$
$= -\infty\cdot 1 = -\infty$

6.) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\sin x\right) = (0\cdot\text{omeđeno}) = 0$

7.) $\lim\limits_{x\to\infty}(3^{-x}\cos x) = (0\cdot\text{omeđeno}) = 0$

Oblici

$$\frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0},\quad \infty-\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad 1^{\infty},\quad 0^0,\quad \infty^0$$

su neodređeni.

Važno je zapamtiti sljedeće limese:

1.) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1,$

2.) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x = e^k \quad (k\in\mathbb{R}),$

3.) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x = e^k \quad (k\in\mathbb{R}),$

4.) $\lim\limits_{x\to0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k \quad (k\in\mathbb{R}).$

Neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$

Limes racionalne funkcije

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

oblika $\frac{\infty}{\infty}$ računamo tako da brojnik i nazivnik podijelimo s najvećom potencijom polinoma u brojniku ili nazivniku.

Primjer 8.

1.) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-4x^3-7x+6}{2x^4+7x^3-x^2+1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$
$=$ (dijelimo brojnik i nazivnik s x^4)
$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-\frac{4}{x}-\frac{7}{x^3}+\frac{6}{x^4}}{2+\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = \dfrac{5}{2}$

$$
\begin{aligned}
2.)\ \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+6x-2}{x^3-4x^2+5x} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } x^2)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2}}{x-4+\frac{5}{x}} = \left(\frac{-3}{\infty}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3.)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-2x^2-2x+7}{2x^3-6x-1} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } x^3)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{2-\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x^3}}\\
&= \left(\frac{\infty}{2}\right) = \infty
\end{aligned}
$$

Primjer 9.

$$
\begin{aligned}
1.)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}-10} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } \sqrt{x})\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{10}{\sqrt{x}}} = \frac{2-0+0}{1-0} = 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-5x+2}}{4x+1} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } x)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}}}{4+\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt[3]{1-0+0}}{4+0} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Primjer 10.

$$
\begin{aligned}
1.)\ \lim_{x\to\infty}\frac{4^x-1}{9^x+2^x} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } 9^x)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^x-\frac{1}{9^x}}{1+\left(\frac{2}{9}\right)^x} = \frac{0-0}{1+0} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.)\ \lim_{x\to\infty}\frac{6\cdot 5^x+3^x+2}{3\cdot 5^x+2^x} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } 5^x)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{6+\left(\frac{3}{5}\right)^x+\frac{2}{5^x}}{3+\left(\frac{2}{5}\right)^x} = \frac{6+0+0}{3+0} = 2
\end{aligned}
$$

Neodređeni oblik $\dfrac{0}{0}$

Limes racionalne funkcije

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

oblika $\frac{0}{0}$ računamo tako da razlomak skratimo.

Primjer 11.

$$\begin{aligned}
1.)\ \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{x^2-1} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(x+1)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{x+1} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^3-8} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x^2+2x+4} = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

Primjer 12.

$$\begin{aligned}
1.)\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{3-\sqrt{x+9}} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{3-\sqrt{x+9}}\cdot\frac{3+\sqrt{x+9}}{3+\sqrt{x+9}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x(3+\sqrt{x+9})}{9-(x+9)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(3+\sqrt{x+9})}{-x}\\
&= -\lim_{x\to 0}(3+\sqrt{x+9}) = 6
\end{aligned}$$

Limese u sljedećem primjeru riješavamo koristeći poznati limes

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Primjer 13.

$$\begin{aligned}
1.)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3\right)\\
&= 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x} = 3\cdot 1 = 3
\end{aligned}$$

$$2.)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(5x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin(5x)}\cdot\frac{2}{5}\right)$$
$$= \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin(5x)} = \frac{2}{5}\cdot 1\cdot 1 = \frac{2}{5}$$

$$3.)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 4}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

$$4.)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x-\sin x}{x+\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$
$$= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } x)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{4-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = \frac{4-1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Neodređeni oblik $\infty - \infty$

Primjer 14.

$$1.)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = 0$$

$$2.)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right) = (\infty-\infty)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)\cdot\frac{\sqrt{4x^2+x}+2x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2+x)-4x^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$$
$$= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } x)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2} = \frac{1}{4}$$

$$
\begin{aligned}
3.)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}\right) &= (\infty-\infty)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x+1)-x^2(x-1)}{(x-1)(x+1)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}\\
&= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } x^2)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x^2}} = 2
\end{aligned}
$$

Neodređeni oblik 1^∞

Limese u sljedećem primjeru računamo koristeći poznati limes

$$
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k \quad (k\in\mathbb{R}).
$$

Primjer 15.

$$
\begin{aligned}
1.)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^x &= (1^\infty) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3}{x-1}-1\right)^x\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3-(x-1)}{x-1}\right)^x\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^x\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)\\
&= e^4\cdot 1 = e^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{5x+2}\right)^{3x+1} &= (1^\infty) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x}{5x+2}-1\right)^{3x+1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x-(5x+2)}{5x+2}\right)^{3x+1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{5x+2}\right)^{3x+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{5x+2}\right)^{(5x+2)\cdot\frac{3x+1}{5x+2}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{5x+2}\right)^{5x+2}\right]^{\frac{3x+1}{5x+2}} \\
&= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{5x+2}\right)^{5x+2}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{5x+2}} \\
&= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{5x+2}\right)^{5x+2}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{5+\frac{2}{x}}} \\
&= (e^{-2})^{\frac{3}{5}} = e^{-\frac{6}{5}}
\end{aligned}
$$

Jednostrani limesi

Neka je

$$\mathcal{D}(f) = (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \cdots \cup (a_n, b_n),$$

pri čemu su intervali (a_i, b_i) međusobno disjunktni. Tada točke a_i, b_i $(i = 1, \ldots, n)$ zovemo *rubnim točkama* domene funkcije f.

Da bismo proučili ponašanje funkcije blizu rubnih točaka njene domene, uvodimo pojam jednostranih limesa.

Za realan broj L kažemo da je *desni limes* funkcije f u točki $c \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $(c, c+\delta) \subseteq \mathcal{D}(f)$, te da iz $x \in (c, c+\delta)$ slijedi $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

U tom slučaju pišemo $L = \lim\limits_{x\to c+} f(x)$ i kažemo da $f(x)$ teži (konvergira) prema L kada x teži zdesna prema c.

Za realan broj L kažemo da je *lijevi limes* funkcije f u točki $c \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $(c-\delta, c) \subseteq \mathcal{D}(f)$, te da iz $x \in (c-\delta, c)$ slijedi $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

U tom slučaju pišemo $L = \lim\limits_{x\to c-} f(x)$ i kažemo da $f(x)$ teži (konvergira) prema L kada x teži slijeva prema c.

Primjer 16.

1.) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

Uočimo da je $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Stoga je 0 rubna točka domene funkcije f. Vrijedi

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0-}\frac{x}{-x} = \lim_{x\to 0-}(-1) = -1,$$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} 1 = 1.$

2.) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1}$

Ovdje je $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, pa je 1 rubna točka domene funkcije f. Vrijedi

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1} = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{0-} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2},$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1} = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{0+} = \operatorname{arctg} \infty = \dfrac{\pi}{2}.$

3.) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

Kako je $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, to je 0 rubna točka domene funkcije f. Vrijedi

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\infty} = 0,$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\infty} = 0.$

Prethodni primjeri nam pokazuju da (ukoliko postoje) lijevi i desni limes općenito ne moraju biti jednaki. Međutim, vrijede sljedeće tvrdnje.

Ako za funkciju f postoje lijevi i desni limes u točki $c \in \mathbb{R}$ i ako su oni jednaki, tj.

$$\lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x),$$

tada funkcija f ima limes u točki c, te vrijedi

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x).$$

Obratno, ako funkcija f ima limes u točki $c \in \mathbb{R}$, tada postoje i jednostrani limesi $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$, te vrijedi

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x).$$

Uočimo da za funkciju $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ iz prethodnog primjera ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; za funkciju $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ ne postoji $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, dok za funkciju $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ postoji limes u točki $x = 0$ i vrijedi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$

Beskonačni lijevi i desni limes definiramo ovako:

Kažemo da funkcija f ima *lijevi limes* ∞ u točki $c \in \mathbb{R}$ ako za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $(c-\delta, c) \subseteq \mathcal{D}(f)$, te da iz $x \in (c-\delta, c)$ slijedi $f(x) > M$.

Pišemo $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = \infty$.

Kažemo da funkcija f ima *desni limes* ∞ u točki $c \in \mathbb{R}$ ako za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $(c, c+\delta) \subseteq \mathcal{D}(f)$, te da iz $x \in (c, c+\delta)$ slijedi $f(x) > M$.

Pišemo $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = \infty$.

Kažemo da funkcija f ima *lijevi limes* $-\infty$ u točki $c \in \mathbb{R}$ ako za svaki $m < 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $(c-\delta, c) \subseteq \mathcal{D}(f)$, te da iz $x \in (c-\delta, c)$ slijedi $f(x) < m$.

Pišemo $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = -\infty$.

Kažemo da funkcija f ima *desni limes* $-\infty$ u točki $c \in \mathbb{R}$ ako za svaki $m < 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $(c, c+\delta) \subseteq \mathcal{D}(f)$, te da iz $x \in (c, c+\delta)$ slijedi $f(x) < m$.

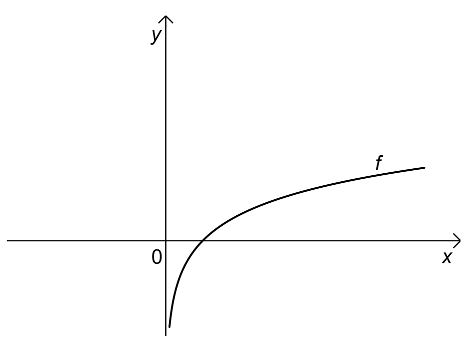
Pišemo $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = -\infty$.

Primjer 17.

1.) $f(x) = \ln x$

Kako je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$, to je 0 rubna točka domene funkcije f. Vrijedi $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$.

Uočimo da ne postoji $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ budući da funkcija f nije definirana za $x < 0$.



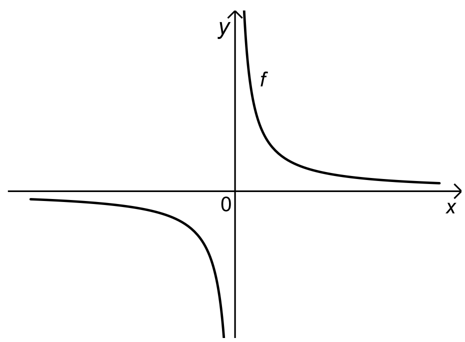
Slika 61: Desni limes funkcije f u točki $c = 0$

2.) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Ovdje je $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, pa je 0 rubna točka domene funkcije f. Vrijedi

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty,$

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = \infty.$



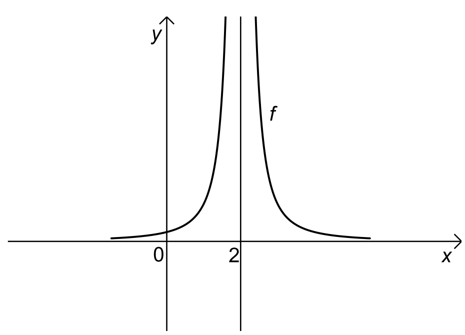
Slika 62: Lijevi i desni limes funkcije f u točki $c = 0$

3.) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

Kako je $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$, to je 2 rubna točka domene funkcije f. Vrijedi

$\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{1}{x} = \infty,$

$\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{1}{x} = \infty.$



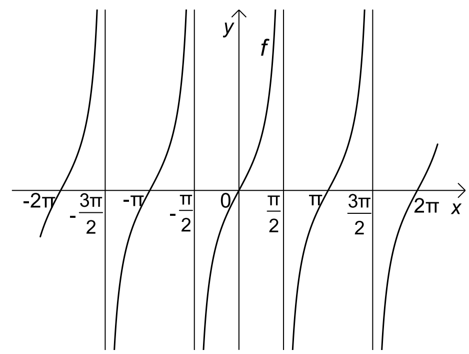
Slika 63: Lijevi i desni limes funkcije f u točki $c = 2$

4.) $f(x) = \text{tg } x$

Kako je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, to su $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, rubne točke domene funkcije f. Vrijedi

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \text{tg } x = \infty,$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \text{tg } x = -\infty.$



Slika 64: Lijevi i desni limes funkcije f u točki $c = \frac{\pi}{2}$

5.2 Neprekidne funkcije

Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ realna funkcija realne varijable, te neka je $c \in (a, b)$.

Kažemo da je funkcija f *neprekidna* u točki c ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaki $x \in (a, b)$, iz $|x - c| < \delta$ slijedi $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Iz definicije neprekidnosti slijedi da funkcija može biti neprekidna samo u točkama svoje domene.

Ako funkcija f nije neprekidna u točki c, tada kažemo da f ima *prekid* u točki c.

Pojam neprekidnosti može se opisati pomoću limesa, o čemu govori sljedeći rezultat.

Funkcija f je neprekidna u točki c ako i samo ako ima limes u točki c, te vrijedi

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Ako funkcija f ima prekid u točki c, tada razlikujemo sljedeće mogućnosti prekida.

(a) Ako je $\lim\limits_{x\to c-} f(x) \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to c+} f(x) \in \mathbb{R}$, te vrijedi

$$\lim_{x\to c-} f(x) \neq \lim_{x\to c+} f(x),$$

ili

$$\lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x) \neq f(c),$$

tada kažemo da funkcija f u točki c ima *prekid prve vrste.*

Pritom, ako je $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = \lim\limits_{x\to c+} f(x) \neq f(c)$, tj. ako postoji $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, ali je $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$, kažemo da je prekid u točki c *uklonjiv.*

Naime, u tom slučaju možemo predefinirati vrijednost funkcije u točki c, tj. staviti $f(c) := \lim\limits_{x\to c} f(x)$ i dobiti neprekidnu funkciju u točki c.

(b) Sve točke prekida funkcije koje nisu točke prekida prve vrste nazivamo *točkama prekida druge vrste.*

Napomenimo da u slučaju kada je $\mathcal{D}(f) = [a, b]$, neprekidnost funkcije u rubnim točkama a i b ispitujemo računajući desni limes u točki a, odnosno lijevi limes u točki b.

Ako je $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$, reći ćemo da je f zdesna neprekidna u točki a.

Ako je $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = f(b)$, reći ćemo da je f slijeva neprekidna u točki b.

Slično postupamo i u slučaju da je $\mathcal{D}(f) = [a, b)$ ili $\mathcal{D}(f) = (a, b]$.

Kažemo da je funkcija f *neprekidna na skupu* $S \subseteq \mathcal{D}(f)$, gdje je S interval ili unija intervala, ako je ona neprekidna u svakoj točki skupa S.

Odnos neprekidnosti prema algebarskim operacijama, te prema kompoziciji dan je sljedećim rezultatom.

(a) *Ako su funkcije f i g neprekidne u točki c, tada je*

funkcija $f + g$ neprekidna u točki c,

funkcija $f - g$ neprekidna u točki c,

funkcija $f \cdot g$ neprekidna u točki c,

funkcija $\dfrac{f}{g}$ neprekidna u točki c, $\quad$ *(uz uvjet da je $g(c) \neq 0$).*

(b) *Neka su f i g funkcije za koje je $Im(f) \subseteq \mathcal{D}(g)$. Ako je funkcija f neprekidna u točki c, a funkcija g neprekidna u točki $f(c)$, tada je funkcija $g \circ f$ neprekidna u točki c.*

To zapravo znači da postoji $\lim\limits_{x\to c}(g\circ f)(x)$, *te vrijedi*

$$\lim_{x\to c}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(c),$$

odnosno

$$\lim_{x\to c}(g(f(x))=g(\lim_{x\to c}f(x)).$$

(*Kažemo da limes i neprekidna funkcija* g *mogu zamijeniti mjesta.*)

Istaknimo da su sve elementarne funkcije neprekidne na svojim domenama.

Primjer 18.

1.) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|} & \text{ako je } x\neq 0,\\ 1 & \text{ako je } x=0.\end{cases}$

Uočimo da je $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$ i da je f neprekidna na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ispitajmo neprekidnost funkcije f u točki $x=0$. U tu svrhu računamo

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{-x}=-1,$$
$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Dakle, funkcija f ima u $x=0$ prekid prve vrste.

2.) $f(x)=\begin{cases}x & \text{ako je } x\neq 7,\\ 5 & \text{ako je } x=7.\end{cases}$

$\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$ i očito je f neprekidna na $\mathbb{R}\setminus\{7\}$. Ispitajmo neprekidnost funkcije f u točki $x=7$. Računamo

$$\lim_{x\to 7-}f(x)=\lim_{x\to 7-}x=7,$$
$$\lim_{x\to 7+}f(x)=\lim_{x\to 7+}x=7.$$

Stoga postoji $\lim\limits_{x\to 7}f(x)$ i vrijedi $\lim\limits_{x\to 7}f(x)=7\neq 5=f(7)$.
Dakle, funkcija f ima u točki $x=7$ prekid prve vrste, i to uklonjiv.

Možemo predefinirati vrijednost funkcije f u točki 7 tako da stavimo $f(7):=\lim\limits_{x\to 7}f(x)=7$ i dobiti neprekidnu funkciju na $\mathbb{R}$.

3.) $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & \text{ako je } x\neq 0,\\ 0 & \text{ako je } x=0.\end{cases}$

Jasno je da je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ i da je f neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da bismo ispitali neprekidnost funkcije f u točki $x = 0$ računamo

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x \sin\frac{1}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Dakle, postoji $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ i vrijedi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Stoga je funkcija f neprekidna i u točki $x = 0$.
Prema tome, funkcija f je neprekidna na $\mathbb{R}$.

4.) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{ako je } x \neq 2, \\ 0 & \text{ako je } x = 2. \end{cases}$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ i očito je f neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Ispitajmo neprekidnost funkcije f u točki $x = 2$. Računamo

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = \infty.$$

Stoga funkcija f ima u točki $x = 2$ prekid druge vrste.

5.) Odredimo $a \in \mathbb{R}$ tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{a+x} & \text{ako je } x \leq 1, \\ \frac{|x-1|}{x-1} & \text{ako je } x > 1, \end{cases}$$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

Uočimo da je funkcija f neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Da bi f bila neprekidna u točki $x = 1$ mora vrijediti $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = f(1)$. Računamo

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} e^{a+x} = e^{a+1},$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1+} 1 = 1,$$
$$f(1) = e^{a+1}.$$

Dakle, mora biti ispunjeno $e^{a+1} = 1$, pa je $a = -1$.

Svojstva neprekidnih funkcija

Istaknimo neka značajna svojstva neprekidnih funkcija na segmentu.

(a) *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ i ako f nije konstanta na $[a, b]$, tada je $Im(f) = [c, d]$, tj. slika funkcije f je također segment.*

(b) *Ako je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija na segmentu* $[a, b]$, *tada je* f *omeđena na* $[a, b]$, *tj. postoji* $M > 0$ *takav da je* $|f(x)| < M$ *za sve* $x \in [a, b]$.

(c) *Ako je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija na segmentu* $[a, b]$, *tada ona dostiže minimalnu i maksimalnu vrijednost na tom segmentu, tj. postoje* $x_m, x_M \in [a, b]$ *takvi da je* $f(x_m) \leq f(x)$ *i* $f(x_M) \geq f(x)$ *za sve* $x \in [a, b]$.

(d) *Ako je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija na segmentu* $[a, b]$, *tada* f *na tom segmentu poprima sve vrijednosti između svoje najmanje i najveće vrijednosti.*

(e) *Ako je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija na segmentu* $[a, b]$ *i ako je* $f(a)f(b) < 0$, *tada postoji* $c \in (a, b)$ *tako da je* $f(c) = 0$.

6 Derivacija funkcije

6.1 Pojam derivacije

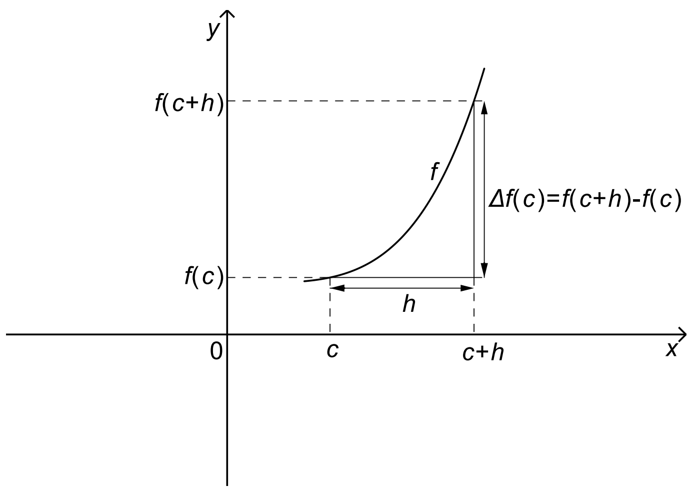
Neka je zadana funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, te neka je $c \in (a, b)$. Ako postoji

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

onda taj broj zovemo *derivacijom funkcije* f u točki c i označavamo s $f'(c)$. Dakle,

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Osim $f'(c)$ koristi se i oznaka $\dfrac{df(c)}{dx}$.



Slika 65: Derivacija funkcije f u točki c

Vrijednost $\triangle x = h$ zovemo *prirastom varijable*, a vrijednost $\triangle f(c) = f(c + \triangle x) - f(c)$ *prirastom funkcije* f u točki c.

Stoga formulu za derivaciju možemo pisati i u obliku

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{\triangle f(c)}{\triangle x}.$$

Ako funkcija f ima derivaciju u točki c, tada kažemo da je f *derivabilna* ili *diferencijabilna* u točki c.

Operaciju kojom određujemo derivaciju zovemo *deriviranjem* ili *diferenciranjem*.

Ako funkcija f ima derivaciju u svakoj točki intervala (a, b), kažemo da je f *derivabilna* ili *diferencijabilna* na tom intervalu. Tada je s $x \mapsto f'(x)$ definirana nova funkcija na (a, b) koju označavamo s f' i zovemo *derivacijom funkcije f na intervalu* (a, b).

Moguće je definirati i pojam *lijeve*, odnosno *desne derivacije* funkcije f u nekoj točki, pri čemu limes funkcije iz definicije derivacije zamijenimo s lijevim, odnosno desnim limesom.

Izračunajmo sada derivacije nekih funkcija.

Primjer 1.

1.) $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$

Rješenje

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Prema tome, $c' = 0$.

2.) $f(x) = x$

Rješenje

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Dakle, $x' = 1$.

3.) $f(x) = x^2$

Rješenje

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{x^2} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

Dakle, $(x^2)' = 2x$.

4.) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in (0, \infty)$

Rješenje

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Dakle, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5.) $f(x) = \sin x$

Rješenje

Da bismo izračunali derivaciju funkcije f koristimo formulu za razliku sinusa:

$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Računamo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos x.
\end{aligned}$$

Prema tome, $(\sin x)' = \cos x$.

6.) $f(x) = \cos x$

Rješenje

Da bismo izračunali derivaciju funkcije f koristimo formulu za razliku kosinusa:

$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Računamo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\dfrac{x+h+x}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{x+h-x}{2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h}\\
&= -\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{\dfrac{h}{2}} = -\sin x.
\end{aligned}$$

Prema tome, $(\cos x)' = -\sin x$.

7.) $f(x) = \ln x, \quad x \in (0,\infty)$

Rješenje

Pokažimo najprije da je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
Naime,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\\
&= \ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1.
\end{aligned}$$

(Ovdje smo koristili neprekidnost funkcije $x \mapsto \ln x$, zbog čega su lim i ln mogli zamijeniti mjesta.)

Računamo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}\cdot x}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}} = \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Dakle, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

6.2 Derivacija i neprekidnost

Ako je funkcija f derivabilna u točki c, tada je f neprekidna u točki c.

Sljedeći primjer nam pokazuje da obrat ne vrijedi, tj. da neprekidnost funkcije u točki c ne povlači derivabilnost u točki c.

Primjer 2.

$f(x) = |x|$

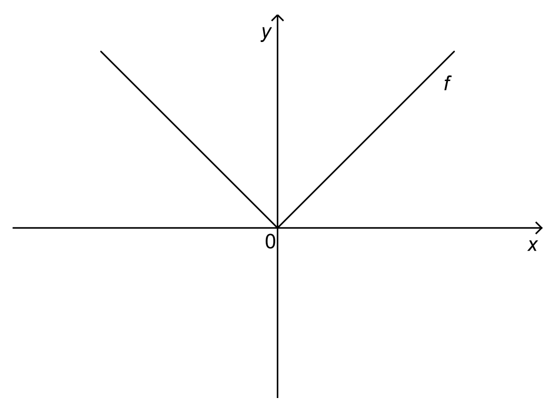
Jasno je da je funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}$. Pokažimo da f nije derivabilna u nuli. U tu svrhu računamo

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1, \\
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi da ne postoji $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ budući da su lijevi i desni limes različiti. Dakle, ne postoji $f'(0)$.

Može se pokazati da je u svim drugim točkama funkcija f derivabilna, te vrijedi

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x > 0, \\ -1 & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$



Slika 66: Graf funkcije $f(x) = |x|$

6.3 Pravila deriviranja

Neka su funkcije f i g derivabilne u točki c. Tada vrijedi:

(a) $(f(c)+g(c))' = f'(c)+g'(c)$,

(b) $(f(c)-g(c))' = f'(c)-g'(c)$,

(c) $(k\cdot f(c))' = k\cdot f'(c), \quad k\in\mathbb{R}$,

(d) $(f(c)\cdot g(c))' = f'(c)\cdot g(c)+f(c)\cdot g'(c)$,

(e) $\left(\dfrac{f(c)}{g(c)}\right)' = \dfrac{f'(c)\cdot g(c)-f(c)\cdot g'(c)}{g(c)^2}$ (uz uvjet $g(c)\neq 0$).

Primjer 3.

1.) Naći derivaciju funkcije $x\mapsto \operatorname{tg} x$.

Rješenje

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

2.) Naći derivaciju funkcije $x\mapsto \operatorname{ctg} x$.

Rješenje

$$\begin{aligned}(\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\cdot\sin x-\cos x\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}\\ &= \frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}\\ &= -\frac{1}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

3.) Naći derivaciju funkcije $x\mapsto \log_a x$.

Rješenje

$$\begin{aligned}(\log_a x)' &= \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \left(\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}\\ &= \frac{1}{x\ln a}\end{aligned}$$

Primjer 4.

Naći derivaciju sljedećih funkcija.

1.) $f(x) = 5x^2 + \sin x + 1$

Rješenje

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x^2)' + (\sin x)' + 1' = 5 \cdot (x^2)' + (\sin x)' + 1' \\ &= 5 \cdot 2x + \cos x + 0 = 10x + \cos x \end{aligned}$$

2.) $f(x) = x \ln x$

Rješenje

$$f'(x) = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

3.) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin x} + \text{tg } 1$

Rješenje

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2}{\sin x}\right)' + (\text{tg } 1)' = \frac{(x^2)' \cdot \sin x - x^2 \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} + 0 \\ &= \frac{2x \sin x - x^2 \cos x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

6.4 Derivacija složene funkcije

Neka su f i g funkcije za koje je $Im(f) \subseteq \mathcal{D}(g)$. Ako je funkcija f derivabilna u točki c, a funkcija g derivabilna u točki $f(c)$, tada je funkcija $g \circ f$ derivabilna u točki c, te vrijedi

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

Primjer 5.

1.) Naći derivaciju funkcije $x \mapsto \sin(x^2)$.

Rješenje

Stavimo $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$. Tada je $f'(x) = 2x$, $g'(x) = \cos x$. Kako je

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2),$$

to je prema formuli za derivaciju složene funkcije

$$\begin{aligned} (\sin(x^2))' &= (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(x^2) \cdot f'(x) \\ &= \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2) \end{aligned}.$$

2.) Naći derivaciju funkcije $x \mapsto \sqrt{\cos x}$.

Rješenje

Stavimo $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sqrt{x}$. Tada je $f'(x) = -\sin x$, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Kako je

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = \sqrt{\cos x},$$

to je prema formuli za derivaciju složene funkcije

$$\begin{aligned}(\sqrt{\cos x})' &= (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(\cos x) \cdot f'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.\end{aligned}$$

Primjer 6.

Naći derivacije sljedećih funkcija:

1.) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - 2x - 1)}$

2.) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

3.) $f(x) = 5^{\operatorname{tg} x}$

4.) $f(x) = e^{\frac{2x-3}{4x+7}}$

5.) $f(x) = \ln(1 + \sin(3\sqrt{x}))$

6.) $f(x) = \ln^3(2 - x)$

7.) $f(x) = x \cdot \arcsin(2x + 1)$

8.) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{3x}$

9.) $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{9x - 2}$

10.) $f(x) = \dfrac{\ln(x^3)}{x}$

Rješenje

$$\begin{aligned}1.)\ f'(x) &= \frac{1}{5}(x^2 - 2x - 1)^{-\frac{4}{5}} \cdot (2x - 2) = \frac{2(x-1)}{5\sqrt[5]{(x^2 - 2x - 1)^4}} \\ 2.)\ f'(x) &= \frac{1}{1 + (\frac{1}{x})^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2 + 1} \\ 3.)\ f'(x) &= 5^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
4.)\ f'(x) &= e^{\frac{2x-3}{4x+7}} \cdot \frac{2(4x+7)-4(2x-3)}{(4x+7)^2} = \frac{26}{(4x+7)^2} e^{\frac{2x-3}{4x+7}} \\
5.)\ f'(x) &= \frac{1}{1+\sin(3\sqrt{x})} \cdot \cos(3\sqrt{x}) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{3\cos(3\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(1+\sin(3\sqrt{x}))} \\
6.)\ f'(x) &= 3\ln^2(2-x) \cdot \frac{1}{2-x} \cdot (-1) = \frac{3\ln^2(2-x)}{x-2} \\
7.)\ f'(x) &= \arcsin(2x+1) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} \cdot 2 \\
&= \arcsin(2x+1) + \frac{2x}{\sqrt{4x-4x^2}} \\
8.)\ f'(x) &= 2x \cdot e^{3x} + (x^2+1) \cdot e^{3x} \cdot 3 = (3x^2+2x+3) \cdot e^{3x} \\
9.)\ f'(x) &= \frac{2\cos x \cdot (-\sin x) \cdot (9x-2) - 9\cos^2 x}{(9x-2)^2} \\
&= \frac{(2-9x)\sin(2x) - 9\cos^2 x}{(9x-2)^2} \\
10.)\ f'(x) &= \frac{\frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 \cdot x - \ln(x^3)}{x^2} = \frac{3-\ln(x^3)}{x^2}
\end{aligned}
$$

6.5 Derivacija inverzne funkcije

Ako je f^{-1} inverzna funkcija funkcije f, tada je

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \text{za sve} \quad y \in \mathcal{D}(f^{-1}).$$

Odavde, prema pravilu za derivaciju složene funkcije slijedi

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1.$$

Uočimo da iz $f(x) = y$ slijedi $f^{-1}(y) = x$, pa je

$$f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) = 1.$$

Prema tome,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

(uz uvjet da je funkcija f derivabilna u točki x i da je $f'(x) \neq 0$).

Primjer 7.

Naći derivaciju inverznih funkcija sljedećih funkcija.

1.) $f(x) = \log_a x, \quad x \in (0, \infty)$

Rješenje

Ovdje je $x = f^{-1}(y) = a^y$, pa je

$$(a^y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x \ln a}} = x \ln a = a^y \ln a.$$

Ovu formulu možemo pisati u obliku

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Stavimo li $a := e$, imamo

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.) $f(x) = \sin x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Rješenje

Ovdje je $f^{-1}(y) = \arcsin y$, pa je

$$(\arcsin y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Dakle,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

3.) $f(x) = \cos x, \quad x \in (0, \pi)$

Rješenje

Ovdje je $f^{-1}(y) = \arccos y$, pa je

$$(\arccos y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Dakle,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

4.) $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Rješenje

Ovdje je $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$, pa je

$$(\operatorname{arctg} y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Dakle,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.) $f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad x \in (0, \pi)$

Rješenje

Ovdje je $f^{-1}(y) = \operatorname{arcctg} y$, pa je

$$\begin{aligned}(\operatorname{arctg} y)' &= (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\sin^2 x \\ &= -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = -\frac{1}{1 + y^2}.\end{aligned}$$

Dakle,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primjer 8.

Naći derivaciju opće potencije $x \mapsto x^c$, $c \in \mathbb{R}$, za $x > 0$.

Rješenje

Kako je $x^c = (e^{\ln x})^c = e^{c \ln x}$, to je prema pravilu za derivaciju složene funkcije

$$(x^c)' = (e^{c \ln x})' = e^{c \ln x} \cdot (c \ln x)' = e^{c \ln x} \cdot c \cdot \frac{1}{x} = x^c \cdot c \cdot \frac{1}{x} = cx^{c-1}.$$

Napomenimo da je ova formula valjana i za $x < 0$ ako je x^c definirano.

Tablica derivacija osnovnih elementarnih funkcija

1.) $c' = 0 \quad (c = \text{konst.})$

2.) $(x^c)' = cx^{c-1} \quad (c = \text{konst.})$

3.) $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a = \text{konst.},\ a > 0,\ a \neq 1)$

4.) $(e^x)' = e^x$

5.) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (a = \text{konst.},\ a > 0,\ a \neq 1)$

6.) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

7.) $(\sin x)' = \cos x$

8.) $(\cos x)' = -\sin x$

9.) $(\text{tg } x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

10.) $(\text{ctg } x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

11.) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12.) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13.) $(\text{arctg } x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

14.) $(\text{arcctg } x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

6.6 Logaritamsko deriviranje

Neka je funkcija h dana formulom $h(x) = f(x)^{g(x)}$. Izračunajmo derivaciju funkcije h.

Logaritmiranjem funkcije h dobivamo

$$\ln(h(x)) = \ln(f(x)^{g(x)}) = g(x) \ln f(x).$$

Odavde je

$$(\ln(h(x)))' = (g(x) \ln f(x))',$$

pa po pravilu o derivaciji složene funkcije imamo

$$\frac{1}{h(x)} \cdot h'(x) = g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x),$$

tj.

$$\begin{aligned} h'(x) &= h(x)\Big(g'(x)\cdot\ln(f(x))+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\Big)\\ &= f(x)^{g(x)}\Big(g'(x)\cdot\ln(f(x))+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\Big). \end{aligned}$$

Opisani postupak nazivamo *logaritamskim deriviranjem.*

Primjer 9.

Naći derivaciju funkcije $f(x)=x^{\sin x}$.

Rješenje

Kako je $\ln(f(x))=\ln(x^{\sin x})=\sin x\ln x$, to je

$$(\ln(f(x)))'=(\sin x\ln x)',$$

tj.

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)\Big(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\Big)\\ &= x^{\sin x}\Big(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\Big) \end{aligned}.$$

Primjer 10.

Naći derivaciju funkcije $f(x)=(\text{arctg }x)^{x^2+1}$.

Rješenje

Logaritmiranjem funkcije f dobije se

$$\ln(f(x))=\ln\big((\text{arctg }x)^{x^2+1}\big)=(x^2+1)\ln(\text{arctg }x).$$

Sada deriviranjem obiju strana ovog identiteta imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) &= 2x\cdot\ln(\text{arctg }x)+(x^2+1)\cdot\frac{1}{\text{arctg }x}\cdot\frac{1}{x^2+1}\\ &= 2x\cdot\ln(\text{arctg }x)+\frac{1}{\text{arctg }x} \end{aligned}.$$

Odavde je

$$f'(x)=(\text{arctg }x)^{x^2+1}\cdot\Big(2x\cdot\ln(\text{arctg }x)+\frac{1}{\text{arctg }x}\Big).$$

6.7 Derivacije višeg reda

Neka za funkciju $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ postoji funkcija $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$. Ako je funkcija f' derivabilna na intervalu (a,b), tada funkciju $(f')'$ označavamo s f'' i zovemo *drugom derivacijom* funkcije f. Dakle,

$$f''(x) = (f'(x))', \quad x \in (a,b).$$

Analogno se definira

$$f'''(x) = (f''(x))', \quad f^{iv}(x) = (f'''(x))', \ldots.$$

Za derivaciju n-tog reda funkcije f $(n \in \mathbb{N})$ koristimo oznaku $f^{(n)}$ ili $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Primjer 11.

Naći drugu derivaciju funkcije $f(x) = x^2 + \sin x$.

Rješenje

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + \cos x, \\ f''(x) &= (f'(x))' = (2x + \cos x)' = 2 - \sin x. \end{aligned}$$

Primjer 12.

Naći treću derivaciju funkcije $f(x) = 2\ln^2 x + \dfrac{5}{x} - 7$.

Rješenje

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} = 4\frac{\ln x}{x} - \frac{5}{x^2}, \\ f''(x) &= 4\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} + \frac{10}{x^3} = 4\frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{10}{x^3}, \\ f'''(x) &= 4\frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} - \frac{30}{x^4} \\ &= 4\frac{-x - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} - \frac{30}{x^4} = 4\frac{-1 - 2(1 - \ln x)}{x^3} - \frac{30}{x^4} \ . \\ &= 4\frac{2\ln x - 3}{x^3} - \frac{30}{x^4} \end{aligned}$$

6.8 Derivacija implicitno zadane funkcije

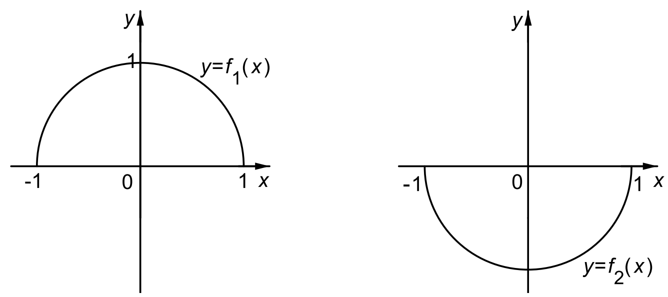
Krivulje u ravnini kao što su kružnica, elipsa, hiperbola itd. možemo zadati jednadžbom $F(x,y) = 0$. Primjerice, s $F(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ određena je jednadžba kružnice. Nadalje, s $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ određena je jednadžba elipse, dok je s $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ određena jednadžba hiperbole.

Promotrimo pobliže jednadžbu $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ koja određuje kružnicu polumjera 1 sa središtem u ishodištu.

Iz $x^2 + y^2 - 1 = 0$ slijedi $y^2 = 1 - x^2$, odakle je $y = \sqrt{1-x^2}$ ili $y = -\sqrt{1-x^2}$. To nam govori da su jednadžbom $F(x,y) = 0$ *implicitno* zadane funkcije

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{i} \quad f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}.$$

Dakle, vrijedi $F(x, f_1(x)) = 0$ i $F(x, f_2(x)) = 0$.



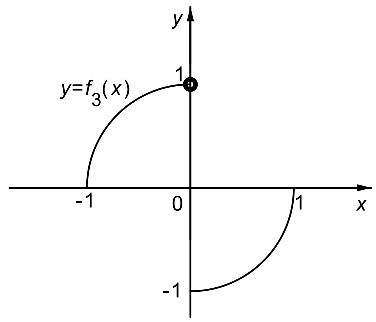
Slika 67: Grafovi funkcija $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$

Prema tome, funkcijom $y = f_1(x)$, $x \in [-1,1]$, određena je gornja polukružnica, dok je funkcijom $y = f_2(x)$, $x \in [-1,1]$, određena donja polukružnica.

Uočimo da kružnica nije graf niti jedne funkcije, budući da su svakoj točki $x \in (-1,1)$ pridružene dvije različite točke y_1 i y_2 takve da je $x^2 + y_1^2 = 1$ i $x^2 + y_2^2 = 1$. Nadalje, funkcije f_1 i f_2 nisu jedine funkcije koje su jednadžbom $F(x,y) = 0$ zadane implicitno. Takvih funkcija ima beskonačno mnogo. Primjerice, s

$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{ako je } x \in [-1,0), \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{ako je } x \in [0,1] \end{cases}$$

zadana je još jedna funkcija za koju je $F(x, f_3(x)) = 0$.



Slika 68: Graf funkcije $y = f_3(x)$

Pokažimo sada kako izračunati derivaciju bilo koje funkcije koja je s $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ zadana implicitno.

U tu svrhu najprije uvrstimo $y = f(x)$ u jednadžbu $F(x, y) = 0$. Kako je $F(x, f(x)) = 0$, to u našem slučaju imamo $x^2 + f^2(x) - 1 = 0$. Korištenjem formule za derivaciju složene funkcije imamo

$$2x + 2f(x) \cdot f'(x) - 0 = 0,$$

odakle je $x + f(x) \cdot f'(x) = 0$. Dakle,

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}.$$

Ako sada za f stavimo funkciju f_1 dobit ćemo

$$f_1'(x) = -\frac{x}{f_1(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Stavimo li pak $f = f_2$ imamo

$$f_2'(x) = -\frac{x}{f_2(x)} = -\frac{x}{-\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Uočimo da bismo iste formule dobili da smo derivirali eksplicitno zadane funkcije $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ i $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Međutim, nije uvijek moguće funkciju koja je jednadžbom $F(x, y) = 0$ zadana implicitno napisati u eksplicitnom obliku. Stoga takve funkcije deriviramo na gore opisani način.

Primjer 13.

Naći derivaciju funkcije $y = f(x)$ zadane implicitno jednadžbom $e^y + x + y + 1 = 0$ u točki $T(-2, 0)$.

Rješenje

Uočimo da funkciju $y = f(x)$ koja je jednadžbom

$$F(x, y) = e^y + x + y + 1 = 0$$

zadana implicitno ne možemo napisati u eksplicitnom obliku. Ipak, deriviranjem implicitno zadane funkcije

$$e^{f(x)} + x + f(x) + 1 = 0$$

dobivamo

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 + f'(x) = 0.$$

Odavde je $f'(x)(e^{f(x)} + 1) = -1$, pa je

$$f'(x) = -\frac{1}{e^{f(x)} + 1}.$$

Uočimo da točka $T(-2, 0)$ pripada krivulji zadanoj s $F(x, y) = 0$, jer je $F(-2, 0) = e^0 - 2 + 0 + 1 = 0$.

Derivacija funkcije $y = f(x)$ u točki $T(-2, 0)$ prema gornjoj formuli iznosi

$$f'(-2) = -\frac{1}{e^{f(-2)} + 1} = -\frac{1}{e^0 + 1} = -\frac{1}{2}.$$

Primjer 14.

Naći derivaciju funkcije $y = f(x)$ zadane implicitno jednadžbom $\operatorname{arctg} y = \ln(x^3 + y^2) + \frac{\pi}{4}$ u točki $T(0, 1)$.

Rješenje

Deriviranjem implicitno zadane funkcije

$$\operatorname{arctg}(f(x)) = \ln(x^3 + f(x)^2) + \frac{\pi}{4}$$

dobije se

$$\frac{1}{1 + f(x)^2} \cdot f'(x) = \frac{1}{x^3 + f(x)^2} \cdot (3x^2 + 2f(x)f'(x)).$$

Točka $T(0, 1)$ pripada danoj krivulji, pa uvrštavanjem njenih koordinata u gornji izraz imamo

$$\frac{1}{1 + 1^2} \cdot f'(0) = \frac{1}{0^3 + 1^2} \cdot (3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1 \cdot f'(0)),$$

tj.

$$\frac{1}{2} f'(0) = 2f'(0),$$

odakle slijedi $f'(0) = 0$.

6.9 Derivacija parametarski zadane funkcije

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, te neka su zadane funkcije

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad t \in I.$$

Tada svakom $t \in I$ odgovara točka ravnine $T(f(t), g(t))$. Kada varijabla t prolazi intervalom I tada točka $T(f(t), g(t))$ opisuje neku ravninsku krivulju. Formule

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t), \quad t \in I \end{aligned}$$

zovemo *parametarskim jednadžbama* te krivulje.

Primjer 15.

1.) $x = r\cos t$

$y = r\sin t, \quad t \in [0, 2\pi), \quad r > 0$ dani broj.

Uočimo da je

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t = r^2,$$

pa su stoga $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ parametarske jednadžbe kružnice.

2.) $x = a\cos t$

$y = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi), \quad a, b > 0$ dani brojevi.

Kako je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

to su $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ parametarske jednadžbe elipse.

3.) $x = t + 2$

$y = 5t - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$

Uvrstimo li $t = x - 2$ iz prve u drugu jednadžbu dobivamo $y = 5(x-2) - 1 = 5x - 11$. Dakle, $x = t + 2$, $y = 5t - 1$ su parametarske jednadžbe pravca.

Uočimo da smo u prethodnim primjerima iz parametarskih jednadžbi krivulje eliminirali parametar t, te jednadžbu dane krivulje napisali bilo u implicitnom ili eksplicitnom obliku. Napomenimo da eliminacija parametra t nije uvijek moguća.

Neka je sada funkcija $y = y(x)$ zadana parametarskim jednadžbama $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in I$.

Pokazat ćemo da je uz izvjesne pretpostavke na funkcije f i g moguće izračunati derivaciju $y'(x)$ direktno iz parametarskog zapisa (dakle, bez prijelaza na implicitni ili eksplicitni zapis).

Pretpostavimo da su funkcije f i g derivabilne na intervalu I, te neka funcija f ima inverznu funkciju $f^{-1} : Im(f) \to I$. Tada iz $x = f(t)$ imamo $t = f^{-1}(x)$, pa je

$$y = g(t) = g(f^{-1}(x)) = (g \circ f^{-1})(x).$$

Prema formuli za derivaciju složene funkcije je

$$\begin{aligned} y'(x) &= (g \circ f^{-1})'(x) = g'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) \\ &= g'(t) \cdot \frac{1}{f'(t)} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \end{aligned}$$

uz uvjet da je $f'(t) \neq 0$. Koristeći oznake

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}, \quad f'(t) = \frac{df(t)}{dt}, \quad g'(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

prethodnu formulu zapisujemo u obliku

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{\frac{dg(t)}{dt}}{\frac{df(t)}{dt}}.$$

Uobičajeno je umjesto $x = f(t)$, $y = g(t)$ pisati $x = x(t)$, $y = y(t)$, pa formula za derivaciju funkcije poprima oblik

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{\frac{dy(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}}.$$

Napomena

Za derivacije po parametru koriste se i oznake $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$. Ove oznake su uobičajene u mehanici.

Primjer 16.

Naći prvu derivaciju u točki kružnice

$$x(t) = \cos t$$
$$y(t) = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi)$$

za koju je $t = \frac{\pi}{3}$.

Rješenje

$x_0 = x(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$,
$y_0 = y(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Dakle, tražimo prvu derivaciju u točki $T(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ dane kružnice. Vrijedi

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{\frac{dy(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\text{ctg } t,$$

pa je

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\text{ctg }\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Primjer 17.

Naći prvu derivaciju u točki $T(\pi a, 2a)$ krivulje zadane parametarskim jednadžbama

$$x(t) = a(t - \sin t)$$
$$y(t) = a(1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Rješenje

Krivulju zadanu ovim parametarskim jednadžbama nazivamo *cikloidom*.

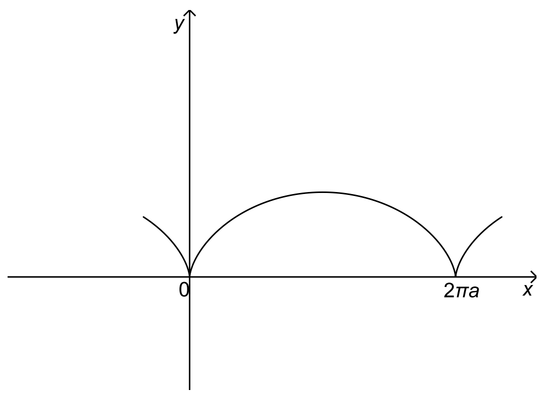
Kako je

$x_0 = x(t_0) = a(t_0 - \sin t_0) = \pi a$,
$y_0 = y(t_0) = a(1 - \cos t_0) = 2a$,
slijedi $t_0 = \pi$. Prema tome, iz

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{\frac{dy(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

slijedi

$$y'(\pi a) = \frac{\sin \pi}{1 - \cos \pi} = 0.$$



Slika 69: Cikloida

6.10 Fizikalno značenje prve derivacije u točki

Praktična potreba za proučavanjem brzine gibanja tijela dovela je I. Newtona [1] do otkrića diferencijalnog računa.

Promotrimo gibanje materijalne točke T po pravcu. Budući da duljina prevaljenog puta ovisi o trajanju gibanja, kažemo da je put funkcija vremena i pišemo $s = s(t)$. Dakle, $s(t)$ je put koji je materijalna točka prevalila do trenutka t.

Označimo li sada s t_0 čvrsti trenutak, tada je točka T gibajući se u vremenskom intervalu $[t_0, t_0 + \Delta t]$ prešla put $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Stoga je prosječna (srednja) brzina gibanja točke T tijekom vremena $(t_0 + \Delta t) - t_0 = \Delta t$ jednaka

$$v_{sr} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Smanjujemo li duljinu vremenskog intervala Δt, srednja brzina v_{sr} se sve manje razlikuje od prave brzine $v(t_0)$ koju bi točka T imala u trenutku t_0. Stoga je trenutnu brzinu $v(t_0)$ točke T u trenutku t_0 prirodno definirati kao veličinu kojoj teži srednja brzina v_{sr} kada Δt teži prema nuli. Dakle,

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

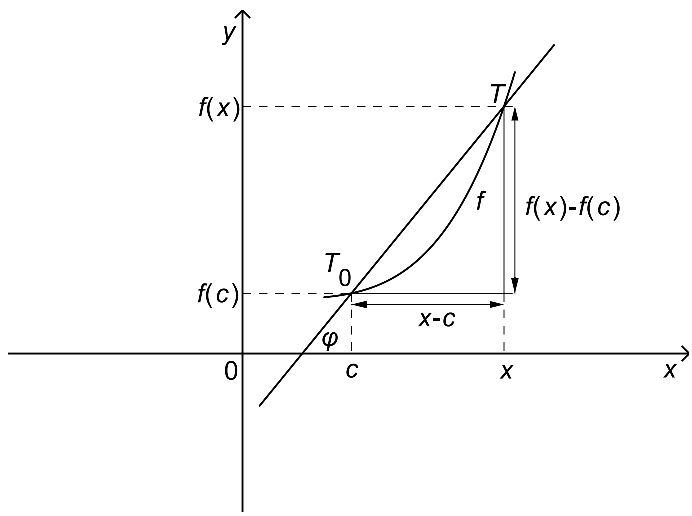
[1] engleski matematičar, fizičar i astronom (1643-1727)

Prema tome, $v(t_0) = s'(t_0)$, tj. brzina u trenutku t_0 je prva derivacija puta po vremenu u trenutku t_0.

6.11 Geometrijsko značenje prve derivacije u točki

G. W. Leibniz [2] je došao do otkrića diferencijalnog računa rješavajući problem konstrukcije tangente na zadanu krivulju.

Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zadana funkcija, te $c \in (a, b)$. Neka su $T_0(c, f(c))$ i $T(x, f(x))$ dvije točke na grafu funkcije f.



Slika 70: Sekanta kroz točke T_0 i T na grafu funkcije f

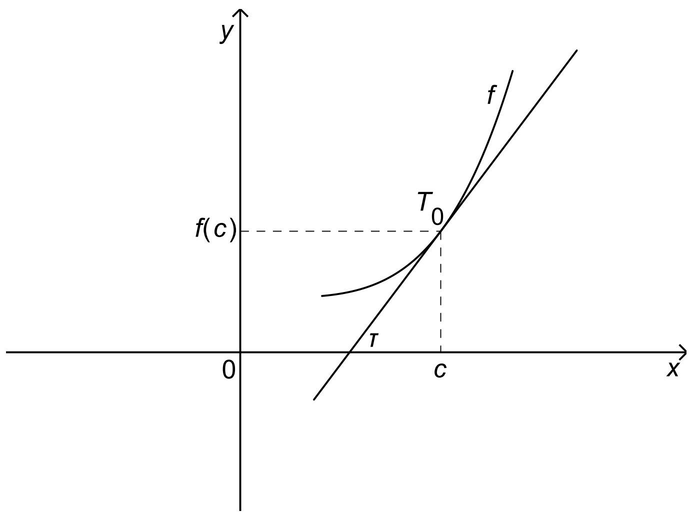
Povucimo pravac kroz točke T_0 i T. Taj pravac nazivamo *sekantom.*

Označimo s φ kut kojeg sekanta zatvara s pozitivnim dijelom osi x. Tada koeficijent smjera sekante k_{sek} iznosi

$$k_{sek} = \operatorname{tg}\, \varphi = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Uzmimo sada da je točka T_0 čvrsta, te pustimo da se točka T po grafu funkcije f sve više približava točki T_0. Kada $T \to T_0$ (odnosno $x \to c$) tada sekanta kroz točke T_0 i T "postaje" pravac koji zovemo *tangentom* na graf funkcije f u točki T_0. Dakle, kada $x \to c$ tada $\operatorname{tg}\, \varphi \to \operatorname{tg}\, \tau$, gdje je τ kut koji tangenta na graf funkcije f u točki T_0 zatvara s pozitivnim dijelom osi x.

[2] njemački matematičar i filozof (1646-1716)



Slika 71: Tangenta na graf funkcije f u točki $T_0(c, f(c))$

Stoga se koeficijent smjera tangente k_{tan} na graf funkcije f u točki $T(c, f(c))$ definira kao

$$k_{tan} = \operatorname{tg} \tau = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

(pod uvjetom da taj limes postoji).
Stavimo li $h := x - c$, tada prethodnu formulu pišemo u obliku

$$k_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

odakle slijedi $k_{tan} = f'(c)$.

Dakle, $f'(c)$ *je koeficijent smjera tangente na graf funkcije* f *u točki* $T_0(c, f(c))$.

Jednadžba tangente na graf funkcije f u točki $T_0(c, f(c))$ glasi

$$y - f(c) = f'(c)(x - c).$$

Normala na graf funkcije f u točki $T_0(c, f(c))$ je pravac okomit na tangentu. Stoga je koeficijent smjera normale k_{nor} jednak

$$k_{nor} = -\frac{1}{k_{tan}} = -\frac{1}{f'(c)},$$

pa *jednadžba normale* glasi

$$y - f(c) = -\frac{1}{f'(c)}(x - c).$$

Ako je pak $f'(c) = 0$, tada je tangenta paralelna s osi x i ima jednadžbu $y - f(c) = 0$, dok je normala okomita na os x i ima jednadžbu $x - c = 0$.

Primjer 18.

Naći jednadžbu tangente i normale na krivulju $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ u točki $T(2, 4)$.

Rješenje

Kako je $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 4$, to točka T pripada grafu funkcije f.

Za funkciju f je $f'(x) = \frac{3}{2}x^2$, pa koeficijent smjera tangente u točki $T(2, 4)$ iznosi

$$k_{tan} = f'(2) = \frac{3}{2} \cdot 2^2 = 6.$$

Stoga jednadžba tangente glasi $y - 4 = 6(x - 2)$, tj. $y = 6x - 8$.

Koeficijent smjera normale iznosi

$$k_{nor} = -\frac{1}{k_{tan}} = -\frac{1}{6},$$

pa jednadžba normale glasi $y - 4 = -\frac{1}{6}(x - 2)$, odnosno $y = -\frac{1}{6}x + \frac{13}{3}$.

Primjer 19.

Naći točke u kojima su tangente na krivulju $f(x) = (x^3+2x^2)e^x$ paralelne osi apscisa.

Rješenje

Tražimo one točke $T(x_0, y_0)$ dane krivulje u kojima je

$$k_{tan} = f'(x_0) = 0.$$

Deriviranjem funkcije f dobije se

$$f'(x) = (3x^2 + 4x)e^x + (x^3 + 2x^2)e^x = (x^3 + 5x^2 + 4x)e^x.$$

Nultočke prve derivacije funkcije f su rješenja jednadžbe

$$x^3 + 5x^2 + 4x = 0.$$

Kako je

$$x^3 + 5x^2 + 4x = x(x + 1)(x + 4),$$

slijedi da ova jednadžba ima tri realna rješenja:

$$x_1 = -4, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0.$$

Kako je $f(-4) = -32e^{-4}$, $f(-1) = e^{-1}$, te $f(0) = 0$, tražene točke su

$$T_1(-4, -32e^{-4}), \quad T_2(-1, e^{-1}), \quad T_3(0, 0).$$

Primjer 20.

Naći točke u kojima su tangente na krivulju $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}$ okomite na pravac $y = -\frac{4}{3}x + 1$.

Rješenje

Koeficijent smjera danog pravca je $-\frac{4}{3}$, pa tražimo točke na grafu funkcije f za koje je

$$k_{tan} = f'(x_0) = \frac{3}{4}.$$

Kako je $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}$, apscise traženih točaka su rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4},$$

a to su $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$. Vrijedi $f(-2) = -\frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{1}{2}$, pa točke u kojima su tangente na danu krivulju okomite na pravac $y = -\frac{4}{3}x + 1$ glase

$$T_1\Big(-2, -\frac{1}{2}\Big), \quad T_2\Big(2, \frac{1}{2}\Big).$$

Primjer 21.

Naći jednadžbu tangente na kružnicu

$$x(t) = \cos t$$
$$y(t) = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi)$$

u točki $T(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Rješenje

Iz $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos t_0$ i $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin t_0$ slijedi $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Izračunajmo derivaciju $y'(x)$.

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{\frac{dy(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\text{ctg } t,$$

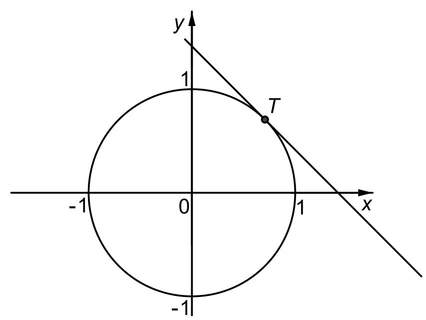
pa je

$$y'\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = -\text{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Odavde slijedi da je koeficijent smjera tangente $k_{tan} = y'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1$. Jednadžba tangente na kružnicu u točki $T(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ glasi

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1\Big(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big),$$

tj. $y = -x + \sqrt{2}$.



Slika 72: Tangenta na kružnicu u točki $T(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

Primjer 22.

Naći jednadžbu normale na krivulju $\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)y} = 3$ u točki $T(0, 4)$.

Rješenje

Budući da je koeficijent smjera normale

$$k_{nor} = -\frac{1}{k_{tan}} = -\frac{1}{f'(0)},$$

potrebno je najprije derivirati funkciju $y = f(x)$ zadanu implicitno jednadžbom

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)f(x)} = 3.$$

Deriviranjem se dobije

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{(x+1)f(x)}}(f(x) + (x+1)f'(x)) = 0.$$

Uvrstimo li u gornji izraz koordinate točke $T(0,4)$ imamo

$$\frac{1}{2\sqrt{0+1}}+\frac{1}{2\sqrt{(0+1)\cdot 4}}(4+(0+1)f'(0))=0,$$

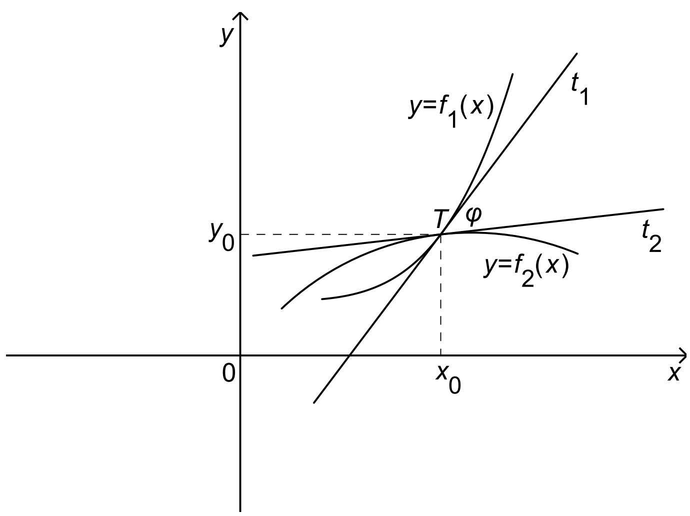
odakle se lako izračuna $f'(0)=-6$.
Prema tome, $k_{nor}=\frac{1}{6}$. Jednadžba normale na danu krivulju u točki $T(0,4)$ glasi

$$y-4=\frac{1}{6}(x-0),$$

tj. $y=\frac{1}{6}x+4$.

6.12 Kut između krivulja

Kut pod kojim se sijeku dvije krivulje zadane jednadžbama $y=f_1(x)$ i $y=f_2(x)$ definira se kao kut između njihovih tangenata u sjecištu.



Slika 73: Kut između krivulja $y=f_1(x)$ i $y=f_2(x)$

Označimo li s $T(x_0,y_0)$ točku u kojoj se sijeku grafovi funkcija f_1 i f_2, onda koeficijenti smjerova tangenata na grafove funkcija f_1 i f_2 u točki $T(x_0,y_0)$ iznose redom $k_1=f_1'(x_0)$ i $k_2=f_2'(x_0)$.

Stoga se kut φ između tih tangenata računa pomoću formule (za kut između dvaju pravaca)

$$\text{tg}\ \varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}\right|.$$

Primjer 23.

Naći kut pod kojim se sijeku krivulje $f_1(x) = x^2 - 4x + 8$ i $f_2(x) = -x^2 + 6x$ u točki $T(1, 5)$.

Rješenje

Kako je $f_1(1) = 5$, te $f_2(1) = 5$, to je točka $T(1, 5)$ sjecište ovih dviju krivulja.

Iz $f_1'(x) = 2x - 4$ i $f_2'(x) = -2x + 6$ slijedi da koeficijenti smjerova tangenata na grafove funkcija f_1 i f_2 u točki $T(1, 5)$ iznose redom

$$k_1 = f_1'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2, \quad k_2 = f_2'(1) = -2 \cdot 1 + 6 = 4.$$

Stoga se kut φ među tangentama na krivulje računa po formuli

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right| = \left| \frac{4 + 2}{1 - 2 \cdot 4} \right| = \frac{6}{7}.$$

Dakle, $\varphi \approx 40.6°$.

Primjer 24.

Naći kut pod kojim se sijeku krivulje $f_1(x) = -\frac{1}{2}x^2$ i $f_2(x) = \frac{x}{x+2}$.

Rješenje

Točke u kojima se krivulje f_1 i f_2 sijeku dobivamo rješavanjem jednadžbe $f_1(x) = f_2(x)$, tj.

$$-\frac{1}{2}x^2 = \frac{x}{x + 2}.$$

Množenjem ove jednadžbe s $2(x + 2)$ dobije se $-x^2(x + 2) = 2x$, odnosno $x(x^2 + 2x + 2) = 0$. Ova jednadžba ima jedno realno rješenje $x = 0$. Kako je $f_1(0) = f_2(0) = 0$, to se zadane krivulje sijeku u točki $T(0, 0)$.

Izračunajmo sada koeficijente smjerova tangenata na grafove funkcija f_1 i f_2 u točki $T(0, 0)$.

$f_1'(x) = -x$,

$f_2'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$.

Stoga je $k_1 = f_1'(0) = 0$, $k_2 = f_2'(0) = \frac{1}{2}$, pa je

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} - 0}{1 + 0 \cdot \frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{2}.$$

Dakle, $\varphi \approx 26.57°$.

6.13 Diferencijal funkcije

Neka je funkcija f derivabilna u točki x. Tada je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Stavimo

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x).$$

Tada je

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h,$$

pri čemu je $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.
Dakle, prirast funkcije f u točki x jednak je zbroju dvaju članova, tj.

$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h.$$

Pritom je

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(h) \cdot h}{f'(x) \cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(h)}{f'(x)} = 0,$$

što znači da je drugi član zbroja $\varepsilon(h) \cdot h$ mali u odnosu na prvi član zbroja $f'(x) \cdot h$ za male h. Dakle, za male h je $\Delta f(x) \approx f'(x) \cdot h$.

Prvi član ovog zbroja zovemo *diferencijalom funkcije* f u točki x i označavamo ga s $df(x)(h)$. Dakle,

$$df(x)(h) = f'(x) \cdot h.$$

Osim oznake $df(x)(h)$ često pišemo kraće $df(x)$ ili samo dy, pa je

$$dy = f'(x) \cdot h.$$

Uočimo da diferencijal funkcije f u točki x ne ovisi samo o točki x u kojoj se računa nego i o prirastu varijable.

Za funkciju $f(x) = x$, tj. za $y = x$ je diferencijal dy jednak

$$dy = f'(x) \cdot h = 1 \cdot h = h.$$

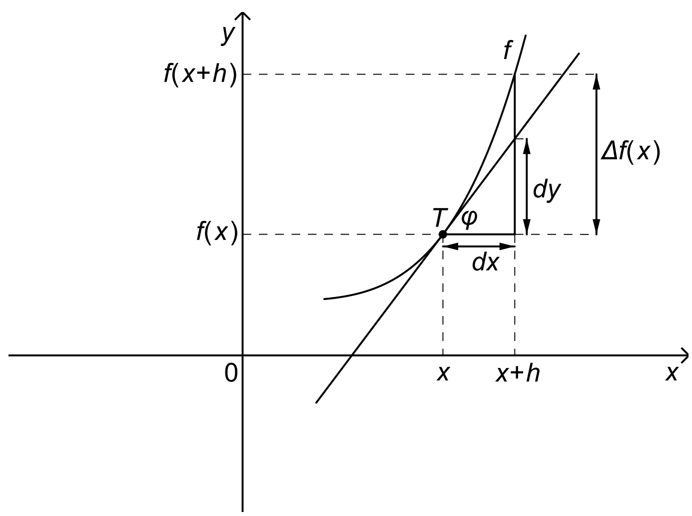
Kako je ovdje $y = x$, to slijedi $dx = h$. Stoga umjesto h pišemo dx i tu veličinu zovemo *diferencijalom nezavisne varijable*. Sada je

$$dy = f'(x)dx.$$

Stoga se $\frac{dy}{dx}$ (odnosno $\frac{df(x)}{dx}$) uzima i kao simbol kojim označavamo derivaciju $f'(x)$.

Geometrijsko značenje diferencijala

Prisjetimo se da je $f'(x)$ koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki $T(x, f(x))$.



Slika 74: Geometrijsko značenje diferencijala

Označimo li s φ kut koji tangenta zatvara s pozitivnim dijelom osi x, tada je $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$. Odavde je $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$, pa je $dy = \operatorname{tg}\varphi\, dx$.

Kažemo da je diferencijal funkcije f u točki x jednak prirastu ordinate točke $T(x, f(x))$ na tangenti krivulje $y = f(x)$ kad argument x dobije prirast dx. U dovoljno maloj okolini točke x graf funkcije f možemo približno zamijeniti tangentom na graf te funkcije u točki x.

Primjer 25.

Koristeći diferencijal funkcije približno izračunati $\sqrt{9.1}$.

Rješenje

Uzmimo $f(x) = \sqrt{x}$. Znamo da je $\sqrt{9} = 3$, pa stoga za točku x_0 stavimo $x_0 = 9$. Tada je prirast varijable $h = 0.1$. Prirast funkcije u točki $x_0 = 9$

približno je jednak diferencijalu funkcije f u točki $x_0 = 9$. Dakle,

$$\Delta f(9) = \Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0) \cdot h = f'(9) \cdot 0.1.$$

Kako je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, to je $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$, pa je

$$\Delta f(9) \approx \frac{1}{6} \cdot 0.1 = 0.01\dot{6}.$$

Nadalje,

$$\Delta f(9) = \Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = f(9 + 0.1) - f(9) = f(9.1) - 3,$$

pa je

$$f(9.1) = \Delta f(9) + 3 \approx 0.01\dot{6} + 3 = 3.01\dot{6}.$$

Dakle, $\sqrt{9.1} \approx 3.01\dot{6}$.

Stvarna vrijednost je $\sqrt{9.1} = 3.016620626$, pa je pogreška približno $4.6 \cdot 10^{-5}$.

Primjer 26.

Koristeći diferencijal funkcije približno izračunati vrijednost funkcije $f(x) = e^{1-x^2}$ za $x = 0.98$.

Rješenje

Uzmimo $x_0 = 1$. Tada je $f(x_0) = f(1) = 1$, a prirast varijable iznosi $h = -0.02$.

Nadalje, $f'(x) = -2xe^{1-x^2}$, pa je $f'(1) = -2$, odakle slijedi

$$\Delta f(1) \approx df(1) = f'(1) \cdot h = -2 \cdot (-0.02) = 0.04.$$

Vrijedi

$$\Delta f(1) = \Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = f(1 - 0.02) - f(1) = f(0.98) - 1,$$

pa je

$$f(0.98) = \Delta f(1) + 1 \approx 0.04 + 1 = 1.04.$$

6.14 L'Hospitalovo pravilo

L'Hospitalovo pravilo primjenjujemo za računanje limesa kvocijenta $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, pri čemu je

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \text{ ili } \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty;$$

tj. na neodređene oblike $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Pritom se na funkcije f i g postavljaju izvjesni uvjeti.

L'Hospitalovo pravilo

Neka su funkcije f i g derivabilne na skupu $S = (a, c) \cup (c, b)$, te neka je $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in S$. Pretpostavimo da je

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \quad \textit{ili} \quad \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty.$$

Ako postoji $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, tada postoji i $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, te vrijedi

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Napomena

L'Hospitalovo pravilo primjenjujemo i u slučaju $c = \infty$ ili $c = -\infty$.

Primjer 27.

Koristeći L'Hospitalovo pravilo izračunati sljedeće limese:

1.) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1} = 1$

2.) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{2x-1} = \dfrac{5}{3}$

3.) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$

4.)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} &= \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0+}\frac{\sin^2 x}{x}\\ &= \left(\frac{0}{0}\right) = -\lim_{x\to 0+}\frac{2\sin x\cos x}{1} = 0\end{aligned}$$

5.) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\dfrac{1}{2}$

6.) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2}=0$

Primjer 28.

Izračunati $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Rješenje

Dijeljenjem brojnika i nazivnika s x dobivamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

Provjerimo možemo li ovaj limes izračunati koristeći L'Hospitalovo pravilo.

Stavimo $f(x)=x-\sin x$ i $g(x)=x+\sin x$. Tada je

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty.$$

Međutim,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x},$$

pa ne postoji $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Dakle, iako $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ postoji ne možemo ga izračunati koristeći L'Hospitalovo pravilo, jer nisu ispunjeni svi uvjeti za njegovu primjenu.

L'Hospitalovo pravilo koristimo i kod neodređenih oblika $0\cdot\infty$ i $\infty-\infty$.

Naime, ako je $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$ i $\lim\limits_{x\to c}g(x)=\infty$, gdje je $c\in\overline{\mathbb{R}}$, tada $f(x)\cdot g(x)$ napišemo u obliku

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\quad\text{ili}\quad f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

pri čemu neodređeni oblik $0\cdot\infty$ svodimo na oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$ na koji možemo primijeniti L'Hospitalovo pravilo.

Slično, ako je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$, tada izraz oblika $f(x) - g(x)$ pretvorimo u oblik

$$f(x) - g(x) = \Big(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\Big) f(x)\cdot g(x).$$

Na taj način smo neodređeni oblik $\infty-\infty$ pretvorili u oblik $0\cdot\infty$, koji zatim riješavamo na već opisani način.

Primjer 29.

Koristeći L'Hospitalovo pravilo izračunati sljedeće limese.

$$\begin{aligned}
1.)\ \lim_{x\to 0+}\sqrt{x}\ln x &= (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \Big(\frac{\infty}{\infty}\Big)\\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}} = -\lim_{x\to 0+} 2\sqrt{x} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.)\ \lim_{x\to 0+}\operatorname{arctg} x\ln x &= (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}} = \Big(\frac{\infty}{\infty}\Big)\\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}\\
&= -\lim_{x\to 0+}\frac{(1+x^2)\operatorname{arctg}^2 x}{x}\\
&= -\lim_{x\to 0+}(1+x^2)\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x}\\
&= -\lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x} = \Big(\frac{0}{0}\Big)\\
&= -\lim_{x\to 0+}\frac{2\operatorname{arctg} x\cdot\frac{1}{1+x^2}}{1} = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
3.)\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) &= (\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\dfrac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4.)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\text{tg }x}\right) &= (\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg }x-x}{x\,\text{tg }x}=\left(\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{\text{tg }x+x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x\cos x+x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\dfrac{x}{\sin x}}\\
&= \frac{0}{1+1}=0
\end{aligned}
$$

Neodređeni oblici 1^∞, 0^0 i ∞^0 se logaritmiranjem izraza $f(x)^{g(x)}$ svode na oblik $0\cdot\infty$. Pogledajmo to na sljedećim primjerima.

Primjer 30.

Izračunati $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje

Limes je oblika 1^∞. Logaritmiranjem se dobije

$$\ln(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln(e^x+\sin x).$$

Sada računamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(e^x+\sin x) &= (\infty\cdot 0)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+\sin x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e^x+\sin x}(e^x+\cos x)}{1}=2.
\end{aligned}
$$

Dakle, $\lim\limits_{x\to 0}\ln(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}=2$.

Kako je
$$(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}},$$
to se koristeći neprekidnost eksponencijalne funkcije dobije
$$\lim_{x\to 0}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}} = e^2.$$

Primjer 31.

Izračunati $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)^{x-1}$.

Rješenje

Limes je oblika 0^0. Računamo
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\ln(x^2-1)^{x-1} &= \lim_{x\to 1}(x-1)\ln(x^2-1) = (0\cdot\infty)\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2-1)}{\frac{1}{x-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = -2\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)^2}{x^2-1}\\
&= -2\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = -2\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x+1} = 0.
\end{aligned}$$
Sada je
$$\lim_{x\to 1}(x^2-1)^{x-1} = \lim_{x\to 1} e^{\ln(x^2-1)^{x-1}} = e^0 = 1.$$

Primjer 32.

Izračunati $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje

Limes je oblika ∞^0. Računamo
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\ln(x+2)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(x+2) = (0\cdot\infty)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+2)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+2}}{1} = 0.
\end{aligned}$$
Stoga je
$$\lim_{x\to\infty}(x+2)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(x+2)^{\frac{1}{x}}} = e^0 = 1.$$

6.15 Asimptote

Pravac p je *asimptota* grafa funkcije f ako udaljenost točke $T(x, f(x)) \in G(f)$ od pravca p teži prema nuli kada $x \to c-$ ili $x \to c+$ za neki $c \in \mathbb{R}$, odnosno $x \to \infty$ ili $x \to -\infty$.

Razlikujemo vertikalne, horizontalne i kose asimptote.

Vertikalne asimptote

Pravac $x = c$ je *vertikalna asimptota* grafa funkcije f ako je

$$\lim_{x \to c-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ili} \lim_{x \to c+} f(x) = \pm\infty.$$

Funkcija može imati vertikalne asimptote samo u rubnim točkama domene.

Primjer 33.

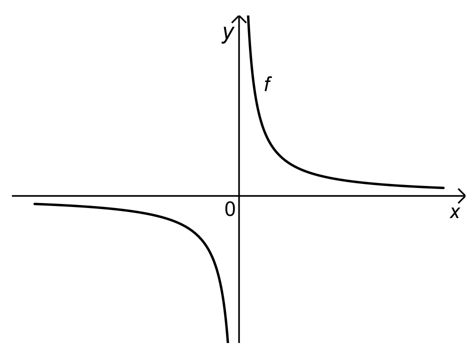
1.) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Ovdje je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = \infty$

Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota.



Slika 75: Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota grafa funkcije f.

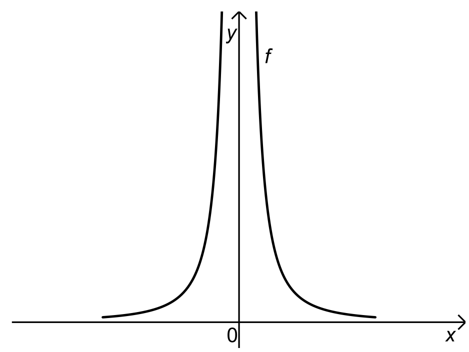
2.) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota.



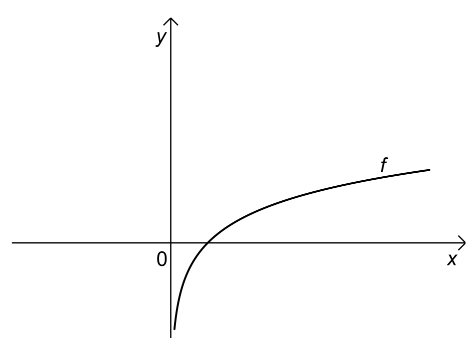
Slika 76: Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota grafa funkcije f.

3.) $f(x) = \ln x$

$\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$

Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota.



Slika 77: Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota grafa funkcije f.

Horizontalne asimptote

Pravac $y = l$ je *horizontalna asimptota* grafa funkcije f ako je

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \quad \text{ili} \lim_{x\to\infty} f(x) = l.$$

Primjer 34.

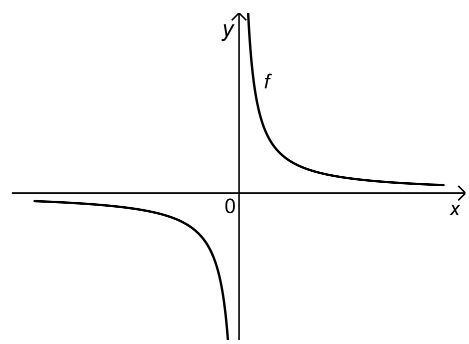
1.) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota.



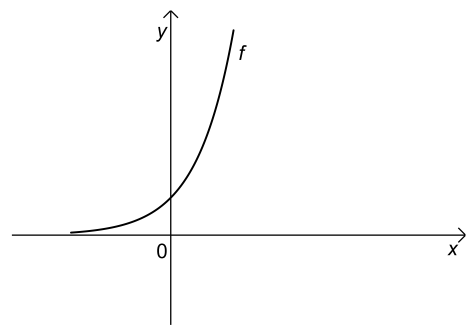
Slika 78: Pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota grafa funkcije f.

2.) $f(x) = e^x$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

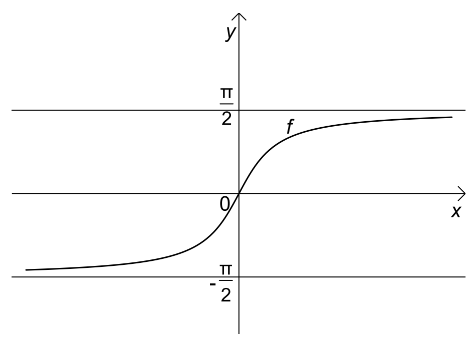
Pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota.



Slika 79: Pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota grafa funkcije f.

3.) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$
Pravci $y = -\dfrac{\pi}{2}$ i $y = \dfrac{\pi}{2}$ su horizontalne asimptote.

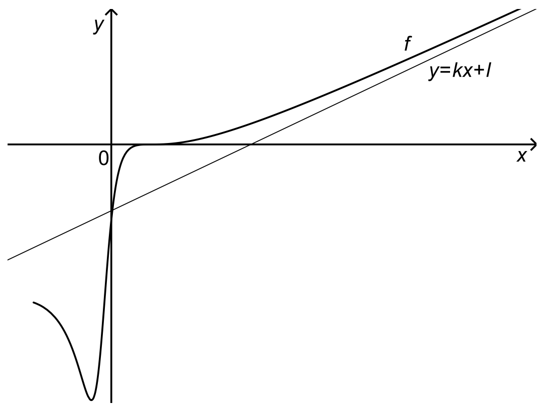


Slika 80: Pravci $y = -\frac{\pi}{2}$ i $y = \frac{\pi}{2}$ su horizontalne asimptote grafa funkcije f.

Kose asimptote

Pravac $y = kx + l$ je *desna kosa asimptota* grafa funkcije f ako je

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx - l) = 0.$$



Slika 81: Desna kosa asimptota

Pogledajmo kako se određuju koeficijenti k i l.
Iz $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-l)=0$ slijedi

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-kx-l}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{l}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k-\lim_{x\to\infty}\frac{l}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k, \end{aligned}$$

pa je

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Sada je

$$l=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Pravac $y=kx+l$ je *lijeva kosa asimptota* grafa funkcije f ako je

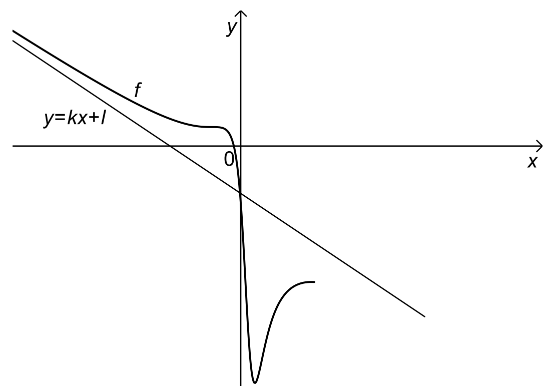
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx-l)=0.$$

Pritom koeficijente k i l određujemo iz formula

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad l=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx).$$

Uočimo da su horizontalne asimptote poseban slučaj kosih asimptota (ako za koeficijent smjera dobijemo $k=0$).

Napomena. U slučaju racionalnih funkcija lijeva kosa asimptota jednaka je desnoj.



Slika 82: Lijeva kosa asimptota

Primjer 35.

Naći asimptote grafa sljedećih funkcija.

1.) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

Rješenje

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Vertikalna asimptota

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{x^2+1}{x-1} = \infty$$

Pravac $x = 1$ je vertikalna asimptota.

Ispitajmo postojanje kose asimptote. U tu svrhu računamo sljedeći limes:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = 1$$

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1. \end{aligned}$$

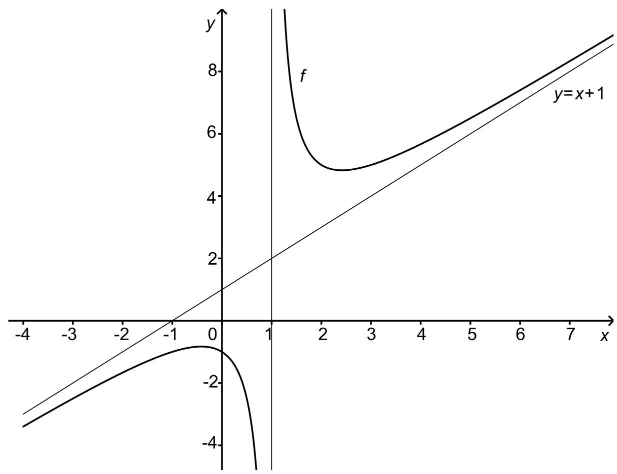
Stoga je pravac $y = x + 1$ desna kosa asimptota.

Slično se pokaže da vrijedi

$$k = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad l = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - kx) = 1,$$

pa je pravac $y = x + 1$ ujedno i lijeva kosa asimptota.

Na slici 83 je skiciran graf funkcije f.



Slika 83: Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

2.) $f(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{x}$

Rješenje

$\mathcal{D}(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$

Vertikalne asimptote

$\lim\limits_{x\to -2+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2+} \dfrac{\ln(x+2)}{x} = \infty$

Pravac $x = -2$ je vertikalna asimptota.

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\ln(x+2)}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln(x+2)}{x} = \infty$

Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota.

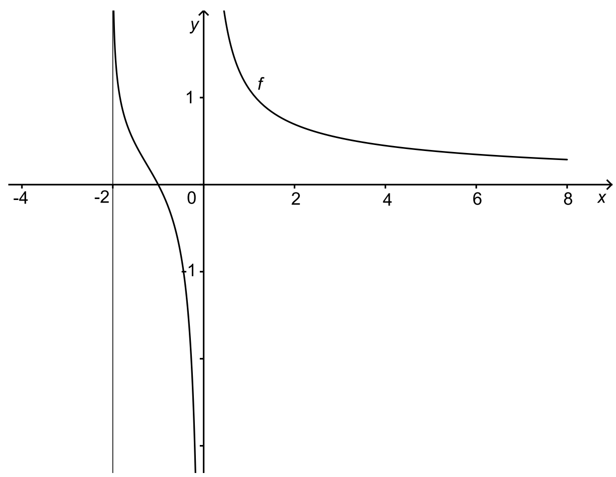
Kosa asimptota

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+2)}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{2x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x(x+2)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+2)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+2}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+2} = 0 \end{aligned}$$

Stoga je pravac $y=0$ horizontalna asimptota.

Na slici 84 je skiciran graf funkcije f.



Slika 84: Graf funkcije $f(x)=\frac{\ln(x+2)}{x}$

3.) $f(x)=x+\sqrt[3]{x}$

Rješenje

$\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$

Funkcija nema vertikalnih asimptota.

Kose asimptote:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right) = 1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 1 \\ l &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{x}-x) = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x} = \infty \end{aligned}$$

Funkcija nema desnu kosu asimptotu.

$$l = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt[3]{x}-x) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x} = -\infty$$

Funkcija nema lijevu kosu asimptotu.

Dakle, ova funkcija nema asimptota.

6.16 Osnovni teoremi diferencijalnog računa

Osnovni teoremi diferencijalnog računa omogućuju nam ispitivanje tijeka funkcije. Na osnovi tih teorema dobivamo postupak kako da, koristeći derivaciju funkcije, odredimo lokalne ekstreme, intervale monotonosti, točke infleksije, te intervale konveksnosti dane funkcije.

Uvedimo najprije pojam ekstrema, odnosno lokalnih ekstrema funkcije.

Ekstremi funkcije

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, te neka je dana funkcija $f : S \to \mathbb{R}$.

Kažemo da je $c \in S$ *točka maksimuma* funkcije f ako je $f(c) \geq f(x)$ za sve $x \in S$.

Točka $c \in S$ je *točka minimuma* funkcije f ako je $f(c) \leq f(x)$ za sve $x \in S$.

Točke maksimuma i minimuma funkcije f zovemo *točkama ekstrema* funkcije f.

Ako je $c \in S$ točka maksimuma funkcije f, tada je $f(c)$ *maksimum* funkcije f.

Ako je $c \in S$ točka minimuma funkcije f, tada je $f(c)$ *minimum* funkcije f.

Ako je $c \in S$ točka ekstrema funkcije f, tada je $f(c)$ *ekstrem* funkcije f.

Lokalni ekstremi funkcije

Neka je dana funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Kažemo da je $c \in (a, b)$ *točka lokalnog maksimuma* funkcije f ako postoji $\delta > 0$ tako da je $f(c) \geq f(x)$ za sve $x \in (c - \delta, c + \delta)$.

Kažemo da je $c \in (a, b)$ *točka lokalnog minimuma* funkcije f ako postoji $\delta > 0$ tako da je $f(c) \leq f(x)$ za sve $x \in (c - \delta, c + \delta)$.

Točke lokalnih maksimuma i lokalnih minimuma funkcije f zovemo *točkama lokalnih ekstrema* funkcije f.

Ako je $c \in (a, b)$ točka lokalnog maksimuma funkcije f, tada je $f(c)$ *lokalni maksimum* funkcije f.

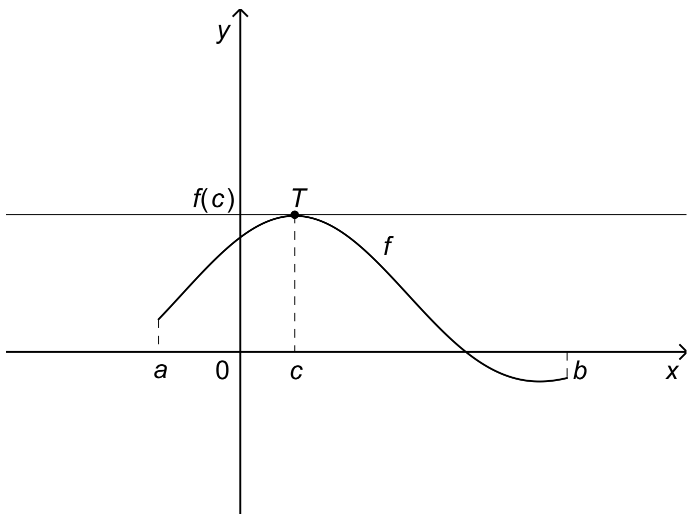
Ako je $c \in (a, b)$ točka lokalnog minimuma funkcije f, tada je $f(c)$ *lokalni minimum* funkcije f.

Ako je $c \in (a, b)$ točka lokalnog ekstrema funkcije f, tada je $f(c)$ *lokalni ekstrem* funkcije f.

Fermatov teorem (nužni uvjet za ekstrem)

Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki $c \in (a, b)$. Ako je c točka lokalnog ekstrema funkcije f, onda je $f'(c) = 0$.

Fermatov teorem nam kaže da ukoliko je c točka lokalnog ekstrema funkcije f, te postoji $f'(c)$, tada je tangenta na graf funkcije f u točki $T(c, f(c))$ paralelna s osi x.



Slika 85: Tangenta na graf funkcije f u točki $T(c, f(c))$ lokalnog ekstrema funkcije f paralelna je s osi x.

Točka $c \in (a, b)$ za koju je $f'(c) = 0$ zove se *stacionarna točka* funkcije f.

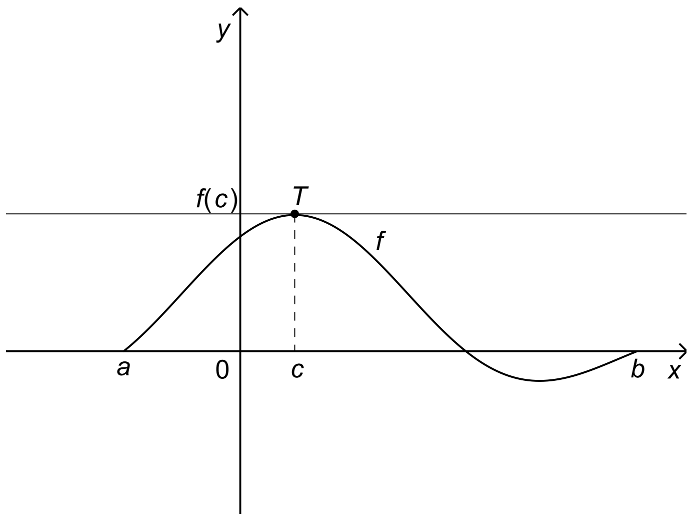
Prema tome, ako je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija, tada točke lokalnih ekstrema funkcije f treba tražiti među stacionarnim točkama.

Uočimo da općenito iz $f'(c) = 0$ ne slijedi da je c točka lokalnog ekstrema funkcije f. Primjerice, za funkciju $f(x) = x^3$ je njena derivacija $f'(x) = 3x^2$, pa je $x = 0$ stacionarna točka funkcije f. Međutim, $x = 0$ nije točka lokalnog ekstrema funkcije f.

Rolleov teorem

Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu (a, b). Ako je $f(a) = f(b) = 0$, onda postoji točka $c \in (a, b)$ takva da je $f'(c) = 0$.

Dakle, ako funkcija f zadovoljava uvjete Rolleovog teorema, onda postoji barem jedna točka $c \in (a, b)$ takva da je tangenta na graf funkcije f u točki $T(c, f(c))$ paralelna s osi x.



Slika 86: Tangenta na graf funkcije f u točki $T(c, f(c))$ paralelna je s osi x.

Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti

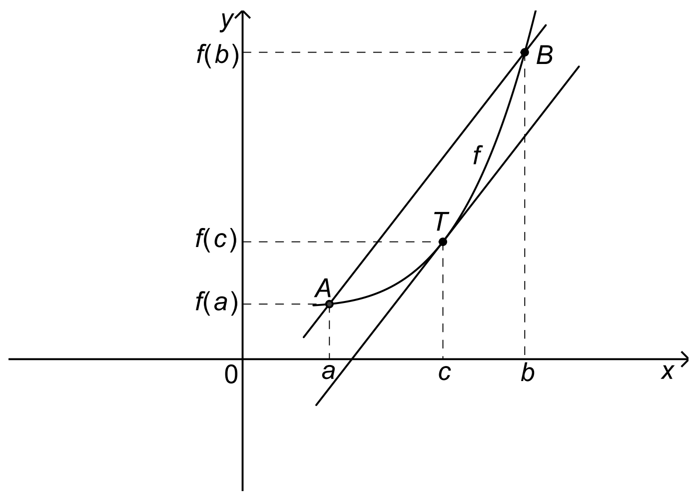
Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna na segmentu* $[a, b]$ *i derivabilna na intervalu* (a, b). *Tada postoji točka* $c \in (a, b)$ *tako da je*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Budući da je $k_{sek} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ koeficijent smjera sekante kroz točke $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$, a $k_{tan} = f'(c)$ koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki $T(c, f(c))$, to je geometrijska interpretacija Lagrangeovog teorema sljedeća:

Povučemo li sekantu kroz točke $A(a, f(a))$ *i* $B(b, f(b))$ *na grafu funkcije* f, *tada postoji barem jedna točka* $c \in (a, b)$ *takva da je tangenta na graf funkcije* f *u točki* $T(c, f(c))$ *paralelna sekanti kroz točke* A *i* B.

$$k_{tan} = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = k_{sek}$$



Slika 87: Tangenta na graf funkcije f u točki $T(c, f(c))$ paralelna je sekanti kroz točke $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$.

Kao posljedicu Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti imamo sljedeću tvrdnju.

Ako za derivabilnu funkciju $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *vrijedi* $f'(x) = 0$ *za sve* $x \in (a,b)$, *tada je* f *konstanta na intervalu* (a,b), *tj. postoji* $k \in \mathbb{R}$ *sa svojstvom* $f(x) = k$ *za sve* $x \in (a,b)$.

Primjer 36.

Primijeniti Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti na funkciju $f(x) = \ln x$ i interval $[1, e]$.

Rješenje

Funkcija $f(x) = \ln x$ je neprekidna na $[1, e]$ i derivabilna na $(1, e)$. Prema Lagrangeovom teoremu o srednjoj vrijednosti postoji točka $c \in (1, e)$ tako da je

$$f(e) - f(1) = f'(c)(e - 1).$$

Odavde je

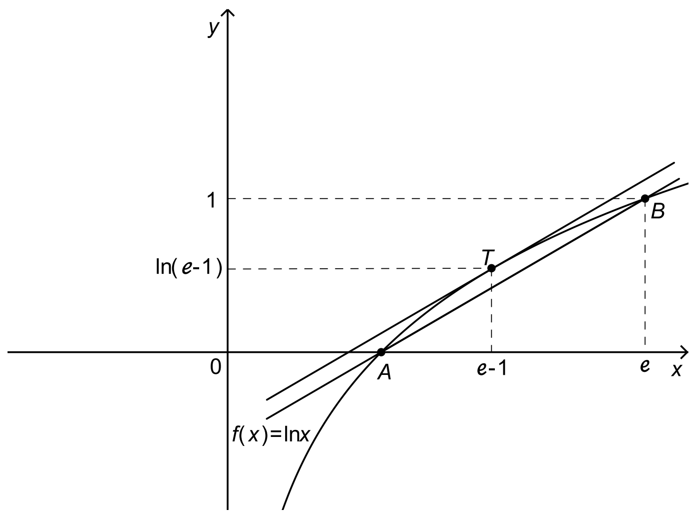
$$f'(c) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{\ln e - \ln 1}{e - 1} = \frac{1 - 0}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}.$$

Kako je $f'(x) = \frac{1}{x}$, to je $f'(c) = \frac{1}{c}$, pa slijedi

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{e-1},$$

odnosno $c = e - 1$.

Dakle, tangenta na graf funkcije f u točki $T(e-1, \ln(e-1))$ paralelna je sekanti kroz točke $A(1,0)$ i $B(e,1)$ na grafu funkcije f.



Slika 88: Tangenta na graf funkcije $f(x) = \ln x$ u točki $T(e-1, \ln(e-1))$ paralelna je sekanti kroz točke $A(1,0)$ i $B(e,1)$.

Primjer 37.

U kojoj točki parabole $f(x) = x^2$ je tangenta paralelna s pravcem koji prolazi točkama $A(0,0)$ i $B(2,4)$?

Rješenje

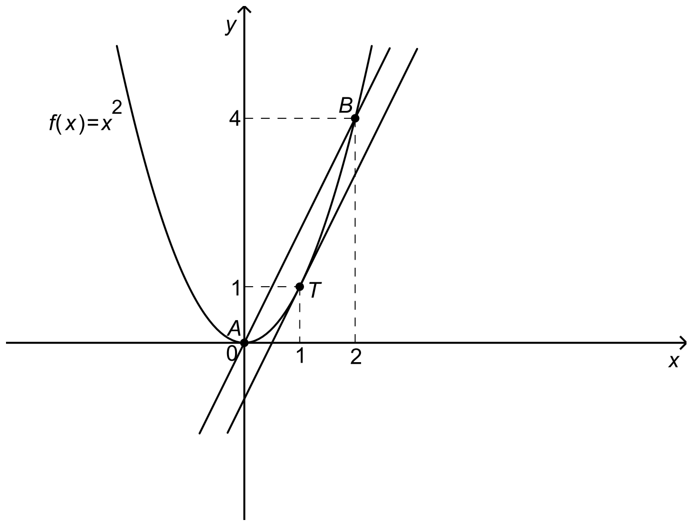
Primijenimo li Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti na funkciju f i interval $[0,2]$ zaključujemo da postoji $c \in (0,2)$ sa svojstvom

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2-0)$$

Odavde je

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{4-0}{2-0} = 2.$$

Kako je $f'(x) = 2x$, to je $f'(c) = 2c$, pa je stoga $2c = 2$, odnosno $c = 1$. Tražena točka je $T(c, f(c)) = T(1,1)$.



Slika 89: Tangenta na graf funkcije $f(x) = x^2$ u točki $T(1, 1)$ paralelna je sekanti kroz točke $A(0, 0)$ i $B(2, 4)$.

6.17 Intervali monotonosti. Lokalni ekstremi

Jedna od primjena Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti je određivanje intervala rasta i pada dane funkcije. Intervale rasta, odnosno pada funkcije, nazivamo *intervalima monotonosti*.

Intervale monotonosti i točke lokalnih ekstrema funkcije možemo odrediti ispitivanjem predznaka prve derivacije funkcije, o čemu govore sljedeći rezultati.

Teorem

Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilna na intervalu (a, b). Tada vrijede sljedeće tvrdnje.

(a) *Funkcija f je rastuća na (a, b) ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$ za sve $x \in (a, b)$.*

(b) *Funkcija f je padajuća na (a, b) ako i samo ako je $f'(x) \leq 0$ za sve $x \in (a, b)$.*

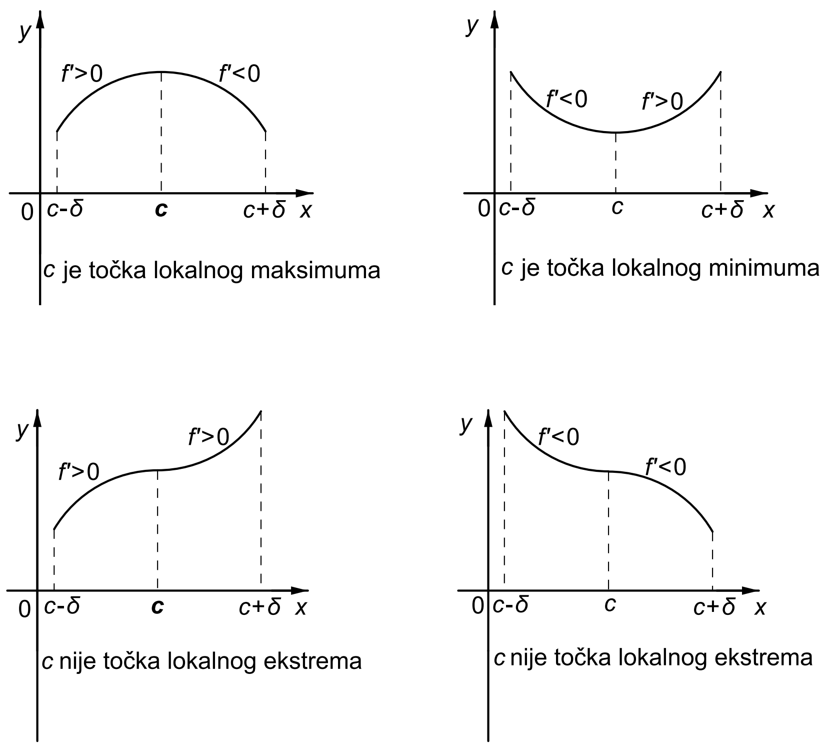
(c) *Ako je $f'(x) > 0$ za sve $x \in (a, b)$, tada je f strogo rastuća funkcija na (a, b).*

(d) *Ako je* $f'(x) < 0$ *za sve* $x \in (a, b)$, *tada je* f *strogo padajuća funkcija na* (a, b).

Teorem (dovoljan uvjet za ekstrem)
Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivabilna na intervalu* (a, b). *Neka je* $c \in (a, b)$ *stacionarna točka funkcije* f, *tj. neka vrijedi* $f'(c) = 0$.

(a) *Ako postoji* $\delta > 0$ *tako da je* $f'(x) > 0$ *za sve* $x \in (c - \delta, c)$ *i* $f'(x) < 0$ *za sve* $x \in (c, c + \delta)$, *tada je* c *točka lokalnog maksimuma funkcije* f.

(b) *Ako postoji* $\delta > 0$ *tako da je* $f'(x) < 0$ *za sve* $x \in (c - \delta, c)$ *i* $f'(x) > 0$ *za sve* $x \in (c, c + \delta)$, *tada je* c *točka lokalnog minimuma funkcije* f.



Slika 90: Dovoljan uvjet za ekstrem

Prema tome, da bismo odredili intervale monotonosti i točke lokalnih ekstrema funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, za koju pretpostavljamo da je derivabilna u svakoj točki intervala (a, b) i da je f' neprekidna na (a, b), postupamo ovako.

1.) Riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$, tj. odredimo stacionarne točke funkcije f.

2.) Neka su $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ stacionarne točke funkcije f. Tada su $I_0 = (a, c_1)$, $I_1 = (c_1, c_2), \ldots, I_{n-1} = (c_{n-1}, c_n)$, $I_n = (c_n, b)$ intervali monotonosti, jer na svakom od tih intervala funkcija f' ima stalan predznak. Funkcija f je strogo rastuća na svakom od tih intervala na kojem je $f' > 0$ i strogo padajuća na svakom od tih intervala na kojem je $f' < 0$.

3.) Ako pri prijelazu kroz stacionarnu točku c_i funkcija f' mijenja predznak, tada je c_i točka lokalnog ekstrema funkcije f. Pritom, ako je $f' > 0$ na intervalu I_{i-1} lijevo od točke c_i i $f' < 0$ na intervalu I_i desno od točke c_i, tada je c_i točka lokalnog maksimuma funkcije f. Ako je $f' < 0$ na intervalu I_{i-1} lijevo od točke c_i i $f' > 0$ na intervalu I_i desno od točke c_i, tada je c_i točka lokalnog minimuma funkcije f.

    Ako pri prijelazu kroz stacionarnu točku c_i funkcija f' ne mijenja predznak, tada c_i nije točka lokalnog ekstrema funkcije f.

Primjer 38.

Naći intervale monotonosti i lokalne ekstreme sljedećih funkcija.

1.) $f(x) = x^2 - 2x + 5$

Rješenje

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

Odredimo stacionarne točke funkcije f, tj. riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$.
$f'(x) = 2x - 2$, pa je stoga

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Dakle, $x = 1$ je jedina stacionarna točka funkcije f i njome je domena funkcije f podijeljena na dva intervala $(-\infty, 1)$ i $(1, \infty)$ na kojima funkcija f' ima stalan predznak.

Kako je $f'(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 1)$, to je f strogo padajuća funkcija na intervalu $(-\infty, 1)$.

Nadalje, $f'(x) > 0$ za $x \in (1, \infty)$, pa je f strogo rastuća funkcija na intervalu $(1, \infty)$.

Odavde slijedi da je $x = 1$ točka lokalnog minimuma funkcije f, budući da f' pri prijelazu iz intervala $(-\infty, 1)$ u interval $(1, \infty)$ mijenja predznak od negativnog u pozitivni.

Lokalni minimum je $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4$.

Tablično to prikazujemo ovako:

x	$-\infty$		1		∞
f'		$-$		$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

2.) $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 6x$

Rješenje

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$, pa su stacionarne točke funkcije f rješenja kvadratne jednadžbe $3x^2 + 3x - 6 = 0$, dakle $x_1 = -2$ i $x_2 = 1$.
Stoga funkcija f ima tri intervala monotonosti: $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$ i $(1, \infty)$.

Odredimo predznak funkcije f' na svakom od tih intervala.

x	$-\infty$		-2		1		∞
f'		$+$		$-$		$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dakle, f je strogo rastuća funkcija na intervalima $(-\infty, -2)$ i $(1, \infty)$ i strogo padajuća na intervalu $(-2, 1)$. Stoga je $x = -2$ točka lokalnog maksimuma, a $x = 1$ točka lokalnog minimuma funkcije f. Lokalni maksimum funkcije f je $f(-2) = 10$, dok je lokalni minimum $f(1) = -\frac{7}{2}$.

3.) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Rješenje

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

Kako je $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$, to su stacionarne točke funkcije f rješenja jednadžbe $x^2 - 1 = 0$, dakle $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.
Intervali monotonosti su: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, \infty)$.

Odredimo predznak funkcije f' na svakom od tih intervala.

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
f'		$+$		$-$		$-$		$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

f je strogo rastuća funkcija na intervalima $(-\infty,-1)$ i $(1,\infty)$.
f je strogo padajuća funkcija na intervalima $(-1,0)$ i $(0,1)$.

$x=-1$ je točka lokalnog maksimuma funkcije f; lokalni maksimum iznosi $f(-1)=-2$.

$x=1$ je točka lokalnog minimuma funkcije f; lokalni minimum iznosi $f(1)=2$.

Osim ispitivanja predznaka prve derivacije u okolini stacionarne točke, karakter stacionarne točke moguće je odrediti i ispitivanjem predznaka druge derivacije u samoj stacionarnoj točki. O tome govori sljedeći rezultat.

Teorem (dovoljan uvjet za ekstrem)

Ako je c stacionarna točka funkcije f, tj. $f'(c)=0$, te vrijedi $f''(c)\neq 0$, tada je c točka lokalnog ekstrema funkcije f.

Pritom, ako je $f''(c)<0$, onda je c točka lokalnog maksimuma funkcije f.

Ako je $f''(c)>0$, onda je c točka lokalnog minimuma funkcije f.

Primjer 39.

Naći lokalne ekstreme sljedećih funkcija.

1.) $f(x)=2x^2-8x-1$

Rješenje

$\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$

$f'(x)=4x-8$

Stacionarna točka funkcije f je rješenje jednadžbe $f'(x)=0$, što iznosi $x=2$.

Odredimo predznak druge derivacije u točki $x=2$.
$f''(x)=4$, pa je stoga $f''(2)=4>0$.
Dakle, $x=2$ je točka lokalnog minimuma funkcije f.
Lokalni minimum iznosi $f(2)=-9$.

2.) $f(x)=x^2-x^4$

Rješenje

$\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$

$f'(x)=2x-4x^3=2x(1-2x^2)$

Ova funkcija ima tri stacionarne točke: $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = 0$ i $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$f''(x) = 2 - 12x^2$

Odredimo predznak druge derivacije u stacionarnim točkama.

$f''(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = f''(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -4 < 0$

$f''(0) = 2 > 0$

Stoga su $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ točke lokalnog maksimuma funkcije f. Lokalni maksimum u obje točke iznosi $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{4}$.

Nadalje, $x_2 = 0$ je točka lokalnog minimuma funkcije f. Lokalni minimum iznosi $f(0) = 0$.

3.) $f(x) = (x+1)e^x$

Rješenje

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

Stoga je $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Dakle, $x = -2$ je stacionarna točka funkcije f.

$f''(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$

$f''(-2) = e^{-2} > 0$

Prema tome, $x = -2$ je točka lokalnog minimuma funkcije f. Lokalni minimum iznosi $f(-2) = -e^{-2}$.

4.) $f(x) = x \ln x$

Rješenje

$\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$

$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

Prema tome, $x = e^{-1}$ je stacionarna točka funkcije f.

$f''(x) = \frac{1}{x}$

Kako je $f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} = e > 0$ zaključujemo da je $x = e^{-1}$ točka lokalnog minimuma funkcije f. Lokalni minimum iznosi $f(e^{-1}) = -e^{-1}$.

6.18 Konveksnost i konkavnost. Točke infleksije

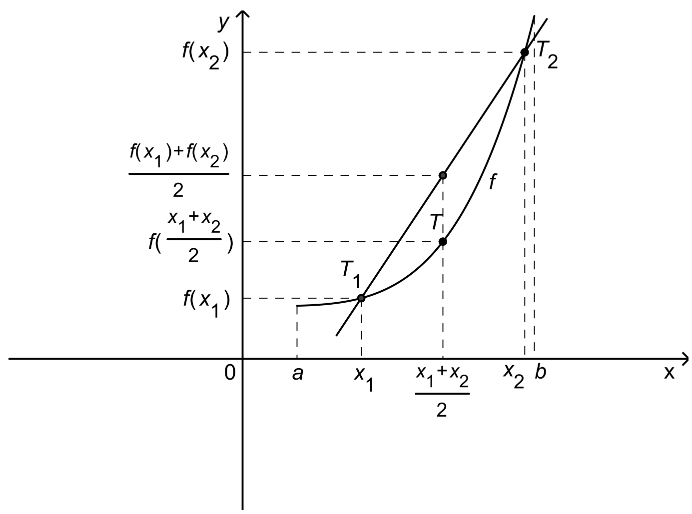
Funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ je *konveksna* na intervalu (a,b) ako za sve $x_1,x_2\in(a,b)$ vrijedi

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \tag{1}$$

Funkcija f je *strogo konveksna* ako u (1) vrijedi stroga nejednakost.

Geometrijsko značenje konveksnosti

Za sve točke $x_1,x_2\in(a,b)$ graf funkcije f leži ispod spojnice točaka $T_1(x_1,f(x_1))$ i $T_2(x_2,f(x_2))$.



Slika 91: Graf konveksne funkcije

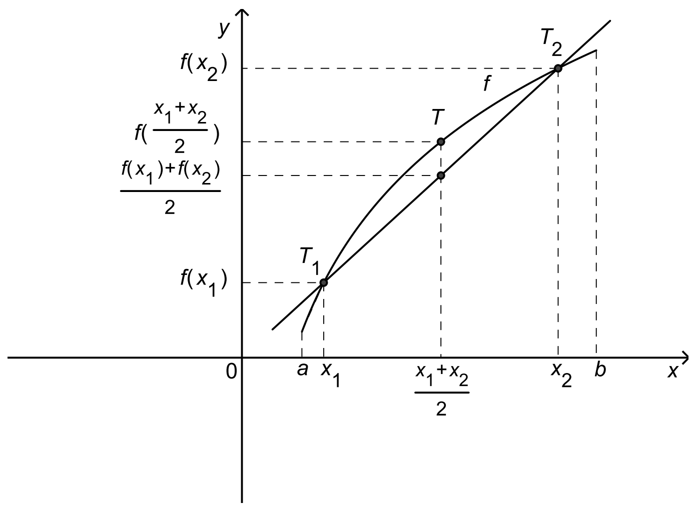
Funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ je *konkavna* na intervalu (a,b) ako za sve $x_1,x_2\in(a,b)$ vrijedi

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \tag{2}$$

Funkcija f je *strogo konkavna* ako u (2) vrijedi stroga nejednakost.

Geometrijsko značenje konkavnosti

Za sve točke $x_1,x_2\in(a,b)$ graf funkcije f leži iznad spojnice točaka $T_1(x_1,f(x_1))$ i $T_2(x_2,f(x_2))$.



Slika 92: Graf konkavne funkcije

Konkavnost, odnosno konveksnost dane funkcije može se odrediti ispitivanjem predznaka druge derivacije funkcije f.

Teorem

Neka funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ima drugu derivaciju na intervalu (a, b). Tada vrijede sljedeće tvrdnje.

(a) *Funkcija f je konveksna na (a, b) ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za sve $x \in (a, b)$.*

(b) *Funkcija f je konkavna na (a, b) ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$ za sve $x \in (a, b)$.*

(c) *Ako je $f''(x) > 0$ za sve $x \in (a, b)$, tada je f strogo konveksna na (a, b).*

(d) *Ako je $f''(x) < 0$ za sve $x \in (a, b)$, tada je f strogo konkavna na (a, b).*

Primjer 40.

1.) $f(x) = e^x$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$

Kako je $f''(x) > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, to je funkcija f strogo konveksna na cijelom skupu $\mathbb{R}$.

2.) $f(x) = \ln x$

$\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Kako je $f''(x) < 0$ za sve $x \in (0, \infty)$, to je funkcija f strogo konkavna na intervalu $(0, \infty)$.

Točka c je *točka infleksije* (*točka pregiba*) funkcije f ako postoji $\delta > 0$ tako da je f strogo konveksna na $(c-\delta, c)$ i strogo konkavna na $(c, c+\delta)$ ili obrnuto, strogo konkavna na $(c-\delta, c)$ i strogo konveksna na $(c, c+\delta)$.

Teorem (nužni uvjet za točku infleksije)

Neka funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ima drugu derivaciju u točki $c \in (a,b)$. Ako je c točka infleksije funkcije f, onda je $f''(c) = 0$.

Teorem (dovoljan uvjet za točku infleksije)

Neka funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ima drugu derivaciju na intervalu (a,b). Ako za točku $c \in (a,b)$ vrijedi $f''(c) = 0$, te ako funkcija f'' mijenja predznak pri prijelazu kroz točku c, onda je c točka infleksije funkcije f.

Prema tome, ako za funkciju $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ postoji druga derivacija na intervalu (a,b) i ako je f'' neprekidna na (a,b), tada intervale konveksnosti i konkavnosti, te točke infleksije funkcije f određujemo ovako.

1.) Riješimo jednadžbu $f''(x) = 0$.

2.) Neka su $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ rješenja jednadžbe $f''(x) = 0$. Tada na svakom od intervala $I_0 = (a, c_1)$, $I_1 = (c_1, c_2), \ldots, I_{n-1} = (c_{n-1}, c_n)$, $I_n = (c_n, b)$ funkcija f'' ima stalan predznak. Funkcija f je strogo konveksna na svakom od tih intervala na kojem je $f'' > 0$ i strogo konkavna na svakom od tih intervala na kojem je $f'' < 0$.

3.) Ako pri prijelazu kroz točku c_i funkcija f'' mijenja predznak, tada je c_i točka infleksije funkcije f.

Primjer 41.

Naći intervale konveksnosti i konkavnosti, te točke infleksije sljedećih funkcija.

1.) $f(x) = x^3$

Rješenje

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$

Stoga je $x = 0$ rješenje jednadžbe $f''(x) = 0$.

Točkom $x = 0$ domena funkcije f podijeljena je na intervale $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ i na svakom od njih funkcija f'' ima stalan predznak.

Kako je $f''(x) < 0$ na $(-\infty, 0)$, to je f strogo konkavna funkcija na intervalu $(-\infty, 0)$.

Kako je $f''(x) > 0$ na $(0, \infty)$, to je f strogo konveksna funkcija na intervalu $(0, \infty)$.

Tablično to prikazujemo ovako:

x	$-\infty$		0		∞
f''		$-$		$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

Budući da funkcija f mijenja predznak prolaskom kroz točku $x = 0$, to je $x = 0$ točka infleksije funkcije f.

2.) $f(x) = (1 + x^2)e^x$

Rješenje

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2xe^x + (1 + x^2)e^x = (x^2 + 2x + 1)e^x$

$f''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x + 1)e^x = (x^2 + 4x + 3)e^x$

Stoga je $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$. Dakle, nultočke funkcije f'' su $x_1 = -3$ i $x_2 = -1$.

Točkama $x_1 = -3$ i $x_2 = -1$ domena funkcije f podijeljena je na tri intervala $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$ i $(-1, \infty)$ na kojima funkcija f'' ima stalan predznak.

Odredimo predznak funkcije f'' na svakom od tih intervala.

x	$-\infty$		-3		-1		∞
f''		$+$		$-$		$+$	
f		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

Kako je $f''(x) > 0$ na $(-\infty, -3)$ i $(-1, \infty)$, to je f strogo konveksna funkcija na $(-\infty, -3)$ i $(-1, \infty)$.

Kako je $f''(x) < 0$ na $(-3, -1)$, to je f strogo konkavna funkcija na $(-3, -1)$.

Budući da funkcija f'' mijenja predznak pri prijelazu kroz točke $x_1 = -3$ i $x_2 = -1$, to su $x_1 = -3$ i $x_2 = -1$ točke infleksije funkcije f.

6.19 Tijek funkcije

Da bismo ispitali tijek dane funkcije potrebno je:

-odrediti (prirodno) područje definicije funkcije;
-ispitati svojstva parnosti, neparnosti, periodičnosti;
-ispitati postojanje nultočaka;
-ispitati postojanje asimptota;
-odrediti intervale monotonosti, te ispitati postojanje lokalnih ekstrema;
-odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti, te ispitati postojanje točaka infleksije.

Primjer 42.

Nacrtati grafove sljedećih funkcija.

1.) $f(x) = x^4 + 4x^3$

Rješenje

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

$f(x) = x^4 + 4x^3 = x^3(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = -4$ ili $x = 0$, pa su -4 i 0 nultočke ove funkcije.

Funkcija nema vertikalnih asimptota.

Ispitajmo postojanje kosih asimptota.

$k_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(x^3 + 4x^2) = \infty \notin \mathbb{R}$

$k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 + 4x^2) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\Big(1 + \dfrac{4}{x}\Big) = -\infty \notin \mathbb{R}$

Zaključujemo da funkcija nema kosih asimptota. (Napomenimo da ovaj zaključak vrijedi za svaki polinom čiji je stupanj veći ili jednak dva; dakle takav polinom neće imati kosih asimptota.)

Odredimo intervale monotonosti i ispitajmo postojanje lokalnih ekstrema funkcije f. U tu svrhu najprije pronađimo stacionarne točke funkcije f, tj. nultočke prve derivacije funkcije f.

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

Sada je $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x+3) = 0$. Stoga su $x = -3$ i $x = 0$ stacionarne točke funkcije f. Tim točkama je domena funkcije f, što je u našem slučaju skup realnih brojeva, podijeljena na tri intervala monotonosti: $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$ i $(0, \infty)$. Na svakom od tih intervala derivacija f' ima stalan predznak. Ispitivanjem predznaka funkcije f' ustanovit ćemo da li funkcija f raste ili pada na svakom pojedinom intervalu.

x	$-\infty$		-3		0		∞
f'		$-$		$+$		$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Budući da je $f' < 0$ na $(-\infty, -3)$, to je na tom intervalu funkcija f strogo padajuća. Također, f je strogo rastuća funkcija na $(-3, 0)$ i $(0, \infty)$, jer je $f' > 0$ na tim intervalima. Kako rubna točka 0 pripada domeni funkcije f, kažemo da je $(-3, \infty)$ interval rasta ove funkcije.
$x = -3$ je točka lokalnog minimuma funkcije f. Lokalni minimum iznosi $f(-3) = -27$.

Za određivanje intervala konveksnosti i konkavnosti funkcije f, te točaka infleksije potrebno je izračunati drugu derivaciju funkcije f, te zatim pronaći njene nultočke.

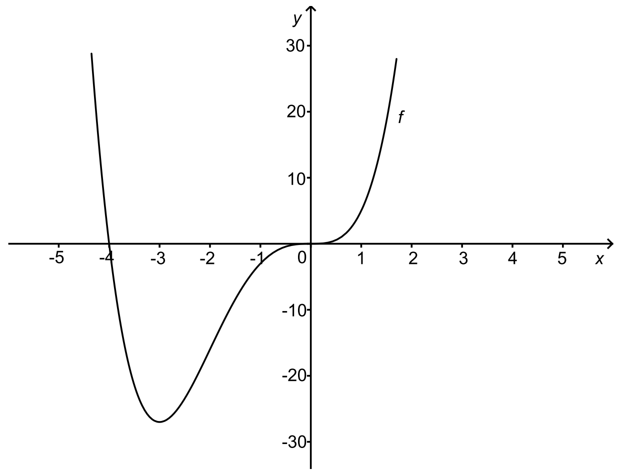
$f''(x) = 12x^2 + 24x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x(x + 2) = 0$, pa su $x = -2$ i $x = 0$ nultočke druge derivacije funkcije f. Njima je domena od f podijeljena na tri intervala: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ i $(0, \infty)$. Odredimo predznak funkcije f'' na svakom od tih intervala.

x	$-\infty$		-2		0		∞
f''		$+$		$-$		$+$	
f		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

Na $(-\infty, -2)$ i $(0, \infty)$ je $f'' > 0$, pa je f strogo konveksna funkcija na tim intervalima. Na $(-2, 0)$ je $f'' < 0$, pa je f strogo konkavna funkcija na tom intervalu.
Kako f'' mijenja predznak prolaskom kroz točke -2 i 0, to su -2 i 0 točke infleksije funkcije f. Vrijednosti funkcije f u njima iznose $f(-2) = -16$ i $f(0) = 0$.

Na slici 93 je skiciran graf funkcije f.



Slika 93: Graf funkcije $f(x) = x^4 + 4x^3$

2.) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Rješenje

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

Uočimo da je f neparna funkcija, tj. $f(-x) = -f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Stoga je dovoljno proučiti ponašanje funkcije na intervalu $[0, \infty)$, jer je njezin graf centralno simetričan s obzirom na ishodište.

Točka $x = 0$ je nultočka ove funkcije.

Funkcija nema vertikalnih asimptota.

Ispitajmo postojanje kose asimptote.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0.$

$l = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0.$

Zaključujemo da je $y = 0$ horizontalna asimptota.

Odredimo intervale monotonosti i ispitajmo postojanje lokalnih ekstrema funkcije f.

$$f'(x) = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}.$$

Kako je $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+1 = 0$, to je $x = 1$ stacionarna točka funkcije f na intervalu $[0, \infty)$. Tom točkom je interval $(0, \infty)$ podijeljen na dva intervala monotonosti: $(0, 1)$ i $(1, \infty)$.

Odredimo predznak funkcije f' na tim intervalima.

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & 1 & & \infty \\ \hline f' & & + & & - & \\ f & & \nearrow & & \searrow & \end{array}$$

Stoga je f strogo rastuća funkcija na $(0,1)$ i strogo padajuća funkcija na $(1,\infty)$.
$x = 1$ je točka lokalnog maksimuma funkcije; lokalni maksimum iznosi $f(1) = \frac{1}{2}$.
Uočimo da zbog neparnosti funkcije f slijedi da je f strogo padajuća na $(-\infty,-1)$ i strogo rastuća na $(-1,0)$, pa je $x = -1$ točka lokalnog minimuma funkcije f. Lokalni minimum iznosi $f(-1) = -\frac{1}{2}$.

Odredimo intervale konveksnosti i konkavnosti, te ispitajmo postojanje točaka infleksije funkcije f.

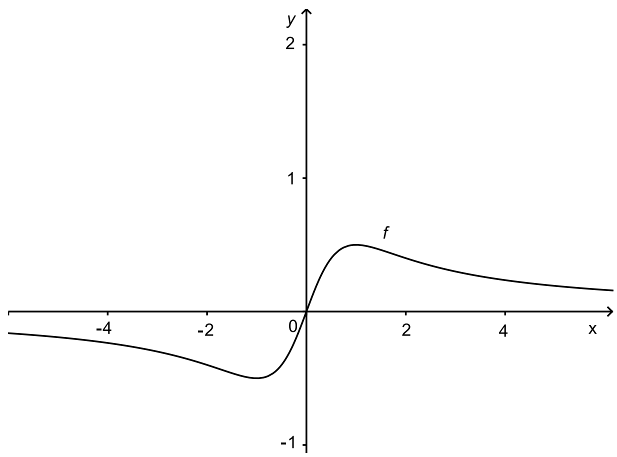
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x(x^2+1)^2 - (-x^2+1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2x(x^2+1) - 4x(-x^2+1)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Rješenja jednadžbe $f''(x) = 0$ na intervalu $[0,\infty)$ su $x_1 = 0$ i $x_2 = \sqrt{3}$.
Odredimo predznak funkcije f'' na intervalima $(0,\sqrt{3})$ i $(\sqrt{3},\infty)$.

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & \sqrt{3} & & \infty \\ \hline f'' & & - & & + & \\ f & & \frown & & \smile & \end{array}$$

Funkcija f je strogo konkavna na $(0,\sqrt{3})$ i strogo konveksna na $(\sqrt{3},\infty)$.
Kako je f neparna funkcija, zaključujemo da je f strogo konkavna na intervalu $(-\infty,-\sqrt{3})$ i strogo konveksna na $(-\sqrt{3},0)$. Stoga f ima tri točke infleksije: $-\sqrt{3}$, 0 i $\sqrt{3}$. Vrijednosti funkcije u tim točkama iznose redom $f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, $f(0) = 0$ i $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Na slici 94 je skiciran graf funkcije f.



Slika 94: Graf funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

3.) $f(x) = x^2 + 2\ln x$

Rješenje

$\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$

Ispitajmo postojanje vertikalne asimptote.

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} (x^2 + 2\ln x) = -\infty.$

Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota.

Ispitajmo postojanje kose asimptote.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(x + \frac{2\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x + \dfrac{2}{x}}{1} = \infty \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

Prema tome, funkcija nema kosih asimptota.

Odredimo intervale monotonosti i ispitajmo postojanje lokalnih ekstrema funkcije f.

$f'(x) = 2x + \dfrac{2}{x} > 0$ za sve $x \in (0, \infty)$.

Stoga je f strogo rastuća funkcija na $(0, \infty)$.

Funkcija f nema lokalnih ekstrema.

Odredimo intervale konveksnosti i konkavnosti, te ispitajmo postojanje točaka infleksije funkcije f.

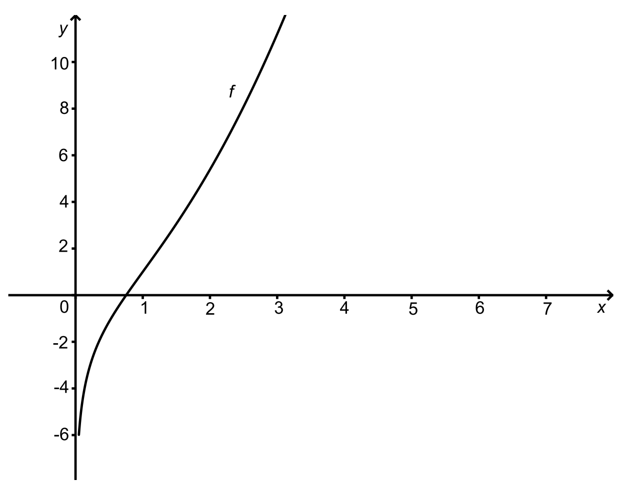
$$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^2-1)}{x^2}$$

Stoga je $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. (Naime, točka $x = -1$ ne pripada području definicije funkcije f.)
Točkom $x = 1$ domena funkcije f podijeljena je na intervale $(0,1)$ i $(1,\infty)$ na kojima funkcija f'' ima stalan predznak.

x	0		1		∞
f''		$-$		$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

Kako je $f''(x) < 0$ na $(0,1)$, to je f strogo konkavna funkcija na $(0,1)$.
Kako je $f''(x) > 0$ na $(1,\infty)$, to je f strogo konveksna funkcija na $(1,\infty)$.
Budući da funkcija f'' mijenja predznak prolaskom kroz točku $x = 1$, to je $x = 1$ točka infleksije funkcije f.
Vrijednost funkcije f u točki infleksije je $f(1) = 1$.

Na slici 95 je skiciran graf funkcije f.



Slika 95: Graf funkcije $f(x) = x^2 + 2\ln x$

4.) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-2}$

Rješenje

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Funkcija f nema nultočaka.

Ispitajmo postojanje vertikalne asimptote.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^x}{x-2} = \frac{e^2}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{e^x}{x-2} = \frac{e^2}{+0} = \infty$$

Zaključujemo da je pravac $x = 2$ vertikalna asimptota ove funkcije.

Ispitajmo postojanje kosih asimptota.

$$k_1 = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x(x-2)} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$$l_1 = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x-2} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

Pravac $y = k_1 x + l_1 = 0$ je horizontalna asimptota.

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2-2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

Funkcija nema desnu kosu asimptotu.

Odredimo intervale monotonosti i ispitajmo postojanje lokalnih ekstrema funkcije f.

$$f'(x) = \frac{e^x(x-2) - e^x}{(x-2)^2} = \frac{e^x(x-3)}{(x-2)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 3$, pa je $x = 3$ stacionarna točka funkcije f. Domena funkcije f podijeljena je na tri intervala monotonosti: $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ i $(3, \infty)$. Na svakom od tih intervala funkcija f' ima stalan predznak.

x	$-\infty$		2		3		∞
f'		$-$		$-$		$+$	
f		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Kako je $f' < 0$ na $(-\infty, 2)$ i $(2, 3)$, to na ovim intervalima funkcija f strogo pada. Nadalje, na $(3, \infty)$ je $f' > 0$, pa na tom intervalu f strogo raste.

$x = 3$ je točka lokalnog minimuma funkcije f. Vrijednost funkcije f u toj točki je $f(3) = e^3$.

Odredimo intervale konveksnosti i konkavnosti, te ispitajmo postojanje točaka infleksije funkcije f.

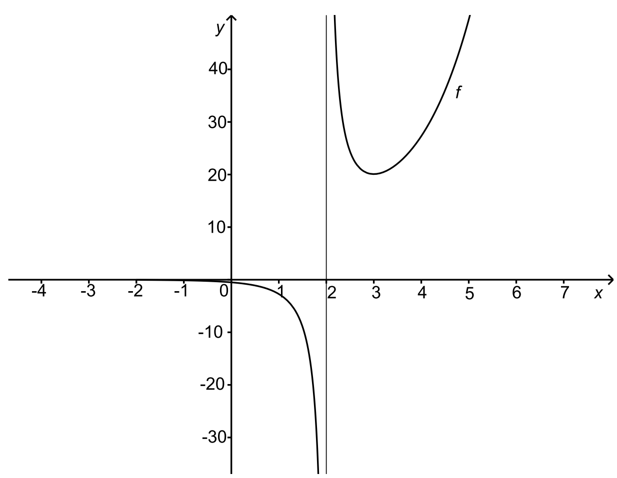
$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{[e^x(x-3)+e^x](x-2)^2 - e^x(x-3)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} \\
&= \frac{e^x[(x-2)^2 - 2(x-3)]}{(x-2)^3} = \frac{e^x(x^2-6x+10)}{(x-2)^3} \\
&= \frac{e^x[(x-3)^2+1]}{(x-2)^3}
\end{aligned}
$$

Funkcija f'' nema nultočaka. Stoga f'' ima stalan predznak na svakom od intervala $(-\infty, 2)$ i $(2, \infty)$ čija unija čini domenu funkcije f.

x	$-\infty$		2		∞
f''		$-$		$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

Budući da je $f'' < 0$ na $(-\infty, 2)$, to je na tom intervalu f strogo konkavna funkcija. Na $(2, \infty)$ je f strogo konveksna funkcija, jer je na tom intervalu $f'' > 0$. Funkcija f nema točaka infleksije. (Uočite da $2 \notin \mathcal{D}(f)$.)

Na slici 96 je skiciran graf funkcije f.



Slika 96: Graf funkcije $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$

5.) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Rješenje

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

Uočimo da je f parna funkcija, pa je dovoljno proučiti ponašanje funkcije

f na intervalu $[0,\infty)$, budući da je njen graf osno simetričan s obzirom na os y.

Funkcija f nema nultočaka.

Funkcija f nema vertikalnih asimptota.

Ispitajmo postojanje kosih asimptota.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$$

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\\ &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0\end{aligned}$$

Prema tome, pravac $y=kx+l=x$ je desna kosa asimptota. Zbog osno simetričnosti grafa funkcije f s obzirom na os y zaključujemo da je pravac $y=-x$ lijeva kosa asimptota od f.

Odredimo intervale monotonosti i ispitajmo postojanje lokalnih ekstrema funkcije f.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

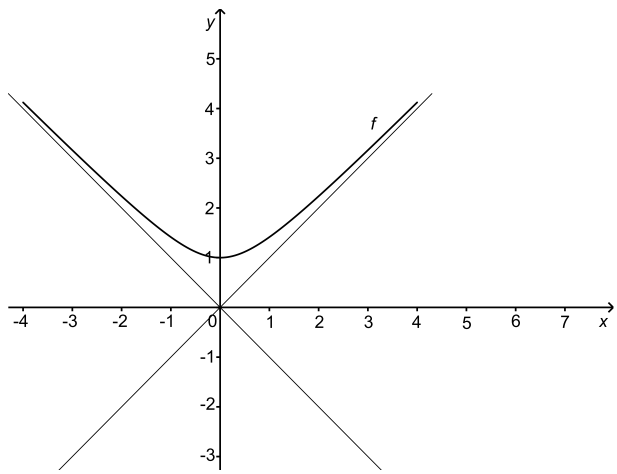
$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$, pa je $x=0$ stacionarna točka funkcije f. Kako je $f'(x)>0$ na intervalu $(0,\infty)$, to je funkcija f strogo rastuća na $(0,\infty)$. Stoga je zbog parnosti funkcije, f strogo padajuća na intervalu $(-\infty,0)$. Odavde slijedi da je $x=0$ točka minimuma funkcije f. Vrijednost funkcije u toj točki je $f(0)=1$.

Odredimo intervale konveksnosti i konkavnosti, te ispitajmo postojanje točaka infleksije funkcije f.

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$f''(x)>0$ za sve $x\in\mathbb{R}$, pa je f strogo konveksna funkcija na skupu realnih brojeva. Stoga f nema točaka infleksije.

Na slici 97 je skiciran graf funkcije f.



Slika 97: Graf funkcije $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

7 Neodređeni integral

7.1 Pojam neodređenog integrala

U prethodnom smo poglavlju pokazali da je za funkciju $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, derivabilnu u svakoj točki intervala (a, b), definirana nova funkcija na (a, b), koju smo označavali s f' i zvali prvom derivacijom funkcije f.

Sada se postavlja obratno pitanje.

Neka je dana funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Postoji li funkcija $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in (a, b)$?

Takvu funkciju F (ukoliko postoji) nazivamo *primitivnom funkcijom* funkcije f na intervalu (a, b).

Pogledajmo to na sljedećem primjeru.

Primjer 1.

1.) $f(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$

Za funkciju $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$ vrijedi $F_1'(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Dakle, F_1 je primitivna funkcija od f na $\mathbb{R}$.

Međutim, F_1 nije jedina funkcija s tim svojstvom. Stavimo li npr. $F_2(x) = \frac{x^2}{2} + 3$, tada je očito $F_2'(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Prema tome, i F_2 je primitivna funkcija od f na $\mathbb{R}$.

2.) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty)$

Za funkciju $F_1(x) = \ln x$ vrijedi $F_1'(x) = f(x)$ za sve $x \in (0, \infty)$.

Isto svojstvo ima i funkcija $F_2(x) = \ln x + 5$. Naime, $F_2'(x) = f(x)$ za sve $x \in (0, \infty)$.

Zaključujemo da su F_1 i F_2 primitivne funkcije od f na $(0, \infty)$.

Prethodni primjer nam pokazuje da funkcija f može imati više od jedne primitivne funkcije. Štoviše, ako je $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, tada je i svaka funkcija $\tilde{F} : (a, b) \to \mathbb{R}$ oblika $\tilde{F}(x) = F(x) + c$, gdje je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta, također primitivna funkcija od f na intervalu (a, b). Naime,

$$\tilde{F}'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + c' = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Vrijedi i obratno; ako su F i $\tilde{F}$ dvije primitivne funkcije od f na intervalu (a, b), tada iz $\tilde{F}'(x) = F'(x) (= f(x))$ slijedi da postoji konstanta $c \in \mathbb{R}$ takva da je $\tilde{F}(x) - F(x) = c$ za sve $x \in (a, b)$. (To je posljedica Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti; v. točku 6.16.)

Drugim riječima, ako za danu funkciju $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ postoji primitivna funkcija na intervalu (a, b), onda takvih (primitivnih) funkcija ima beskonačno mnogo. Pritom se svake dvije primitivne funkcije razlikuju za konstantu.

Skup svih primitivnih funkcija dane funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ nazivamo *neodređenim integralom* funkcije f na intervalu (a, b).
Za neodređeni integral koristimo oznaku $\int f(x)dx$.
Dakle,

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\},$$

gdje je F jedna primitivna funkcija od f na (a, b). Kraće zapisujemo

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Prema tome,

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Ako za funkciju $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ postoji neodređeni integral na (a, b), tada kažemo da je f *integrabilna* na (a, b).
U izrazu $\int f(x)dx = F(x) + c$, funkciju f nazivamo *podintegralnom funkcijom*, x nazivamo *varijablom integracije*, dx *diferencijalom argumenta*, a c *konstantom integracije*.

Svojstva neodređenih integrala

1.) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int f(x)dx = \Big(\int f(x)dx\Big)' = f(x)$

2.) $\displaystyle \int f'(x)dx = f(x) + c$

3.) $\displaystyle \int af(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a \in \mathbb{R}$

4.) $\displaystyle \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Tablica neodređenih integrala

1.) $\displaystyle \int 0dx = c$

2.) $\displaystyle \int dx = x + c$

3.) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1)$

4.) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

5.) $\int e^x dx = e^x + c$

6.) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

7.) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

8.) $\int \cos x dx = \sin x + c$

9.) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + c$

10.) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg } x + c$

11.) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c \quad (a > 0)$

12.) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{arctg } \frac{x}{a} + c \quad (a \neq 0)$

13.) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + c \quad (a \neq 0)$

14.) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c \quad (a > 0)$

15.) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\text{tg } \frac{x}{2}\right| + c$

16.) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$

Primjer 2.

Koristeći svojstva neodređenih integrala i tablicu integrala integrirati sljedeće funkcije.

1.) $\int 2x^3 dx = 2\int x^3 dx = 2\frac{x^4}{4} + c = \frac{1}{2}x^4 + c$

$$
\begin{aligned}
2.)\int(12x^5+4x-7)dx &= 12\int x^5dx+4\int xdx-7\int dx\\
&= 12\frac{x^6}{6}+4\frac{x^2}{2}-7x+c\\
&= 2x^6+2x^2-7x+c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3.)\int x(x+1)(x-2)dx &= \textstyle\int(x^3-x^2-2x)dx\\
&= \int x^3dx-\int x^2dx-2\int xdx\\
&= \frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+c\\
&= \frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2+c
\end{aligned}
$$

$$4.)\int\left(\sqrt{x}-\frac{5}{x}\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx-5\int\frac{dx}{x}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-5\ln|x|+c$$

$$
\begin{aligned}
5.)\int\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}dx &= \int\frac{x}{\sqrt[3]{x}}dx+\int\frac{4}{\sqrt[3]{x}}dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx+4\int x^{-\frac{1}{3}}dx\\
&= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+4\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+c=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+6x^{\frac{2}{3}}+c
\end{aligned}
$$

$$6.)\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}+c$$

$$7.)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}=\ln|x+\sqrt{x^2+5}|+c$$

$$8.)\int\frac{dx}{x^2-10}=\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|+c$$

$$
\begin{aligned}
9.)\int\frac{dx}{3x^2+5} &= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+\frac{5}{3}}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{5}{3}}}+c\\
&= \frac{\sqrt{15}}{15}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}\,x}{5}+c
\end{aligned}
$$

$$10.)\int 2^xe^xdx=\int(2e)^xdx=\frac{(2e)^x}{\ln(2e)}+c=\frac{(2e)^x}{1+\ln 2}+c$$

U prethodnom primjeru smo zadane funkcije integrirali neposredno, služeći se tablicom neodređenih integrala, te koristeći svojstva neodređenih integrala.

Za izračunavanje kompliciranijih integrala elementarnih funkcija postoje razne metode koje nam omogućuju svođenje zadanog integrala na tablični integral. U daljnjem razmatramo neke od tih metoda.

Međutim, istaknimo da postoje elementarne funkcije čije primitivne funkcije ne moraju biti elementarne funkcije. Primjerice, takve su funkcije

$$x \mapsto e^{-x^2}, \quad x \mapsto \frac{1}{\ln x}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{x}, \quad x \mapsto \sin(x^2), \quad \text{itd.}$$

Za takve funkcije kažemo da se ne daju elementarno integrirati. Postupak integriranja vršimo uz pomoć raznih približnih metoda (npr., razvijanjem podintegralne funkcije u beskonačni red) kojima se ovdje nećemo baviti.

7.2 Metoda supstitucije (zamjene varijable)

Neka je funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ integrabilna na intervalu (a,b). Neka je funkcija $g : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ derivabilna i injektivna na intervalu (α,β). Tada uz supstituciju $t = g(x)$ vrijedi

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt.$$

Ova metoda nam omogućuje da izborom prikladne supstitucije zadani integral svedemo na integral koji je lakše riješiti.

Primjer 3.

$$1.) \int \frac{dx}{2x+7} = \begin{vmatrix} t = 2x+7 \\ dt = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2x+7| + c$$

$$2.) \int \cos(7x+1)dx = \begin{vmatrix} t = 7x+1 \\ dt = 7dx \\ dx = \frac{1}{7}dt \end{vmatrix} = \frac{1}{7}\int \cos t dt = \frac{1}{7}\sin t + c$$

$$= \frac{1}{7}\sin(7x+1) + c$$

$$3.) \int e^{\frac{1}{5}x-4}dx = \begin{vmatrix} t = \frac{1}{5}x-4 \\ dt = \frac{1}{5}dx \\ dx = 5dt \end{vmatrix} = 5\int e^t dt = 5e^t + c = 5e^{\frac{1}{5}x-4} + c$$

$$4.) \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{2dx}{\sin(2x)} = \begin{vmatrix} t = 2x \\ dt = 2dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{\sin t}$$

$$= \ln\left|\text{tg}\frac{t}{2}\right| + c = \ln|\text{tg } x| + c$$

$$5.)\int\frac{3x-1}{3x+2}dx = \left|\begin{array}{c} t=3x+2 \\ dt=3dx \\ dx=\frac{1}{3}dt \\ 3x-1=t-3 \end{array}\right| = \frac{1}{3}\int\frac{t-3}{t}dt$$

$$= \frac{1}{3}\int dt-\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}t-\ln|t|+c$$

$$= \frac{1}{3}(3x+2)-\ln|3x+2|+c$$

$$= x-\ln|3x+2|+c$$

$$6.)\int\frac{x^2dx}{x^6+1} = \left|\begin{array}{c} t=x^3 \\ dt=3x^2dx \\ x^2dx=\frac{1}{3}dt \end{array}\right| = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{3}\text{arctg }t+c$$

$$= \frac{1}{3}\text{arctg}(x^3)+c$$

$$7.)\int\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} = \left|\begin{array}{c} t=\frac{1}{x} \\ dt=-\frac{1}{x^2}dx \end{array}\right| = -\int e^tdt=-e^t+c=-e^{\frac{1}{x}}+c$$

$$8.)\int\frac{dx}{x\ln^3 x} = \left|\begin{array}{c} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}dx \end{array}\right| = \int\frac{dt}{t^3}=\int t^{-3}dt=-\frac{1}{2t^2}+c$$

$$= -\frac{1}{2\ln^2 x}+c$$

$$9.)\int x\sin(5-x^2)dx = \left|\begin{array}{c} t=5-x^2 \\ dt=-2xdx \\ xdx=-\frac{1}{2}dt \end{array}\right| = -\frac{1}{2}\int\sin tdt$$

$$= \frac{1}{2}\cos t+c=\frac{1}{2}\cos(5-x^2)+c$$

$$10.)\int\sin^2 x\cos xdx = \left|\begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos xdx \end{array}\right| = \int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+c$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x+c$$

$$11.)\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}} = \left|\begin{array}{c} t=\sqrt{x^2-4} \\ dt=\frac{2xdx}{2\sqrt{x^2-4}}=\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}} \end{array}\right| = \int dt=t+c$$

$$= \sqrt{x^2-4}+c$$

$$
\begin{aligned}
12.)\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} &= \left| \begin{array}{c} t=e^x \\ dt=e^x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c \\
&= \arcsin(e^x) + c \\
13.)\int \frac{\text{arctg } x}{1+x^2}dx &= \left| \begin{array}{c} t=\text{arctg } x \\ dt=\frac{1}{1+x^2}dx \end{array} \right| = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + c \\
&= \frac{1}{2}\text{arctg}^2 x + c
\end{aligned}
$$

7.3 Parcijalna integracija

Neka su funkcije f i g derivabilne na intervalu (a,b). Iz formule za derivaciju umnoška funkcija

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

dobije se integriranjem obiju strana gornjeg identiteta

$$f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)\cdot g(x)dx + \int f(x)\cdot g'(x)dx.$$

Tada je

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx,$$

uz uvjet da navedeni integrali postoje.

Stavimo li $u=f(x)$, $v=g(x)$, imamo $du=f'(x)dx$, $dv=g'(x)dx$. Sada gornju formulu možemo pisati u obliku

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu.$$

Ovu formulu koristimo kada je integral s desne strane jednakosti jednostavnije izračunati od onog s lijeve strane jednakosti.

Primjer 4.

$$
\begin{aligned}
1.)\int xe^x dx &= \left| \begin{array}{c} u=x \quad du=dx \\ dv=e^x dx \quad v=\int e^x dx = e^x \end{array} \right| = xe^x - \int e^x dx \\
&= xe^x - e^x + c = (x-1)e^x + c \\
2.)\int x\ln x dx &= \left| \begin{array}{c} u=\ln x \quad du=\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx \quad v=\frac{1}{2}x^2 \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx \\
&= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c
\end{aligned}
$$

$$3.) \int \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{c} u = \operatorname{arctg} x \quad du = \frac{dx}{x^2+1} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right|$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{x^2+1} = \left| \begin{array}{c} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right|$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|t| + c$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

$$4.) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2})dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right|$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{1+x^2} \\ dt = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} \end{array} \right|$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int dt$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - t + c$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c.$$

$$5.) \int x^2 e^x dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2 \quad du = 2xdx \\ dv = e^x dx \quad v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$$

$= \;$ (parcijalna integracija, vidi 1. zadatak primjera 4)

$$= x^2 e^x - 2(x-1)e^x + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

Primjer 5.

Izračunati $\int \sin^2 x dx$.

Rješenje

$$\int \sin^2 x dx = \left| \begin{array}{c} u = \sin x \quad du = \cos x dx \\ dv = \sin x dx \quad v = -\cos x \end{array} \right|$$

$$= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx = -\frac{1}{2}\sin(2x) + \int \cos^2 x dx$$

$$= -\frac{1}{2}\sin(2x) + \int (1 - \sin^2 x)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\sin(2x) + \int dx - \int \sin^2 x dx$$

$$= -\frac{1}{2}\sin(2x) + x - \int \sin^2 x dx$$

Odavde je
$$2\int \sin^2 x dx = x - \frac{1}{2}\sin(2x) + c,$$
odnosno
$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c.$$

Primjer 6.

Izračunati $\displaystyle\int e^x \sin x dx$.

Rješenje
$$\begin{aligned}(*) \qquad \int e^x \sin x dx &= \left| \begin{array}{cc} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right| \\ &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\end{aligned}$$

Za računanje integrala $\int e^x \cos x dx$ još jednom primijenimo metodu parcijalne integracije.
$$\begin{aligned}(**) \qquad \int e^x \cos x dx &= \left| \begin{array}{cc} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right| \\ &= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx\end{aligned}$$

Uočimo da se s desne strane jednakosti u $(**)$ pojavio početni integral koji želimo izračunati. Uvrstimo li $(**)$ u $(*)$ dobivamo
$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= (*) = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \\ &= (**) = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\ &= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx.\end{aligned}$$

Odavde je
$$2\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) + c,$$
odnosno
$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c.$$

Primjer 7.

Izračunati $\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$, $a \neq 0$.

Rješenje

$$(*) \quad \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx = \left| \begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = \frac{xdx}{(x^2+a^2)^2} & v = \int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^2} \end{array} \right|$$

Integral v računamo pomoću supstitucije $t = x^2 + a^2$.

$$v = \int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^2} = \left| \begin{array}{c} t = x^2 + a^2 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t} = -\frac{1}{2(x^2+a^2)}$$

Sada je

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx &= (*) = -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} \\ &= -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c. \end{aligned}$$

Primjer 8.

Izračunati $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$, $a > 0$.

Rješenje

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2-x^2}dx &= \left| \begin{array}{c} u = \sqrt{a^2-x^2} \quad du = \frac{-2xdx}{2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right| \\ &= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\ &= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\ &= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ &= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}dx + a^2 \arcsin\frac{x}{a} \end{aligned}$$

Odavde je

$$2\int \sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + c,$$

odnosno

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c.$$

Napomena

Slično se pokaže da je

$$\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}| + c.$$

7.4 Integracija racionalnih funkcija

Racionalna funkcija je funkcija oblika $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, gdje su P i Q polinomi.

Ako je stupanj polinoma P strogo manji od stupnja polinoma Q, kažemo da je f *prava* racionalna funkcija. U protivnom, f je *neprava* racionalna funkcija. Svaku nepravu racionalnu funkciju možemo dijeljenjem polinoma P polinomom Q prikazati kao zbroj polinoma i prave racionalne funkcije. Budući da polinome znamo integrirati, preostaje proučiti kako se integriraju prave racionalne funkcije.

Neka je sada f prava racionalna funkcija. Najprije polinom Q rastavimo na realne faktore. U rastavu polinoma Q pojavljuju se faktori oblika $(x-a)^k$, odnosno $(x^2+px+q)^l$, gdje su $k, l \in \mathbb{N}$, $a, p, q \in \mathbb{R}$, te vrijedi $p^2 - 4q < 0$.

Sada se racionalna funkcija f prikazuje kao zbroj *parcijalnih razlomaka*. U tom prikazu svakom faktoru oblika $(x-a)^k$ odgovara zbroj parcijalnih razlomaka

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k},$$

dok faktoru $(x^2+px+q)^l$ odgovara zbroj parcijalnih razlomaka

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}.$$

Realni koeficijenti $A_1, \ldots, A_k$, $B_1, \ldots, B_l$, $C_1, \ldots, C_l$ jednoznačno su određeni, a računamo ih *metodom neodređenih koeficijenata*, koju ćemo opisati na sljedećim primjerima.

Konačno, integral racionalne funkcije f jednak je zbroju integrala odgovarajućih parcijalnih razlomaka.

Primjer 9.

Izračunati $\displaystyle\int \frac{5x-13}{(x+1)(x^2-5x+6)}dx.$

Rješenje

Polinom u brojniku je prvog stupnja, a u nazivniku trećeg stupnja. Dakle radi se o pravoj racionalnoj funkciji.

Rastavom polinoma u nazivniku na faktore dobije se

$$(x+1)(x^2-5x+6) = (x+1)(x-3)(x-2).$$

Danu racionalnu funkciju zapišimo kao zbroj parcijalnih razlomaka

$$\frac{5x-13}{(x+1)(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-2}.$$

Množenjem obiju strana gornje jednakosti s $(x+1)(x-3)(x-2)$ dobije se

$$\begin{aligned} 5x-13 &= A(x-3)(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)(x-3) \\ &= A(x^2-5x+6) + B(x^2-x-2) + C(x^2-2x-3) \\ &= (A+B+C)x^2 + (-5A-B-2C)x + (6A-2B-3C). \end{aligned}$$

Odavde, izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije od x, slijedi

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -5A-B-2C &= 5 \\ 6A-2B-3C &= -13 \end{aligned}.$$

Dobili smo sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice. (Uočimo da je broj nepoznanica u sustavu jednak stupnju polinoma u nazivniku racionalne funkcije.) Ovaj sustav ima jedinstveno rješenje

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = 1.$$

Stoga je

$$\frac{5x-13}{(x+1)(x^2-5x+6)} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2}.$$

Integral dane racionalne funkcije jednak je zbroju integrala parcijalnih razlomaka, tj.

$$\begin{aligned} \int \frac{(5x-13)dx}{(x+1)(x^2-5x+6)} &= -\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3} + \int\frac{dx}{x-2} \\ &= -\frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + \ln|x-2| + c. \end{aligned}$$

Primjer 10.

Izračunati $\displaystyle\int \frac{x^2+9x+32}{x(x+4)^2}dx.$

Rješenje

Polinom u brojniku je drugog, a u nazivniku trećeg stupnja, pa je dana racionalna funkcija prava.

Polinom u nazivniku je rastavljen na faktore, pa racionalnu funkciju pišemo kao zbroj parcijalnih razlomaka

$$\frac{x^2+9x+32}{x(x+4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x+4}+\frac{B_2}{(x+4)^2}.$$

Množenjem obiju strana gornje jednakosti izrazom $x(x+4)^2$ dobije se

$$\begin{aligned} x^2+9x+32 &= A(x+4)^2+B_1x(x+4)+B_2x \\ &= A(x^2+8x+16)+B_1(x^2+4x)+B_2x \\ &= (A+B_1)x^2+(8A+4B_1+B_2)x+16A. \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$\begin{array}{rcl} A+B_1 &=& 1 \\ 8A+4B_1+B_2 &=& 9 \\ 16A &=& 32 \end{array}.$$

Ovaj sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice ima jedinstveno rješenje

$$A=2,\quad B_1=-1,\quad B_2=-3.$$

Dakle,

$$\frac{x^2+9x+32}{x(x+4)^2}=\frac{2}{x}-\frac{1}{x+4}-\frac{3}{(x+4)^2}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \int\frac{x^2+9x+32}{x(x+4)^2}dx &= 2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x+4}-3\int\frac{dx}{(x+4)^2} \\ &= 2\ln|x|-\ln|x+4|+\frac{3}{x+4}+c. \end{aligned}$$

Primjer 11.

Izračunati $\displaystyle\int\frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x}dx.$

Rješenje

U brojniku je polinom prvog, a u nazivniku trećeg stupnja, pa je dana racionalna funkcija prava.

Rastav polinoma u nazivniku na faktore glasi

$$x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2.$$

Sada se racionalna funkcija prikazuje kao zbroj parcijalnih razlomaka

$$\frac{5x-8}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2}.$$

Množenjem obiju strana jednakosti s $x(x-2)^2$ dobije se

$$5x - 8 = A(x-2)^2 + B_1 x(x-2) + B_2 x.$$

Osim na način opisan u prethodnim primjerima, nepoznati koeficijenti A, B_1, B_2 mogu se odrediti i uvrštavanjem u gornji izraz prikladnih vrijednosti za x. Stavimo li npr. $x = 2$, dobit ćemo

$$5 \cdot 2 - 8 = A(2-2)^2 + B_1 \cdot 2 \cdot (2-2) + B_2 \cdot 2,$$

tj. $B_2 = 1$. Za $x = 0$ imamo

$$5 \cdot 0 - 8 = A(0-2)^2 + B_1 \cdot 0 \cdot (0-2) + B_2 \cdot 0,$$

dakle $A = -2$. Za $x = 1$ imamo

$$5 \cdot 1 - 8 = A(1-2)^2 + B_1 \cdot 1 \cdot (1-2) + B_2 \cdot 1,$$

tj., $-3 = A - B_1 + B_2$, pa je $B_1 = 2$.
Prema tome,

$$\frac{5x-8}{x(x-2)^2} = -\frac{2}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x} dx &= -2\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{(x-2)^2} \\
&= -2\ln|x| + 2\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + c \\
&= 2\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| - \frac{1}{x-2} + c.
\end{aligned}$$

Primjer 12.

Izračunati $\displaystyle\int \frac{x^6 + x^5 + x^4 - 2x - 2}{x^4 + x^3}\, dx.$

Rješenje

Polinom u brojniku je šestog, a u nazivniku četvrtog stupnja, pa je dana racionalna funkcija neprava.
Dijeljenjem brojnika s nazivnikom dobije se

$$\frac{x^6+x^5+x^4-2x-2}{x^4+x^3}=x^2+1-\frac{x^3+2x+2}{x^4+x^3}.$$

Odavde je

$$\begin{aligned}\int\frac{x^6+x^5+x^4-2x-2}{x^4+x^3}\,dx &= \int(x^2+1)dx-\int\frac{x^3+2x+2}{x^4+x^3}dx\\ &= \frac{1}{3}x^3+x-\int\frac{x^3+2x+2}{x^4+x^3}dx.\end{aligned}$$

Preostaje integrirati pravu racionalnu funkciju $x\mapsto\dfrac{x^3+2x+2}{x^4+x^3}$.
Rastav polinoma u nazivniku na faktore glasi

$$x^4+x^3=x^3(x+1).$$

Prikažimo racionalnu funkciju kao zbroj parcijalnih razlomaka

$$\frac{x^3+2x+2}{x^3(x+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B}{x+1}.$$

Množenjem obiju strana jednakosti izrazom $x^3(x+1)$ dobije se

$$\begin{aligned}x^3+2x+2 &= A_1x^2(x+1)+A_2x(x+1)+A_3(x+1)+Bx^3\\ &= (A_1+B)x^3+(A_1+A_2)x^2+(A_2+A_3)x+A_3.\end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned}A_1+B &= 1\\ A_1+A_2 &= 0\\ A_2+A_3 &= 2\\ A_3 &= 2\end{aligned}.$$

Jedinstveno rješenje sustava glasi

$$A_1=0,\quad A_2=0,\quad A_3=2,\quad B=1.$$

Dakle,

$$\frac{x^3+2x+2}{x^3(x+1)}=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x+1}.$$

Stoga je

$$\int \frac{x^3+2x+2}{x^3(x+1)}dx = 2\int \frac{dx}{x^3} + \int \frac{dx}{x+1} = -\frac{1}{x^2} + \ln|x+1| + c.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^6+x^5+x^4-2x-2}{x^4+x^3}\,dx &= \frac{1}{3}x^3 + x - \int \frac{x^3+2x+2}{x^4+x}dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{x^2} - \ln|x+1| + c.\end{aligned}$$

Primjer 13.

Izračunati $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$.

Rješenje

Uočimo da kvadratna jednadžba $x^2+x+1=0$ nema realnih nultočaka budući da je njena diskriminanta $D = 1-4 = -3 < 0$. Zadana racionalna funkcija je parcijalni razlomak. Svođenjem kvadratnog trinoma x^2+x+1 na potpun kvadrat, ovaj integral se svodi na tablični.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+x+1} &= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{c} t = x+\frac{1}{2} \\ dt = dx \\ x = t-\frac{1}{2} \end{array} \right| \\ &= \int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + c \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} + c\end{aligned}$$

Primjer 14.

Izračunati $\int \frac{x-3}{x^2+4x+5}dx$.

Rješenje

Kako je diskriminanta kvadratna jednadžbe $x^2+4x+5=0$ jednaka $D = 4^2 - 4\cdot 5 = -4 < 0$, to se polinom u nazivniku ove racionalne funkcije ne može rastaviti na realne faktore. Zadana racionalna funkcija je zapravo parcijalni razlomak i ona se integrira ovako. Najprije trinom x^2+4x+5 svodimo na potpun kvadrat

$$x^2+4x+5 = (x+2)^2+1.$$

Zatim se dana funkcija integrira pomoću supstitucije $t = x + 2$. Dakle,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-3}{x^2+4x+5}dx &= \int \frac{x-3}{(x+2)^2+1}dx = \left| \begin{array}{c} t = x+2 \\ dt = dx \\ x = t-2 \end{array} \right| \\
&= \int \frac{t-5}{t^2+1}dt = \int \frac{t}{t^2+1}dt - 5\int \frac{dt}{t^2+1} \\
&= \int \frac{t}{t^2+1}dt - 5\,\mathrm{arctg}\ t = \left| \begin{array}{c} s = t^2+1 \\ ds = 2tdt \\ tdt = \frac{1}{2}ds \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{ds}{s} - 5\,\mathrm{arctg}\ t = \frac{1}{2}\ln|s| - 5\,\mathrm{arctg}\ t + c \\
&= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 5\,\mathrm{arctg}\ t + c \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - 5\,\mathrm{arctg}\ (x+2) + c.
\end{aligned}$$

Primjer 15.

Izračunati $\displaystyle\int \frac{3x^2+12x-2}{(x+3)(x^2+2)}dx.$

Rješenje

Dana racionalna funkcija je prava. Polinom u nazivniku rastavljen je na faktore.

Prikaz racionalne funkcije kao zbroja parcijalnih razlomaka glasi

$$\frac{3x^2+12x-2}{(x+3)(x^2+2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+2}.$$

Množenjem obiju strana jednakosti s $(x+3)(x^2+2)$ dobije se

$$3x^2+12x-2 = A(x^2+2) + (Bx+C)(x+3).$$

Nepoznate koeficijente A, B, C odredit ćemo uvrštavanjem u gornji izraz prikladno odabranih vrijednosti za x.
Za $x = -3$ dobije se $-11 = 11A$, pa je $A = -1$.
za $x = 0$ dobije se $-2 = 2A + 3C$, pa je $C = 0$.
za $x = 1$ dobije se $13 = 3A + 4(B + C)$, pa je $B = 4$.
Stoga je

$$\frac{3x^2+12x-2}{(x+3)(x^2+2)} = -\frac{1}{x+3} + \frac{4x}{x^2+2}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+12x-2}{(x+3)(x^2+2)}dx &= -\int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{4xdx}{x^2+2} \\
&= -\ln|x+3| + \int \frac{4xdx}{x^2+2} = \left| \begin{array}{c} t = x^2+2 \\ dt = 2xdx \end{array} \right| \\
&= -\ln|x+3| + \int \frac{2tdt}{t} \\
&= -\ln|x+3| + 2\ln|t| + c \\
&= -\ln|x+3| + 2\ln(x^2+2) + c.
\end{aligned}$$

Primjer 16.

Izračunati $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3-1}dx.$

Rješenje

Zadana racionalna funkcija je prava. Rastavimo polinom u nazivniku na faktore.

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

Prikaz racionalne funkcije kao zbroja parcijalnih razlomaka glasi

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Množenjem gornjeg identiteta izrazom $(x-1)(x^2+x+1)$ dobije se

$$\begin{aligned}
x^2+2 &= A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) \\
&= (A+B)x^2 + (A-B+C)x + (A-C).
\end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned}
A+B &= 1 \\
A-B+C &= 0 \; . \\
A-C &= 2
\end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je

$$A=1, \quad B=0, \quad C=-1.$$

Dakle,

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{x^3-1}dx &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x^2+x+1}\\ &= \ln|x-1| - \int \frac{dx}{x^2+x+1}\\ &= \text{(vidi primjer 13)}\\ &= \ln|x-1| - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} + c.\end{aligned}$$

Primjer 17.

Izračunati $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x^3-8)}dx.$

Rješenje

Racionalna funkcija je prava. Rastavimo polinom u nazivniku na faktore.

$$x(x^3-8) = x(x-2)(x^2+2x+4).$$

Prikaz racionalne funkcije kao zbroja parcijalnih razlomaka glasi

$$\frac{x^3+1}{x(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+4}.$$

Množenjem gornjeg identiteta izrazom $x(x-2)(x^2+2x+4)$ dobije se

$$x^3+1 = A(x-2)(x^2+2x+4) + Bx(x^2+2x+4) + (Cx+D)x(x-2).$$

Odredimo nepoznate koeficijente A, B, C, D uvrštavanjem prikladno odabranih vrijednosti za x.
Za $x=2$ imamo $9 = 24B$, tj. $B = \frac{3}{8}$.
Za $x=0$ imamo $1 = -8A$, tj. $A = -\frac{1}{8}$.
Za $x=1$ imamo $2 = -7A + 7B - (C+D)$, pa je $C + D = \frac{3}{2}$.
Za $x=-1$ imamo $0 = -9A - 3B + 3(-C+D)$, pa je $C - D = 0$.
Dakle, $C = D = \frac{3}{4}$.

Prema tome,

$$\frac{x^3+1}{x(x-2)(x^2+2x+4)} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+4}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+1}{x(x^3-8)}\,dx &= -\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{3}{4}\int\frac{(x+1)dx}{x^2+2x+4}\\
&= -\frac{1}{8}\ln|x|+\frac{3}{8}\ln|x-2|+\frac{3}{4}\int\frac{(x+1)dx}{(x+1)^2+3}\\
&= \left|\begin{array}{c} t=(x+1)^2\\ dt=2(x+1)dx\\ (x+1)dx=\frac{1}{2}dt\end{array}\right|\\
&= -\frac{1}{8}\ln|x|+\frac{3}{8}\ln|x-2|+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+3}\\
&= -\frac{1}{8}\ln|x|+\frac{3}{8}\ln|x-2|+\frac{3}{8}\ln|t+3|+c\\
&= -\frac{1}{8}\ln|x|+\frac{3}{8}\ln|x-2|+\frac{3}{8}\ln|x^2+2x+4|+c\\
&= -\frac{1}{8}\ln|x|+\frac{3}{8}\ln|(x-2)(x^2+2x+4)|+c\\
&= -\frac{1}{8}\ln|x|+\frac{3}{8}\ln|x^3-8|+c.
\end{aligned}$$

Primjer 18.

Izračunati $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a\neq 0$.

Rješenje

Dana racionalna funkcija je parcijalni razlomak koji integriramo ovako:

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2} &= \frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^2}dx\\
&= \frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^2}dx-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx\\
&= \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx\\
&= \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx\\
&= \text{(parcijalna integracija, vidi primjer 7)}\\
&= \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}-\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c\\
&= \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+c.
\end{aligned}$$

Uočimo da se računanje integrala $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ metodom parcijalne integracije svelo na računanje integrala $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$. Slično bismo postupili i prilikom rješavanja integrala

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \quad (a \neq 0, n \in \mathbb{N}, n > 2).$$

Naime, računanje integrala I_n svelo bi se na računanje integrala $I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$ kod kojeg je potencija nazivnika podintegralne funkcije smanjena za 1. Opisanom metodom došli bismo do rekurzivne formule

$$I_n = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Pritom je $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$.

Prema tome, želimo li izračunati npr. integral I_6, najprije ćemo koristeći danu rekurzivnu formulu izračunati integral I_2 pomoću integrala I_1. Sad kad znamo integral I_2 izračunat ćemo (opet koristeći rekurzivnu formulu) integral I_3. Postupak nastavljamo analogno; dakle računamo redom I_4 pomoću I_3, zatim I_5 pomoću I_4, i konačno I_6 pomoću I_5.

Primjer 19.

Izračunati $I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$, $a \neq 0$.

Rješenje

Koristeći rekurzivnu formulu za $n = 3$ imamo

$$I_3 = \frac{3}{4a^2} I_2 + \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2}.$$

Integral I_2 smo izračunali u primjeru 18, pa je

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}\right) + \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + c \\ &= \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{3x}{8a^4(x^2+a^2)} + \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + c. \end{aligned}$$

Primjer 20.

Izračunati $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x^2+2x+5)^2}dx$.

Rješenje

Uočimo da kvadratna jednadžba $x^2+2x+5=0$ nema realnih nultočaka, jer je njezina diskriminanta $D=4-20=-16<0$.

Dana racionalna funkcija je parcijalni razlomak. Pri integraciji ove funkcije najprije trinom u nazivniku svodimo na potpun kvadrat:

$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4,$$

te zatim koristimo supstituciju $t=x+1$.
Prema tome,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{(x^2+2x+5)^2}dx &= \int \frac{2x+1}{[(x+1)^2+4]^2}dx = \begin{vmatrix} t=x+1 \\ dt=dx \\ x=t-1 \end{vmatrix} \\ &= \int \frac{2t-1}{(t^2+4)^2}dt \\ &= 2\int \frac{tdt}{(t^2+4)^2} - \int \frac{dt}{(t^2+4)^2}.\end{aligned}$$

Prvi integral koji se pojavljuje s desne strane gornje jednakosti riješava se metodom supstitucije $s=t^2+4$. Dakle,

$$\int \frac{tdt}{(t^2+4)^2} = \begin{vmatrix} s=t^2+4 \\ ds=2tdt \\ tdt=\frac{1}{2}ds \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{2s}+c = -\frac{1}{2(t^2+4)}+c\ .$$

Drugi integral koji se pojavljuje s desne strane gornje jednakosti je zapravo integral I_2 u kojem je $a=2$ i taj integral smo izračunali u primjeru 18. Dakle,

$$\int \frac{dt}{(t^2+4)^2} = \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + \frac{t}{8(t^2+4)}+c.$$

Odavde je

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{(x^2+2x+5)^2}dx &= -\frac{1}{t^2+4} - \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} - \frac{t}{8(t^2+4)}+c \\ &= -\frac{t+8}{8(t^2+4)} - \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+c \\ &= -\frac{x+9}{8(x^2+2x+5)} - \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+c.\end{aligned}$$

Primjer 21.

Izračunati $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

Rješenje

Dana racionalna funkcija je prava. Polinom u nazivniku rastavljen je na faktore.

Prikaz racionalne funkcije kao zbroja parcijalnih razlomaka glasi

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}.$$

Množenjem gornjeg identiteta s $x(x^2+1)^2$ dobije se

$$\begin{aligned} 1 &= A(x^2+1)^2 + (B_1x+C_1)x(x^2+1) + (B_2x+C_2)x \\ &= (A+B_1)x^4 + C_1x^3 + (2A+B_1+B_2)x^2 + (C_1+C_2)x + A. \end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned} A+B_1 &= 0 \\ C_1 &= 0 \\ 2A+B_1+B_2 &= 0 \\ C_1+C_2 &= 0 \\ A &= 1 \end{aligned} .$$

Jedinstveno rješenje sustava glasi

$$A=1, \quad B_1=-1, \quad C_1=0, \quad B_2=-1, \quad C_2=0.$$

Stoga je

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} \\ &= \ln|x| - \int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} \\ &= \left| \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{2t} + c \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c. \end{aligned}$$

7.5 Integracija nekih iracionalnih funkcija

Opisat ćemo postupak integriranja nekih tipova iracionalnih funkcija.

Integrali tipa $\displaystyle\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,\ a \neq 0.$

Pri riješavanju takvih integrala najprije se kvadratni trinom ax^2+bx+c svede na potpun kvadrat:

$$ax^2+bx+c = a\Big(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\Big) = a\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

te zatim primijeni supstitucija $t = x + \frac{b}{2a}$. Ako je $m = 0$, integral se time sveo na tablični, dok je u slučaju $m \neq 0$ integral jednak zbroju tabličnog integrala, te integrala za čije se riješavanje koristi supstitucija $s = \sqrt{at^2 + c - \frac{b^2}{4a}}$. Pogledajmo to na sljedećim primjerima.

Primjer 22.

Izračunati $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$.

Rješenje

Svodimo trinom u nazivniku na potpun kvadrat:

$$x^2-6x+13 = (x-3)^2+4,$$

te zatim primijenimo supstituciju $t = x-3$. Dakle,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}} = \left| \begin{array}{c} t = x-3 \\ dt = dx \end{array} \right| \\
&= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \ln|t+\sqrt{t^2+4}\,| + c \\
&= \ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+13}\,| + c.
\end{aligned}$$

Primjer 23.

Izračunati $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4x-5}}dx.$

Rješenje

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4x-5}}dx &= \int \frac{x-1}{\sqrt{(x+2)^2-9}}dx = \left| \begin{array}{c} t=x+2 \\ dt=dx \\ x-1=t-3 \end{array} \right| \\
&= \int \frac{t-3}{\sqrt{t^2-9}}dt = \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-9}} - 3\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-9}} \\
&= \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-9}} - 3\ln|t+\sqrt{t^2-9}\,| \\
&= \left| \begin{array}{c} s=\sqrt{t^2-9} \\ ds=\frac{1}{2\sqrt{t^2-9}}\cdot 2tdt = \frac{tdt}{\sqrt{t^2-9}} \end{array} \right| \\
&= \int ds - 3\ln|t+\sqrt{t^2-9}\,| \\
&= s - 3\ln|t+\sqrt{t^2-9}\,| + c \\
&= \sqrt{t^2-9} - 3\ln|t+\sqrt{t^2-9}\,| + c \\
&= \sqrt{x^2+4x-5} - 3\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\,| + c
\end{aligned}
$$

Primjer 24.

Izračunati $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+2\ln x-\ln^2 x}}$.

Rješenje

Zadani integral riješavamo pomoću supstitucije $t=\ln x$. Dakle,

$$
\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+2\ln x-\ln^2 x}} = \left| \begin{array}{c} t=\ln x \\ dt=\frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{tdt}{\sqrt{1+2t-t^2}}.
$$

Sada se trinom $1+2t-t^2$ svodi na potpun kvadrat:

$$
1+2t-t^2 = -(t^2-2t-1) = -[(t-1)^2-2] = 2-(t-1)^2,
$$

te zatim koristi supstitucija $s=t-1$. Prema tome,

$$
\int \frac{tdt}{\sqrt{1+2t-t^2}} = \int \frac{tdt}{\sqrt{2-(t-1)^2}} = \left| \begin{array}{c} s=t-1 \\ ds=dt \\ t=s+1 \end{array} \right|
$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{(s+1)ds}{\sqrt{2-s^2}} = \int \frac{sds}{\sqrt{2-s^2}} + \int \frac{ds}{\sqrt{2-s^2}} \\
&= \int \frac{sds}{\sqrt{2-s^2}} + \arcsin \frac{s}{\sqrt{2}} \\
&= \left| \begin{array}{c} u = \sqrt{2-s^2} \\ du = \frac{-2sds}{2\sqrt{2-s^2}} = -\frac{sds}{\sqrt{2-s^2}} \end{array} \right| \\
&= -\int du + \arcsin \frac{s}{\sqrt{2}} \\
&= -u + \arcsin \frac{s}{\sqrt{2}} + c \\
&= -\sqrt{2-s^2} + \arcsin \frac{s}{\sqrt{2}} + c \\
&= -\sqrt{1+2t-t^2} + \arcsin \frac{t-1}{\sqrt{2}} + c.
\end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1+2\ln x - \ln^2 x}} &= \int \frac{tdt}{\sqrt{1+2t-t^2}} \\
&= -\sqrt{1+2t-t^2} + \arcsin \frac{t-1}{\sqrt{2}} + c \\
&= -\sqrt{1+2\ln x - \ln^2 x} + \arcsin \frac{\ln x - 1}{\sqrt{2}} + c.
\end{aligned}$$

Integrali tipa $\displaystyle\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad a \neq 0.$

Za riješavanje ovakvih integrala koristimo supstituciju

$$t = \frac{1}{mx+n}.$$

Na taj način dobije se prethodno opisani tip integrala.

Primjer 25.

Izračunati $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Rješenje

Uočimo da je $m = 1$, $n = 0$, pa integral riješavamo pomoću supstitucije $t = \frac{1}{x}$. Prema tome,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{array}{c} t=\frac{1}{x} \\ x=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \\ x^2+1=\frac{1}{t^2}+1=\frac{t^2+1}{t^2} \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+c$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right|+c$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+c$$

$$= \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right|+c.$$

Integrali tipa $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx, \quad a \neq 0.$

Kvadratni trinom ax^2+bx+c svodimo na potpun kvadrat, te zatim dobiveni integral riješavamo metodom parcijalne integracije (v. primjer 8, točka 7.3).

Primjer 26.

Izračunati $\int \sqrt{-2x^2+3x+\frac{7}{8}}\,dx.$

Rješenje

Svodimo trinom $-2x^2+3x+\frac{7}{8}$ na potpun kvadrat:

$$-2x^2+3x+\frac{7}{8} = -2\Big(x^2-\frac{3}{2}x-\frac{7}{16}\Big) = -2\Big[\Big(x-\frac{3}{4}\Big)^2-1\Big] = 2\Big[1-\Big(x-\frac{3}{4}\Big)^2\Big],$$

te zatim koristimo supstituciju $t=x-\frac{3}{4}$. Tada je

$$\int \sqrt{-2x^2+3x+\frac{7}{8}}\,dx = \int \sqrt{2\Big[1-\Big(x-\frac{3}{4}\Big)^2\Big]}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{1-\Big(x-\frac{3}{4}\Big)^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} t=x-\frac{3}{4} \\ dt=dx \end{array} \right|$$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \text{(v. primjer 8, točka 7.3)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{2}\Big(\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\arcsin t\Big)+c\\
&= \frac{1}{2}\Big[\Big(x-\frac{3}{4}\Big)\sqrt{-2x^2+3x+\frac{7}{8}}+\sqrt{2}\arcsin\Big(x-\frac{3}{4}\Big)\Big]+c.
\end{aligned}
$$

Integrali tipa $\int R\Big[x,\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{\frac{p_1}{q_1}},\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{\frac{p_2}{q_2}},\ldots\Big]dx$, gdje je R racionalna funkcija, $p_1,q_1,p_2,q_2,\ldots$ cijeli brojevi, te $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Pomoću supstitucije

$$t^n=\frac{ax+b}{cx+d},$$

gdje je n najmanji zajednički višekratnik brojeva $q_1,q_2,\ldots$, ovi se integrali svode na integrale racionalnih funkcija.

Primjer 27.

Izračunati $\int\frac{dx}{\sqrt{4x+3}+\sqrt[4]{4x+3}}$.

Rješenje

Ovdje je $a=4$, $b=3$, $c=0$, $d=1$, $p_1=p_2=1$, $q_1=2$, $q_2=4$. Kako je najmanji zajednički višekratnik brojeva q_1 i q_2 jednak 4, to se ovaj integral riješava pomoću supstitucije $t^4=4x+3$. Prema tome,

$$
\begin{aligned}
\int\frac{dx}{\sqrt{4x+3}+\sqrt[4]{4x+3}} &= \left|\begin{array}{c} t^4=4x+3\\ 4t^3dt=4dx\\ t^3dt=dx\\ \sqrt{4x+3}=t^2\\ \sqrt[4]{4x+3}=t\end{array}\right| = \int\frac{t^3dt}{t^2+t}=\int\frac{t^2dt}{t+1}\\
&= (\text{podijelimo polinom } t^2 \text{ polinomom } t+1)\\
&= \int\Big(t-1+\frac{1}{t+1}\Big)dt\\
&= \frac{1}{2}t^2-t+\ln|t+1|+c\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{4x+3}-\sqrt[4]{4x+3}+\ln|\sqrt[4]{4x+3}+1|+c.
\end{aligned}
$$

Primjer 28.

Izračunati $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

Rješenje

Imamo $a=-1$, $b=1$, $c=0$, $d=1$, $p_1=1$, $q_1=2$. Stoga je $n=q_1=2$, pa koristimo supstituciju

$$t^2 = 1-x.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} &= \left|\begin{array}{c} t^2=1-x \\ 2tdt=-dx \\ 2-x=t^2+1 \end{array}\right| = -\int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} \\ &= -2\int \frac{dt}{t^2+1} = -2\,\mathrm{arctg}\; t + c \\ &= -2\,\mathrm{arctg}\;\sqrt{1-x}+c.\end{aligned}$$

Primjer 29.

Izračunati $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{3-x}}dx.$

Rješenje

Ovdje je $a=1$, $b=0$, $c=-1$, $d=3$, $p_1=1$, $q_1=2$. Stoga je $n=q_1=2$, pa integral riješavamo koristeći supstituciju

$$t^2 = \frac{x}{3-x}.$$

Odavde je $(3-x)t^2 = x$, tj. $3t^2 = xt^2 + x = x(t^2+1)$, pa je

$$x = \frac{3t^2}{t^2+1}.$$

Deriviranjem se dobije

$$dx = \frac{6t(t^2+1) - 3t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{6tdt}{(t^2+1)^2}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x}{3-x}}dx &= \left|\begin{array}{c} t^2=\frac{x}{3-x} \\ x=\frac{3t^2}{t^2+1} \\ dx=\frac{6tdt}{(t^2+1)^2} \end{array}\right| = \int t\frac{6tdt}{(t^2+1)^2} = 6\int \frac{t^2dt}{(t^2+1)^2} \\ &= \text{(v. primjer 7, točka 7.3)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 6\Big(-\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\text{arctg } t\Big)+c\\
&= 3\,\text{arctg } t-\frac{3t}{t^2+1}+c\\
&= 3\,\text{arctg }\sqrt{\frac{x}{3-x}}-\frac{3\sqrt{\frac{x}{3-x}}}{\frac{x}{3-x}+1}+c\\
&= 3\,\text{arctg }\sqrt{\frac{x}{3-x}}-\sqrt{3x-x^2}+c.
\end{aligned}$$

7.6 Integracija nekih trigonometrijskih funkcija

Razmotrit ćemo kako se integriraju integrali tipa

$$\int \sin^m x\cos^n x dx \quad (m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}).$$

(a) Ako je m neparan broj, integral riješavamo koristeći supstituciju $t = \cos x$.
(b) Ako je n neparan broj, integral riješavamo koristeći supstituciju $t = \sin x$.
(c) Ako su m i n parni brojevi, tada se za snižavanje potencije podintegralne trigonometrijske funkcije koriste formule

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos(2x)),\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos(2x)),$$

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x).$$

Također, koristimo rekurzije do kojih dolazimo parcijalnom integracijom:

$$\begin{aligned}
\int\cos^n x dx &= \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x dx,\\
\int\sin^n x dx &= -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x dx.
\end{aligned}$$

Primjer 30.

Izračunati $\int \sin^3 x dx$.

Rješenje

$$\begin{aligned}
\int\sin^3 x dx &= \int\sin^2 x\sin x dx=\left|\begin{array}{c} t=\cos x\\ dt=-\sin x dx\\ \sin^2 x=1-\cos^2 x=1-t^2\end{array}\right|\\
&= -\int(1-t^2)dt=-t+\frac{1}{3}t^3+c
\end{aligned}$$

$$= \quad -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

Primjer 31.

Izračunati $\int \cos^5 x dx$.

Rješenje

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x dx &= \int \cos^4 x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ \cos^4 x = (1-\sin^2 x)^2 = (1-t^2)^2 \end{array} \right| \\
&= \int (1-t^2)^2 dt = \int (1-2t^2+t^4) dt \\
&= t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + c = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c
\end{aligned}$$

Primjer 32.

Izračunati $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Rješenje

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx \\
&= \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| \\
&= \int t^2(1-t^2) dt = \int (t^2 - t^4) dt \\
&= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + c = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + c
\end{aligned}$$

Primjer 33.

Izračunati $\int \sin^2 x dx$.

Rješenje

Ovaj integral smo riješili metodom parcijalne integracije (v. primjer 5, točka 7.3). Sada ćemo ga izračunati koristeći formulu

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx &= \int \frac{1}{2}(1-\cos(2x))dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) + c = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c\end{aligned}$$

Primjer 34.

Izračunati $\int \sin^4 x dx$.

Rješenje

Za rješavanje ovog integrala koristit ćemo rekurzivnu formulu ($n = 4$).

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x dx \\ &= \text{(vidi primjer 33)} \\ &= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\Big) + c \\ &= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\sin(2x) + c\end{aligned}$$

Primjer 35.

Izračunati $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$.

Rješenje

$$\begin{aligned}(*) \quad \int \cos^2 x\sin^4 x dx &= \int (1-\sin^2 x)\sin^4 x dx \\ &= \int \sin^4 x dx - \int \sin^6 x dx\end{aligned}$$

Korištenjem rekurzivne formule potenciju podintegralne funkcije u integralu $\int \sin^6 x dx$ smanjit ćemo za 2. Dakle,

$$(**) \quad \int \sin^6 x dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}\int \sin^4 x dx.$$

Odavde je

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\sin^4 x dx &= (*) = \int \sin^4 x dx - \int \sin^6 x dx \\ &= (**) = \int \sin^4 x dx + \frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{6}\int \sin^4 x dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{1}{6}\int \sin^4 x dx \\
&= \text{(vidi primjer 34)} \\
&= \frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{1}{24}\sin^3 x\cos x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{32}\sin(2x) + c.
\end{aligned}
$$

7.7 Primjena trigonometrijskih supstitucija na određivanje integrala

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

gdje je R racionalna funkcija

Svođenjem kvadratnog trinoma ax^2+bx+c na potpun kvadrat ovaj integral se svodi na jedan od sljedećih integrala:

(a) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{m^2-x^2})dx, \quad m>0,$
koji riješavamo supstitucijom $x = m\sin t$;

(b) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2+m^2})dx, \quad m>0,$
koji riješavamo supstitucijom $x = m\,\mathrm{tg}\ t$;

(c) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2-m^2})dx, \quad m>0,$
koji riješavamo supstitucijom $x = \dfrac{m}{\cos t}$.

Primjer 36.

Izračunati $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+6x-5}\,dx$.

Rješenje

Integral ovog tipa, osim metodom parcijalne integracije (v. primjer 26, točka 7.5), možemo riješiti pomoću odgovarajuće trigonometrijske supstitucije. U tu svrhu najprije svodimo trinom $-x^2+6x-5$ na potpun kvadrat:

$$-x^2+6x-5 = -(x^2-6x+5) = -[(x-3)^2-4] = 4-(x-3)^2,$$

te zatim koristimo supstituciju $t = x-3$. Dakle,

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{-x^2+6x-5}\,dx &= \int \sqrt{4-(x-3)^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = x-3 \\ dt = dx \end{array} \right| \\
&= \int \sqrt{4-t^2}\,dt.
\end{aligned}
$$

Uočimo da smo dobili integral tipa (a). Stoga ćemo primijeniti supstituciju

$$t = 2\sin s.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{4-t^2}\,dt &= \left| \begin{array}{c} t = 2\sin s \\ dt = 2\cos s ds \\ 4-t^2 = 4-4\sin^2 s = 4\cos^2 s \end{array} \right| \\
&= \int 2\cos s \cdot 2\cos s ds = 4\int \cos^2 s ds \\
&= 4\int \frac{1}{2}(1+\cos(2s))ds = 2\int ds + 2\int \cos(2s)ds \\
&= 2s + \sin(2s) + c = 2s + 2\sin s\cos s + c \\
&= \text{(vratimo se na varijablu } t\text{)} \\
&= \left| \begin{array}{c} \sin s = \frac{t}{2} \\ s = \arcsin\frac{t}{2} \\ \cos^2 s = \frac{4-t^2}{4} \\ \cos s = \frac{\sqrt{4-t^2}}{2} \end{array} \right| \\
&= 2\arcsin\frac{t}{2} + \frac{1}{2}t\sqrt{4-t^2} + c.
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{-x^2+6x-5}\,dx &= \int \sqrt{4-t^2}\,dt \\
&= 2\arcsin\frac{t}{2} + \frac{1}{2}t\sqrt{4-t^2} + c \\
&= 2\arcsin\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{-x^2+6x-5} + c.
\end{aligned}$$

Primjer 37.
Izračunati $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.
Rješenje
Ovaj integral je tipa (b), pa koristimo supstituciju

$$x = \operatorname{tg} t.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} &= \left| \begin{array}{c} x = \text{tg } t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \\ x^2+1 = \text{tg }^2 t + 1 = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \end{array} \right| \\
&= \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\text{tg }^2 t \cdot \frac{1}{\cos t}} = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \left| \begin{array}{c} s = \sin t \\ ds = \cos t dt \end{array} \right| \\
&= \int \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{s} + c = -\frac{1}{\sin t} + c \\
&= (\text{vratimo se na varijablu } x) \\
&= \left| \begin{array}{c} x = \text{tg } t = \frac{\sin t}{\cos t} \\ \sin t = x \cos t \\ 1 = \sin^2 t + \cos^2 t = x^2 \cos^2 t + \cos^2 t = (x^2+1)\cos^2 t \\ \cos^2 t = \frac{1}{x^2+1} \\ \cos t = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ \sin t = x \cos t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{array} \right| \\
&= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c
\end{aligned}$$

Literatura

[1] A. Aglić-Aljinović, I. Brnetić, V. Ćepulić, N. Elezović, Lj. Marangunić, M. Pašić, D. Žubrinić, V. Županović: Nastavni materijali za predmet *Matematika* 1 (FER-2), Element, Zagreb, 2009.

[2] T. Bradić, R. Roki, J. Pečarić, M. Strunje: Matematika za tehnološke fakultete, Multigraf, Zagreb, 1994.

[3] B. P. Demidovič i suradnici: Zadaci i riješeni primjeri iz matematičke analize za tehničke fakultete, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 1998.

[4] N. Elezović, A. Aglić: Linearna algebra, zbirka zadataka, Element, Zagreb, 1995.

[5] K. Horvatić: Linearna algebra, Golden marketing, Zagreb, 2004.

[6] P. Javor: Matematička analiza 1, Element, Zagreb, 1999.

[7] P. Javor: Matematička analiza 2, Element, Zagreb, 2000.

[8] S. Kurepa: Matematička analiza 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.

[9] S. Kurepa: Matematička analiza 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1987.

[10] D. Veljan: Matematika 4, Školska knjiga, Zagreb, 1997.