Numerička matematika : diplomski sveučilišni studij Geološko inženjerstvo i diplomski sveučilišni studij Rudarstvo

Rajić, Rajna

Rajna Rajić

NUMERIČKA MATEMATIKA

Diplomski sveučilišni studij Geološko inženjerstvo i diplomski sveučilišni studij Rudarstvo

Sadržaj

1 Nizovi realnih brojeva

1.1 Pojam niza

Funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sa skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ zove se *niz* (ili *slijed*) *realnih brojeva.*

Pišemo $a_n = a(n)$, $n \in \mathbb{N}$.
Broj a_n nazivamo *općim* (ili n*-tim*) *članom niza.*
Niz označavamo s $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili kraće (a_n).

Primjer 1.1.1. Naći prva tri člana niza čiji je n-ti član zadan formulom $a_n = \frac{n}{n+3}$.

Rješenje.
$a_1 = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$, $a_3 = \frac{3}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Primjer 1.1.2. Naći drugi, treći i šesti član niza čiji je n-ti član zadan formulom $a_n = \cos\frac{\pi}{n}$.

Rješenje.
$a_2 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, $a_3 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $a_6 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Primjer 1.1.3. Naći drugi, treći i četvrti član niza zadanog rekurzivno: $a_1 = 2$, $a_n = 2a_{n-1} + 3$ za $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Rješenje.
$a_2 = 2a_1 + 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$,
$a_3 = 2a_2 + 3 = 2 \cdot 7 + 3 = 17$,
$a_4 = 2a_3 + 3 = 2 \cdot 17 + 3 = 37$.

Primjer 1.1.4. Naći treći i četvrti član niza zadanog rekurzivno: $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $a_n = na_{n-1} + a_{n-2}$ za $n = 3, 4, 5, \ldots$.

Rješenje.
$a_3 = 3a_2 + a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$,
$a_4 = 4a_3 + a_2 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$.

Primjer 1.1.5. Naći formulu za n-ti član ovih nizova:
(a) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$;
(b) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$;
(c) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$;
(d) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$;

(e) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$;
(f) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$;
(g) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$.

Rješenje.
(a) $a_n = n$;
(b) $a_n = 2n$;
(c) $a_n = 2n - 1$;
(d) $a_n = \frac{1}{n}$;
(e) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$;
(f) $a_n = \frac{1}{n^2}$;
(g) $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Omeđenost i monotonost niza

Niz (a_n) je *omeđen* ako postoji $M > 0$ tako da je $|a_n| \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Niz (a_n) je *rastući* ako je $a_n \leq a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Niz (a_n) je *padajući* ako je $a_n \geq a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Niz (a_n) je *strogo rastući* ako je $a_n < a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Niz (a_n) je *strogo padajući* ako je $a_n > a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Niz (a_n) je *monoton* ako je rastući ili padajući.

Niz (a_n) je *strogo monoton* ako je strogo rastući ili strogo padajući.

Primjer 1.1.6. (a) Niz s općim članom $a_n = 5\sin(3n)$ je omeđen, jer je

$$|a_n| = |5\sin(3n)| = 5|\sin(3n)| \leq 5 \cdot 1 = 5$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

(b) Niz s općim članom $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$ je omeđen. Zaista, kako je

$$n^2 + 1 - 2n = (n-1)^2 \geq 0,$$

to je $2n \leq n^2 + 1$, odnosno $\frac{2n}{n^2+1} \leq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Prema tome,

$$|a_n| = \frac{2n}{n^2+1} \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(c) Niz s općim članom $a_n = n^3$ nije omeđen, jer ne postoji pozitivan realni broj M sa svojstvom $|a_n| = n^3 \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.1.7. Niz s općim članom $a_n = \frac{1}{n}$ je strogo padajući.

Da bismo to provjerili računamo razliku:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prema tome, $a_n > a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.1.8. Niz s općim članom $a_n = \frac{2n}{n+1}$ je strogo rastući.

Da bismo to provjerili računamo razliku:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2(n+1)^2 - 2n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Prema tome, $a_n < a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.1.9. Niz s općim članom $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ je omeđen, ali nije monoton.

Naime, $|a_n| = \frac{n}{n+1} < 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je (a_n) omeđen niz.

Uočimo,

$$-\frac{1}{2} = a_1 < a_2 = \frac{2}{3}, \qquad \frac{2}{3} = a_2 > a_3 = -\frac{3}{4},$$

što pokazuje da niz (a_n) nije monoton.

1.2 Aritmetički niz

Niz (a_n) realnih brojeva je *aritmetički* ako postoji realni broj d takav da je $a_{n+1} - a_n = d$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Prema tome, razlika uzastopnih članova niza je stalno isti broj d.

Broj d nazivamo *razlikom* (ili *diferencijom*) aritmetičkog niza (a_n).

Uočimo

$a_2 = a_1 + d;$
$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d;$
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d;$

tj. općenito vrijedi

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odavde vidimo da se n-ti član aritmetičkog niza (a_n) može izraziti pomoću prvog člana a_1 i razlike d.

Bitno svojstvo aritmetičkog niza jest da je svaki njegov član (osim prvog) aritmetička sredina svog neposrednog prethodnika i neposrednog sljedbenika, tj.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zaista, kako je $a_{n+1} - a_n = d$ i $a_{n+2} - a_{n+1} = d$, oduzimanjem druge jednakosti od prve dobije se $2a_{n+1} - a_n - a_{n+2} = 0$, odnosno $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2})$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Tim svojstvom je aritmetički niz u potpunosti karakteriziran. Drugim riječima, niz (a_n) za čije članove vrijedi $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2})$ je aritmetički. Naime, tada je $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, odnosno

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ...$, tj. razlika uzastopnih članova je uvijek isti broj.

Primjer 1.2.1. Naći sedmi član aritmetičkog niza (a_n) čiji je prvi član $a_1 = 5$, a razlika $d = -2$.

Rješenje.
Iz formule za opći član aritmetičkog niza imamo:
$a_7 = a_1 + 6d = 5 + 6 \cdot (-2) = -7$.

Primjer 1.2.2. Naći treći član aritmetičkog niza (a_n) ako je $a_5 = 19$ i $a_8 = 31$.

Rješenje.
Iz formule za opći član aritmetičkog niza imamo:
$19 = a_5 = a_1 + 4d$;
$31 = a_8 = a_1 + 7d$.
Oduzimanjem prve jednadžbe od druge dobije se $3d = 12$, pa je $d = 4$. Sada je $a_1 = 19 - 4d = 19 - 4 \cdot 4 = 3$. Konačno, $a_3 = a_1 + 2d = 3 + 2 \cdot 4 = 11$.

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza

Prema formuli za opći član aritmetičkog niza vrijedi

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Prema tome,

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \cdots .$$

Označimo sada s s_n zbroj prvih n članova aritmetičkog niza (a_n) :

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Ispišemo li ovih n pribrojnika obrnutim redoslijedom

$$s_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1,$$

te zatim zbrojimo ove dvije jednakosti, dobijemo

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1).$$

Pokazali smo da u ovom izrazu svi pribrojnici unutar zagrada iznose $a_1 + a_n$, odakle slijedi

$$2s_n = n(a_1 + a_n),$$

odnosno

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Kako je $a_n = a_1 + (n-1)d$, također vrijedi

$$s_n = \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big).$$

Primjer 1.2.3. Naći zbroj prvih 100 neparnih prirodnih brojeva.

Rješenje.

Neparni prirodni brojevi čine aritmetički niz, gdje je $a_1 = 1$ i $d = 2$. Koristimo formulu za zbroj prvih $n = 100$ članova tog aritmetičkog niza. Vrijedi

$$s_{100} = \frac{100}{2}\big(2 \cdot 1 + (100-1) \cdot 2\big) = 10000.$$

Primjer 1.2.4. Naći zbroj prvih 30 članova aritmetičkog niza $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$.

Rješenje.

Ovdje je $a_1 = 2$, $d = 3$, pa je

$$s_{30} = \frac{30}{2}\big(2 \cdot 2 + (30-1) \cdot 3\big) = 1365.$$

1.3 Geometrijski niz

Niz (a_n) realnih brojeva različitih od nule je *geometrijski* ako postoji $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je $a_{n+1} = a_n \cdot q$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Budući da je količnik $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ uzastopnih članova niza jednak q, broj q zovemo *količnikom* (ili *kvocijentom*) niza (a_n).

Vrijedi
$a_2 = a_1 \cdot q$;
$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$;
$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$;
tj. općenito je

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prema tome, n-ti član geometrijskog niza može se izraziti pomoću prvog člana a_1 i količnika q.

Ako je (a_n) geometrijski niz s pozitivnim članovima, tada je svaki njegov član (osim prvog) geometrijska sredina dvaju susjednih članova, tj. vrijedi

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot a_{n+2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Naime, iz $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ i $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q$ slijedi $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$, pa je $a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot a_{n+2}}$.

Vrijedi i obratno, ako je (a_n) niz s pozitivnim članovima za koje vrijedi $a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot a_{n+2}}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tada je taj niz geometrijski. Naime, kvadriranjem ove jednakosti dobije se $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$ odakle slijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Prema tome, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots$, što pokazuje da se radi o geometrijskom nizu.

Primjer 1.3.1. Naći peti član geometrijskog niza (a_n) čiji je prvi član $a_1 = 4$, a količnik $q = \frac{1}{2}$.

Rješenje.
Iz formule za opći član geometrijskog niza imamo:
$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 4 \cdot (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{4}$.

Primjer 1.3.2. Naći četvrti član geometrijskog niza (a_n) ako je $a_3 = 12$ i $a_7 = 192$.

Rješenje.
Iz formule za opći član geometrijskog niza imamo:
$12 = a_3 = a_1 \cdot q^2$;

$192 = a_7 = a_1 \cdot q^6$.

Podijelimo li drugu jednadžbu s prvom, dobit ćemo $q^4 = 16$. Ova jednadžba ima dva rješenja: $q_1 = -2$ i $q_2 = 2$.

U prvom slučaju dobije se $(a_1)_1 = \frac{12}{q_1^2} = \frac{12}{4} = 3$, odakle slijedi

$$(a_4)_1 = (a_1)_1 \cdot q_1^3 = 3 \cdot (-2)^3 = -24.$$

U drugom slučaju imamo $(a_1)_2 = \frac{12}{q_2^2} = \frac{12}{4} = 3$, pa je

$$(a_4)_2 = (a_1)_2 \cdot q_2^3 = 3 \cdot 2^3 = 24.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza

Označimo s s_n zbroj prvih n članova geometrijskog niza (a_n) :

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Tada je, prema izrazu za opći član geometrijskog niza,

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-3} + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}. \qquad (1)$$

Množenjem ove jednakosti s $-q$ dobije se

$$-s_n \cdot q = -a_1 \cdot q - a_1 \cdot q^2 - a_1 \cdot q^3 - \cdots - a_1 \cdot q^{n-2} - a_1 \cdot q^{n-1} - a_1 \cdot q^n. \quad (2)$$

Zbrojimo li sada jednakosti (1) i (2) dobit ćemo

$$s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_1 \cdot q^n.$$

Odavde je $s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$, odakle slijedi

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

U slučaju $q = 1$ svi članovi niza (a_n) su jednaki, pa je $s_n = na_1$.

Primjer 1.3.3. Naći zbroj prvih deset članova geometrijskog niza 5, -15, 45, -135, $405, \ldots$.

Rješenje.

U ovom geometrijskom nizu je $a_1 = 5$ i $q = -3$. Prema formuli za zbroj prvih n članova geometrijskog niza vrijedi

$$s_{10} = 5 \cdot \frac{1-(-3)^{10}}{1-(-3)} = -73810.$$

Primjer 1.3.4. Naći zbroj prvih šest članova geometrijskog niza (a_n) ako je $a_1 + a_3 = 52$ i $a_2 + a_4 = 260$.

Rješenje.
$52 = a_1 + a_3 = a_1 + a_1 \cdot q^2 = a_1(1 + q^2)$;
$260 = a_2 + a_4 = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^3 = a_1 \cdot q(1 + q^2)$.
Podijelimo li drugu jednadžbu s prvom dobit ćemo $q = \frac{260}{52} = 5$.
Sada iz prve jednadžbe slijedi $a_1 = \frac{52}{1+5^2} = 2$.
Konačno,

$$s_6 = a_1 \frac{1 - q^6}{1 - q} = 2 \cdot \frac{1 - 5^6}{1 - 5} = 7812.$$

1.4 Konvergencija niza

Kažemo da niz (a_n) realnih brojeva *konvergira* (ili *teži*) prema realnom broju a ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $a_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$.

Broj a zovemo *limes* (ili *granična vrijednost*) niza (a_n) i pišemo

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Prema tome, kakvu god proizvoljnu simetričnu okolinu $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ zadamo oko broja a, postojat će $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da se svi članovi niza nakon a_{n_0} (tj. a_{n_0}, a_{n_0+1}, $a_{n_0+2}, \ldots$) nalaze u toj okolini, tj. vrijedit će $a_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ za sve $n \geq n_0$. Dakle, svi članovi niza (a_n), osim možda konačno mnogo početnih članova, nalazit će se u okolini $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$.

Za niz (a_n) koji ima limes $a \in \mathbb{R}$ kažemo da je *konvergentan*. U protivnom, niz je *divergentan*.

Primjer 1.4.1. Pokazati da je $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Rješenje.
Stavimo $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Jasno je da s porastom prirodnog broja n članovi niza (a_n) postaju sve bliži broju nula. Stoga naslućujemo da niz (a_n) ima limes $a = 0$. Pokažimo to formalno, tj. pomoću dane definicije.

U tu svrhu najprije zadamo realan broj $\varepsilon > 0$, tj. izaberemo proizvoljnu simetričnu okolinu $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$. Želimo pokazati da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $a_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$, odnosno $\frac{1}{n} \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$.

Uvjerimo se da broj $n_0 := [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ (gdje smo s $[\frac{1}{\varepsilon}]$ označili najveći cijeli broj manji ili jednak $\frac{1}{\varepsilon}$) ima traženo svojstvo. Naime, tada je očito $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, pa je $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Stoga za svaki prirodni broj $n \geq n_0$ vrijedi $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ što je i trebalo dokazati.

Uočimo da traženi broj n_0 (koji se pojavljuje u definiciji limesa niza) ovisi o zadanom broju ε. Drugim riječima, n_0 ovisi o širini izabrane okoline $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$ broja a. U pravilu, što je ta okolina uža (tj. ε manji broj), to će n_0 biti veći, odnosno izvan te okoline nalazit će se više članova danog niza, ali uvijek samo *konačno mnogo*.

Npr., zadamo li $\varepsilon = \frac{1}{20}$ u primjeru 1.4.1, imat ćemo $n_0 := [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 = [20] + 1 = 21$. Prema tome, svi članovi niza (a_n) osim prvih 20 nalazit će se u zadanoj okolini $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon\rangle = \langle -\frac{1}{20}, \frac{1}{20}\rangle$ broja nula.

Ako pak zadamo $\varepsilon = \frac{1}{100}$ u primjeru 1.4.1, imat ćemo $n_0 := [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 = [100] + 1 = 101$. Dakle, u ovom će slučaju prvih 100 članova niza (a_n) ostati izvan zadane okoline $\langle -\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\rangle$, dok će se svi ostali članovi niza nalaziti unutar te okoline.

Primjer 1.4.2. Ispitati konvergenciju niza s općim članom $a_n = (-1)^n$.

Rješenje.

Primijetimo da su svi članovi niza s neparnim indeksom jednaki broju -1, dok su članovi niza s parnim indeksom jednaki broju 1. Dakle, ovaj niz poprima samo dvije različite vrijednosti.

Jasno je da bilo koji realan broj a različit od -1 i od 1 ne može biti limes ovoga niza. Naime, tada je moguće pronaći okolinu broja a koja ne sadrži brojeve -1 i 1, pa samim time ta okolina ne sadrži niti jedan član danog niza. Preostaje provjeriti je li neki od brojeva -1 ili 1 limes ovoga niza.

Broj $a = -1$ nije limes niza, budući da za npr. $\varepsilon = 1$ okolina $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle = \langle -2, 0\rangle$ ne sadrži broj 1, pa dakle niti sve članove niza s parnim indeksom. Prema tome, izvan okoline $\langle -2, 0\rangle$ ostalo je beskonačno mnogo članova niza.

Slično, niti broj $a = 1$ ne može biti limes ovoga niza. Naime, zadamo li $\varepsilon = 1$, tada se izvan okoline $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle = \langle 0, 2\rangle$ nalazi broj -1. Dakle, izvan ove okoline nalaze se svi članovi niza s neparnim indeksom, kojih je također beskonačno mnogo.

Prema tome, zadani niz je divergentan.

Svojstva konvergentnih nizova

(a) *Konvergentan niz je omeđen.*

(b) *Konvergentan niz ima samo jedan limes.*

(c) *Ako su* (a_n) *i* (b_n) *konvergentni nizovi, te ako postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tako da je* $a_n \leq b_n$ *za svaki* $n \geq n_0$*, tada je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(d) (Teorem o sendviču) *Ako su nizovi* (a_n), (b_n) *i* (c_n) *takvi da je* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *veći od nekog* $n_0 \in \mathbb{N}$*, te ako vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$*, tada je niz* (c_n) *konvergentan i vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$.

(e) *Ako je* (a_n) *nul-niz (tj.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*) i* (b_n) *omeđen niz, tada je* $(a_n b_n)$ *nul-niz, tj.* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$.

Napomenimo da je omeđenost nužan, ali ne i dovoljan uvjet za konvergenciju niza. Prema tome, postoje omeđeni nizovi koji nisu konvergentni. Primjerice, niz s općim članom $a_n = (-1)^n$ je omeđen. Međutim, taj niz ne konvergira (vidi primjer 1.4.2).

U slučaju monotonog niza, omeđenost će osigurati i njegovu konvergenciju. Dakle, vrijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 1.4.3. *Monoton i omeđen niz realnih brojeva je konvergentan.*

Operacije s konvergentnim nizovima

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$*, tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot a, \quad k \in \mathbb{R}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

(e) *Ako je* $b_n \neq 0$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i* $b \neq 0$*, tada je* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

(g) *Ako je* $a_n > 0$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i* $a > 0$*, tada je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^c = a^c, \quad c \in \mathbb{R}$.

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} c^{a_n} = c^a, \quad c > 0$.

Nizovi s beskonačnim limesima

Kažemo da niz (a_n) *divergira prema* ∞ ako za svaki $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n > M$ za svaki $n \geq n_0$.
Tada pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Kažemo da niz (a_n) *divergira prema* $-\infty$ ako niz $(-a_n)$ divergira prema ∞. Pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Primjer 1.4.4. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

Rješenje.
Treba dokazati da kakav god $M > 0$ izaberemo, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $2^n > M$ za svaki $n \geq n_0$.
Primijetimo da je

$$2^n > M \Leftrightarrow \log 2^n > \log M \Leftrightarrow n\log 2 > \log M \Leftrightarrow n > \frac{\log M}{\log 2}.$$

Uzmimo $n_0 := \left[\frac{\log M}{\log 2}\right] + 1$ (gdje nam $[x]$ kao i ranije označava najveći cijeli broj manji ili jednak x). Tada je $n_0 > \frac{\log M}{\log 2}$, pa za svaki prirodni broj $n \geq n_0$ imamo $n > \frac{\log M}{\log 2}$, pa je stoga $2^n > M$.

Operacije s divergentnim nizovima

(a) *Neka je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. *Tada vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = -\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty, \quad \textit{ako je } a > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty, \quad \textit{ako je } a < 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0.$$

(b) *Neka je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. *Tada vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty.$$

(c) *Neka je* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *i* $c > 0$. *Tada je* $\lim_{n\to\infty} a_n^c = \infty$.

(d) *Neka je* $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, *neka je* $b_n > 0$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. *Tada je* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Operacije navedene pod (a) i (b) simbolički redom zapisujemo ovako:

$$a + \infty = \infty,$$

$$a - \infty = -\infty,$$

$$a \cdot \infty = \infty, \quad \text{ako je } a > 0,$$

$$a \cdot \infty = -\infty, \quad \text{ako je } a < 0,$$

$$\frac{a}{\infty} = 0,$$

$$\infty + \infty = \infty,$$

$$\infty \cdot \infty = \infty.$$

Napomenimo da su oblici $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 neodređeni.

Neki važni limesi

(a) *Za geometrijski niz* (q^n) *vrijedi*:

$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, *ako je* $|q| < 1$;

$\lim_{n\to\infty} q^n = 1$, *ako je* $q = 1$;

$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, *ako je* $q > 1$;

(q^n) *je divergentan, ako je* $q \leq -1$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n = e^k, \quad k\in\mathbb{R};$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1;$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k} = 1, \quad k>0;$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{k^n} = 0, \quad k>1;$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k^n}{n!} = 0, \quad k\in\mathbb{R};$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$

Sljedeće zadatke riješit ćemo koristeći pravila za računanje s limesima.

Primjer 1.4.5. Izračunati limese:

1.) $\lim\limits_{n\to\infty} 7^{-n}\cdot\sin(2n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n\cdot\sin(2n) = (0\cdot\text{omeđeno}) = 0$

2.) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin^2(n+2)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sin^2(n+2) = (0\cdot\text{omeđeno}) = 0$

Primjer 1.4.6. Izračunati limese:

1.)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+7n+5}{3n^2-8n+1} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\ &= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } n^2)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{7}{n}+\frac{5}{n^2}}{3-\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{2+0+0}{3-0+0} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

2.)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{-5n^3+7n+4}{2n^5+n^2-7} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\ &= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } n^3)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{-5+\frac{7}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{2n^2+\frac{1}{n}-\frac{7}{n^3}} = \left(\frac{-5}{\infty}\right) = 0\end{aligned}$$

3.)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^7+n^4+1}{-3n^5+2n^2-n+3} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\ &= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } n^5)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^5}}{-3+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}+\frac{3}{n^5}}\\ &= \left(\frac{\infty}{-3}\right) = -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.)\ \lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot\sqrt[3]{n}-6}{\sqrt{n}+5\cdot\sqrt[3]{2n}} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } \sqrt[3]{n})\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{7-\frac{6}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[6]{n}+5\cdot\sqrt[3]{2}}\\
&= \left(\frac{7}{\infty}\right)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+\sin n}{2n+\sin n} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } n)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}\cdot\sin n}{2+\frac{1}{n}\cdot\sin n}\\
&= \left(\frac{1+0\cdot\text{omeđeno}}{2+0\cdot\text{omeđeno}}\right)=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6.)\ \lim_{n\to\infty}\frac{7^n+2}{9^n-3} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } 9^n)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{7}{9}\right)^n+\frac{2}{9^n}}{1-\frac{3}{9^n}}=\frac{0+0}{1-0}=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7.)\ \lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 5^n+3^n}{5^n+2^n-1} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } 5^n)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4+\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n-\frac{1}{5^n}}=\frac{4+0}{1+0-0}=4
\end{aligned}$$

Primjer 1.4.7. Izračunati limese:

$$\begin{aligned}
1.)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n}\right) &= (\infty-\infty)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+7}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+7}+\sqrt{n}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+7)-n}{\sqrt{n+7}+\sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{7}{\sqrt{n+7}+\sqrt{n}}=\left(\frac{7}{\infty}\right)=0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2.)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right) &= (\infty-\infty)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{\sqrt{n^2+3n}+n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3n)-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= (\text{podijelimo brojnik i nazivnik s } n)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Primjer 1.4.8. Izračunati limese:

$$
\begin{aligned}
1.)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{5n+6} &= (1^\infty)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{3n\cdot\frac{5}{3}+6}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{5}{3}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{6}\\
&= (e^2)^{\frac{5}{3}}\cdot 1=e^{\frac{10}{3}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-5}{n+2}\right)^{n-7} &= (1^\infty)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-5}{n+2}-1\right)^{n-7}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-5-(n+2)}{n+2}\right)^{n-7}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7}{n+2}\right)^{n-7}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7}{n+2}\right)^{(n+2)-9}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7}{n+2}\right)^{n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7}{n+2}\right)^{-9}\\
&= e^{-7}\cdot 1=e^{-7}
\end{aligned}
$$

2 Redovi realnih brojeva

2.1 Pojam reda

Neka je zadan niz (a_n) realnih brojeva. Pomoću niza (a_n) definiramo novi niz (s_n) na sljedeći način.

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \end{aligned}$$

itd., općenito n-ti član niza (s_n) definiramo kao zbroj prvih n članova niza (a_n) :

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Redom nazivamo uređeni par $\big((a_n), (s_n)\big)$ nizova (a_n) i (s_n).

Broj a_n zovemo *općim* (ili *n-tim*) *članom reda.*
s_n nazivamo *n-tom parcijalnom sumom reda.*

Za red koristimo oznaku

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

ili kraće

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Primjer 2.1.1. (a) Neka je dan niz (n) prirodnih brojeva. Pripadni red je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots .$$

(b) Nizu s općim članom $a_n = \frac{1}{n}$ odgovara red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots .$$

(c) Nizu s općim članom $a_n = \frac{1}{10^n}$ odgovara red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots .$$

(d) Nizu s općim članom $a_n = (-1)^n$ odgovara red

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots .$$

2.2 Konvergencija reda. Suma reda

Primijetimo da smo definirajući red brojeva $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zapravo članove niza (a_n) povezali znakom plus. Znamo računati konačne sume. No ovdje se radi o "zbrajanju" beskonačno mnogo članova nekog niza. Stoga se postavlja pitanje može li se tom "zbroju" dati neki smisao.

U tu svrhu promatramo niz parcijalnih suma (s_n). Kao što smo vidjeli, do članova toga niza dolazimo zbrajajući redom članove zadanog niza (a_n). Član s_n dobivamo tako da prethodnom članu s_{n-1} dodamo još jedan, n-ti po redu, član niza (a_n). Kako n raste, zbrajamo redom sve više članova početnog niza (a_n). Stoga ćemo problem računanja "sume reda" svesti na pitanje konvergencije niza (s_n). Preciznije, ako (s_n) konvergira, tada je prirodno njegov limes smatrati beskonačnim zbrojem članova reda (a_n). Prema tome, imamo sljedeću definiciju.

Kažemo da je red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentan* ako niz (s_n) njegovih parcijalnih suma konvergira. U tom slučaju broj $s = \displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ zovemo *sumom reda*, te pišemo

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Za red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je *divergentan* ako je niz (s_n) njegovih parcijalnih suma divergentan.

Kažemo da red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira prema* ∞ ako je $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. Tada pišemo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Kažemo da red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira prema* $-\infty$ ako je $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$. Tada pišemo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

Primjer 2.2.1. Ispitati konvergenciju reda pomoću niza parcijalnih suma. Ako red konvergira, naći njegovu sumu.

1.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$

Rješenje.

Niz s općim članom $a_n = n$ je aritmetički, s razlikom $d = 1$. Prema formuli za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza je

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + n).$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+n)}{2} = \infty,$$

to je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, tj. red divergira prema ∞.

2.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

Rješenje.

Za dani red s općim članom $a_n = (-1)^n$ vrijedi:
$s_1 = -1$
$s_2 = -1 + 1 = 0$
$s_3 = -1 + 1 - 1 = -1$
$s_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$
itd., općenito je

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{ako je } n \text{ paran;} \\ -1, & \text{ako je } n \text{ neparan.} \end{cases}$$

Budući da je niz (s_n) parcijalnih suma divergentan, to je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergentan.

3.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Rješenje.

Opći član ovog reda $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ prikazat ćemo kao zbroj parcijalnih razlomaka:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}.$$

Odavde je

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}.$$

Koeficijente A i B nalazimo rješavanjem sustava:

$$\begin{array}{rcl} A+B & = & 0 \\ A & = & 1 \end{array}.$$

Prema tome, $A = 1$, $B = -1$, pa je

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Sada računamo n-tu parcijalnu sumu:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ &= \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n-2} - \tfrac{1}{n-1}\right) + \left(\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}\right) + \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \tfrac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

zaključujemo da je zadani red konvergentan i da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

4.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

Rješenje.

Kao i u prethodnom primjeru opći član reda $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$ prikazat ćemo kao zbroj parcijalnih razlomaka:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}.$$

Odavde slijedi

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A(n+2)+Bn}{n(n+2)} = \frac{(A+B)n+2A}{n(n+2)}.$$

Stoga je

$$\begin{array}{rcl} A+B & = & 0 \\ 2A & = & 1 \end{array}.$$

Rješenje sustava je $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$. Dakle,

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\Big).$$

Zbrajanjem prvih n članova niza (a_n) :

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & \frac{1}{2}\big(1-\frac{1}{3}\big) \\ a_2 & = & \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\big) \\ a_3 & = & \frac{1}{2}\big(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\big) \\ a_4 & = & \frac{1}{2}\big(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\big) \\ a_5 & = & \frac{1}{2}\big(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\big) \\ & \vdots & \\ a_{n-3} & = & \frac{1}{2}\big(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\big) \\ a_{n-2} & = & \frac{1}{2}\big(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\big) \\ a_{n-1} & = & \frac{1}{2}\big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\big) \\ a_n & = & \frac{1}{2}\big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\big) \end{array}$$

dobije se

$$s_n = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\Big) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}.$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}\Big) = \frac{3}{4},$$

zadani red je konvergentan i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}.$$

Nužni uvjet konvergencije reda

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Ako s (s_n) označimo niz parcijalnih suma danog reda, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, i također $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Kako je $a_n = s_n - s_{n-1}$, to je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Time je dokazana sljedeća tvrdnja.

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira, onda je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Uočimo da nam nužni uvjet konvergencije reda govori sljedeće. Ako niz (a_n) ne konvergira prema nuli, tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan. Međutim, ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tada još uvijek ne znamo ništa o konvergenciji danog reda.

Primjer 2.2.2. Ispitati konvergenciju sljedećih redova.

1.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{n+3}$

Rješenje.

Opći član danog reda je $a_n = \frac{5n-2}{n+3}$. Kako je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{n+3} = 5 \neq 0,$$

to je zadani red divergentan, budući da nije ispunjen nužni uvjet konvergencije reda.

2.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$.

Rješenje.

Stavimo $a_n = \cos\frac{1}{n}$. Računamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos 0 = 1.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, zaključujemo da zadani red divergira.

3.) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$.

Rješenje.

Opći član ovog reda je $a_n = \sin n$. Kako niz (a_n) divergira, to i zadani red divergira, jer nije ispunjen nužni uvjet konvergencije reda.

Operacije s konvergentnim redovima

Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$, *tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = a - b$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot a, \quad k \in \mathbb{R}$.

2.3 Neki važni redovi

Uvodimo sljedeće redove.

(a) **Geometrijski red**

Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je *geometrijski*, ako je niz (a_n) geometrijski, tj. postoji $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tako da je $a_{n+1} = a_n \cdot q$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Proučimo konvergenciju geometrijskog reda. Pokazali smo da suma

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

prvih n članova geometrijskog niza (a_n) iznosi

$$s_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{ako je } q \neq 1; \\ n a_1, & \text{ako je } q = 1. \end{cases}$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ za $|q| < 1$, to je u tom slučaju

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Za $q > 1$ i za $q \leq -1$ niz (q^n) je divergentan, pa je stoga i (s_n) divergentan niz.

Za $q = 1$ je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} na_1 = \pm\infty,$$

pa je i u tom slučaju geometrijski red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan.

Time smo dokazali sljedeću tvrdnju.

Geometrijski red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentan ako i samo ako je* $|q| < 1$. *Tada je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Primjer 2.3.1. Ispitati konvergenciju geometrijskih redova. Ako red konvergira, izračunati njegovu sumu.

1.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Rješenje.

Opći član zadanog reda je $a_n = (\frac{1}{3})^n$. Kako je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\frac{1}{3})^{n+1}}{(\frac{1}{3})^n} = \frac{1}{3}, \quad n \in \mathbb{N},$$

to je dani red geometrijski s količnikom $q = \frac{1}{3}$. Budući da je $|q| = \frac{1}{3} < 1$, to red konvergira i ima sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

2.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}$

Rješenje.

Opći član zadanog reda je $a_n = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}$. Računamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2^n}}}{\frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Stoga je dani red geometrijski s količnikom $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Budući da je $|q| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, red konvergira i ima sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2-\sqrt{2}} = 2+\sqrt{2}.$$

3.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^n$

Rješenje.

Ovdje je opći član $a_n = (-5)^n$. Kako je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-5)^{n+1}}{(-5)^n} = -5, \quad n \in \mathbb{N},$$

red je geometrijski s količnikom $q = -5$. Budući da je $|q| = 5 > 1$, zadani red divergira.

(b) **Harmonijski red**

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ zovemo *harmonijskim redom.*

Uočimo da opći član harmonijskog reda $a_n = \frac{1}{n}$ konvergira prema nuli. Stoga je zadovoljen nužni uvjet konvergencije reda. Međutim, harmonijski red je divergentan.

(c) **Poopćeni harmonijski red**

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, pri čemu je $p \in \mathbb{R}$, zovemo *poopćenim harmonijskim redom.*

Primijetimo da u slučaju $p = 1$ dobivamo harmonijski red.

Za poopćeni harmonijski red se pokazuje da konvergira kada je $p > 1$, a divergira za $p \leq 1$.

Primjer 2.3.2. 1.) Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ je konvergentan. Naime, to je poopćeni harmonijski red, gdje je $p = 4 > 1$.

2.) Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ je divergentan, jer je to poopćeni harmonijski red s $p = \frac{1}{2} < 1$.

3.) Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$ je konvergentan. Naime, $n\sqrt[3]{n} = n^{\frac{4}{3}}$, pa se ovdje radi o poopćenom harmonijskom redu s $p = \frac{4}{3} > 1$.

2.4 Kriteriji za konvergenciju redova s pozitivnim članovima

U prethodnoj točki proučili smo konvergenciju geometrijskog reda. Pritom smo u slučaju konvergentnog geometrijskog reda izveli formulu pomoću koje računamo njegovu sumu. Nadalje, za poopćeni harmonijski red znamo utvrditi konvergira li ili ne. Međutim, ako se ovdje radi o konvergentnom redu, općenito ne znamo kako izračunati njegovu sumu.

Sumu proizvoljnog konvergentnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ moguće je izračunati samo u nekim jednostavnijim slučajevima. Srećom, u mnogim je primjenama dovoljno utvrditi konvergira li zadani red ili ne. Ako je red konvergentan, tada njegovu sumu s možemo aproksimirati n-tom parcijalnom sumom s_n, pri čemu činimo pogrešku $s - s_n$.

Imamo li red s pozitivnim članovima (tj. red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdje je $a_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$), tada je pripadni niz parcijalnih suma (s_n) monotono rastući. Ako je pritom niz (s_n) omeđen, tada će takav niz konvergirati (vidi točku 1.4). Dakle, u tom slučaju je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan. Ako (s_n) nije omeđen niz, tada je $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, tj. dani red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira prema ∞.

U ovoj točki proučavamo redove s pozitivnim članovima. Navest ćemo neke kriterije koji nam omogućuju da za dani red s pozitivnim članovima utvrdimo konvergira li ili ne.

Kriterij konvergencije na osnovi uspoređivanja

Teorem 2.4.1. *Neka su* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *redovi s pozitivnim članovima, te* *neka postoji realan broj $c > 0$ tako da je $a_n \leq cb_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) *Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, onda konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq c\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

(b) *Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, onda divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Teorem 2.4.2. *Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi sa strogo pozitivnim članovima (tj. $a_n, b_n > 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$) i neka postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$. Tada oba reda istovremeno konvergiraju ili divergiraju.*

U sljedećim primjerima ispitat ćemo konvergenciju danog reda uspoređujući ga s geometrijskim ili poopćenim harmonijskim redom.

Primjer 2.4.3. Ispitati konvergenciju sljedećih redova.

1.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Rješenje.

U primjeru 2.2.1 (3) smo pokazali da je zadani red konvergentan i da njegova suma iznosi 1. Sada ćemo vidjeti da se konvergencija ovog reda može ispitati uspoređujući ga s poopćenim harmonijskim redom. Opći član zadanog reda je $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Za velike vrijednosti broja n, broj $n+1$ se ponaša kao i broj n. Stoga je za velike n

$$\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2}.$$

To nam govori da bismo konvergenciju zadanog reda mogli utvrditi uspoređujući ga s poopćenim harmonijskim redom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ za koji znamo da konvergira. Opći član ovog reda je $b_n = \frac{1}{n^2}$. Uočimo

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} = b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odavde, zbog konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, po teoremu o uspoređivanju redova slijedi da je zadani red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan.

Uočimo da bismo ovdje do istog zaključka došli i računanjem $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Naime,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, to prema teoremu o uspoređivanju redova zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ također konvergira.

2.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+1}$

Rješenje.

Opći član zadanog reda je $a_n = \frac{1}{5n+1}$. Za velike vrijednosti broja n, nazivnik $5n+1$ se ponaša kao $5n$, pa je

$$\frac{1}{5n+1} \sim \frac{1}{5n}.$$

Stoga ćemo konvergenciju danog reda ispitati uspoređujući ga s harmonijskim redom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ za koji znamo da divergira. Stavimo $b_n = \frac{1}{n}$, $c = \frac{1}{6}$. Tada je

$$a_n = \frac{1}{5n+1} \geq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n} = cb_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Budući da red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira to, prema teoremu o uspoređivanju redova, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ također divergira.

Uvjerite se da bismo i ovdje, kao i u prethodnom primjeru, do istog zaključka došli računajući limes $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

3.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+5n+1}{n^4+n}$

Rješenje.

Opći član zadanog reda je $a_n = \frac{n^3+5n+1}{n^4+n}$. Kako se za velike vrijednosti broja n, brojnik n^3+5n+1 ponaša kao vodeća potencija n^3, a nazivnik n^4+n kao n^4, to je

$$\frac{n^3+5n+1}{n^4+n} \sim \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}.$$

Stoga ćemo zadani red usporediti s harmonijskim redom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ za koji znamo da divergira. Opći član ovog reda je $b_n = \frac{1}{n}$. Lako se provjeri da je

$$a_n = \frac{n^3+5n+1}{n^4+n} > \frac{1}{n} = b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odavde, zbog divergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, po teoremu o uspoređivanju redova slijedi da je zadani red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan.

4.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)\sqrt{n+3}}$

Rješenje.

Opći član danog reda je $a_n = \frac{n}{(n^2+1)\sqrt{n+3}}$. Za velike vrijednosti broja n, broj n^2+1 se ponaša kao n^2, a $\sqrt{n+3}$ kao $\sqrt{n}$. Stoga je

$$\frac{n}{(n^2+1)\sqrt{n+3}} \sim \frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Red s općim članom $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ je poopćeni harmonijski red koji konvergira. Kako je

$$a_n = \frac{n}{(n^2+1)\sqrt{n+3}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = b_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

a red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentan, to je po teoremu o uspoređivanju redova i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan.

5.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$

Rješenje.

Stavimo $a_n = \sin\frac{1}{n}$. Konvergenciju zadanog reda ispitat ćemo uspoređujući ga s harmonijskim redom. Stavimo stoga $b_n = \frac{1}{n}$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

Budući da red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira, to po teoremu o uspoređivanju redova zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ također divergira.

6.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{3^n}$

Rješenje.

Stavimo $a_n = \sin\frac{1}{3^n}$. Konvergenciju zadanog reda ispitat ćemo uspoređujući ga s geometrijskim redom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$. Stavimo $b_n = \frac{1}{3^n}$. Kako je

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3},$$

to geometrijski red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, jer je $|q| < 1$. Sada je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} = 1 \neq 0.$$

Budući da red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, to po teoremu o uspoređivanju redova zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ također konvergira.

7.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2^n}$

Rješenje.

Stavimo $a_n = \frac{1}{n+2^n}$. Da bismo ispitali konvergenciju, usporedit ćemo zadani red s geometrijskim redom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Neka je $b_n = \frac{1}{2^n}$. Kako je $q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2}$, to red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira budući da je $|q| < 1$. Računamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n+2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{n}{2^n}+1} = \frac{1}{0+1} = 1 \neq 0.$$

Budući da red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, to po teoremu o uspoređivanju redova zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ također konvergira.

Korištenjem teorema o uspoređivanju redova mogu se dokazati sljedeći kriteriji koji nam služe za ispitivanje konvergencije zadanog reda.

Teorem 2.4.4 (D'Alembertov kriterij). *Neka je* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *red sa strogo pozitivnim članovima, te neka je*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

(a) *Ako je* $q < 1$, *red* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentan.*

(b) *Ako je* $q > 1$*, red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentan.*

Teorem 2.4.5 (Cauchyjev kriterij). *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *red sa strogo pozitivnim članovima, te neka je*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

(a) *Ako je* $q < 1$*, red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentan.*

(b) *Ako je* $q > 1$*, red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentan.*

Teorem 2.4.6 (Raabeov kriterij). *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *red sa strogo pozitivnim članovima, te neka je*

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) = q.$$

(a) *Ako je* $q > 1$*, red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentan.*

(b) *Ako je* $q < 1$*, red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentan.*

Uočimo da nam ova tri kriterija ne daju odgovor na pitanje o konvergenciji zadanog reda u slučaju kada q ne postoji ili je $q = 1$.

Napomenimo da je Cauchyjev kriterij "jači" od D'Alembertovog kriterija. Naime, ako je konvergenciju zadanog reda moguće ispitati pomoću D'Alembertovog kriterija, tada to možemo učiniti i pomoću Cauchyjevog kriterija. Ipak, važno je poznavati D'Alembertov kriterij, budući da je u mnogim primjerima jednostavniji za primjenu.

Primjer 2.4.7. Ispitati konvergenciju sljedećih redova.

1.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

Rješenje.

Računamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n+1)^3}{2^{n+1}n^3}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^3=\frac{1}{2}<1.$$

Prema tome, red konvergira prema D'Alembertovom kriteriju.

Uočimo da do istog rezultata dolazimo primjenom Cauchyjevog kriterija. Zaista,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^3}{2}=\frac{1}{2}<1,$$

pa red konvergira prema Cauchyjevom kriteriju.

2.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{(\sqrt{7})^n}$

Rješenje.

Računamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5(n+1)+1}{(\sqrt{7})^{n+1}}}{\frac{5n+1}{(\sqrt{7})^n}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\lim_{n\to\infty}\frac{5n+6}{5n+1}=\frac{1}{\sqrt{7}}<1.$$

Dakle, red konvergira prema D'Alembertovom kriteriju.

3.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

Rješenje.

Za ovaj red smo ustanovili da konvergira (vidi primjer 2.2.1 (3), odnosno primjer 2.4.3 (1)). Pokažimo sada da se konvergencija zadanog reda može utvrditi i pomoću Raabeovog kriterija. Zaista,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)&=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\Big(\frac{n+2}{n}-1\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}(n+2-n)=\lim_{n\to\infty}2=2>1,\end{aligned}$$

pa dani red konvergira.

Napomenimo da nam u ovom primjeru D'Alembertov i Cauchyjev kriterij nisu od pomoći. Naime, lako se provjeri da je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1.$$

4.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

Rješenje.

Kako je

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}<1,$$

to je red prema Cauchyjevom kriteriju konvergentan.

5.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{4n+2}$

Rješenje.

Kako je

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{4n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{\frac{4n+2}{n}}=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}<1,$$

to je red prema Cauchyjevom kriteriju konvergentan.

6.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}$

Rješenje.

Računamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n=(1^\infty)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n+3}-1\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+3}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+3}\right)^{n+3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+3}\right)^{-3}=e^{-2}<1.
\end{aligned}$$

Dakle, prema Cauchyjevom kriteriju red je konvergentan.

7.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Rješenje.

Budući da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

to je prema D'Alembertovom kriteriju dani red konvergentan.

8.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{(n+1)!}$

Rješenje.

Računamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)-3}{(n+2)!}}{\frac{2n-3}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)(n+1)!}{(2n-3)(n+2)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{(2n-3)(n+2)} = 0 < 1.\end{aligned}$$

Dakle, prema D'Alembertovom kriteriju red je konvergentan.

9.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!}$

Rješenje.

Računamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}}{\frac{n^n}{2^n\cdot n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot n! \cdot (n+1)^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot n^n} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot e > 1.\end{aligned}$$

Dakle, prema D'Alembertovom kriteriju red je divergentan.

10.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Rješenje.

Računamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(2(n+1)\right)!}{\left((n+1)!\right)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!\cdot(n!)^2}{(2n)!\cdot\left((n+1)!\right)^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)\cdot(n!)^2}{(2n)!\cdot\left(n!\cdot(n+1)\right)^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4 > 1.
\end{aligned}$$

Dakle, prema D'Alembertovom kriteriju red je divergentan.

11.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)}$

Rješenje.

Konvergenciju danog reda ispitat ćemo pomoću D'Alembertovog kriterija. Kako je

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)},\\
a_{n+1} &= \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)\cdot(3(n+1)+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)\cdot(4(n+1)-2)}\\
&= \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)\cdot(4n+2)}\\
&= a_n\cdot\frac{3n+4}{4n+2},
\end{aligned}$$

to je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1.$$

pa zadani red konvergira.

12.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)}{1\cdot 4\cdot 9\cdot\ldots\cdot n^2}$

Rješenje.

Kako je

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot \ldots \cdot (4n-2)}{1\cdot 4\cdot 9\cdot \ldots \cdot n^2}, \\ a_{n+1} &= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot \ldots \cdot (4n-2)\cdot 4n\cdot (4(n+1)-2)}{1\cdot 4\cdot 9\cdot \ldots \cdot n^2\cdot (n+1)^2} \\ &= a_n\cdot \frac{4n(4n+2)}{(n+1)^2}, \end{aligned}$$

to je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n(4n+2)}{(n+1)^2} = 16 > 1,$$

pa zadani red divergira prema D'Alembertovom kriteriju.

2.5 Alternirajući redovi

Alternirajućim redom zvat ćemo red čiji članovi naizmjence mijenjaju predznak. Opći oblik takvog reda je

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots,$$

pri čemu je $a_n > 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Za ispitivanje konvergencije alternirajućeg reda služi nam Leibnizov kriterij.

Teorem 2.5.1 (Leibnizov kriterij). *Neka je* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *alternirajući red. Ako je niz* (a_n) *strogo padajući i ako je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *tada je red* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *konvergentan, te vrijedi*

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n < a_1.$$

Primjer 2.5.2. Ispitati konvergenciju alternirajućih redova.

1.) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

Rješenje.

Stavimo $a_n = \frac{1}{n}$. Jasno je da je niz (a_n) strogo padajući, te da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Prema Leibnizovom kriteriju zaključujemo da zadani red konvergira.

2.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

Rješenje.

Stavimo $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Kao i u prethodnom primjeru, (a_n) je strogo padajući niz koji konvergira prema nuli. Stoga je prema Leibnizovom kriteriju zadani red konvergentan.

3.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{1+n^2}$

Rješenje.

Stavimo $a_n = \frac{1+n}{1+n^2}$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{1+n^2} = 0.$$

Provjerimo monotonost niza (a_n). U tu svrhu računamo razliku uzastopnih članova niza

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{1+n}{1+n^2} - \frac{1+(n+1)}{1+(n+1)^2} = \frac{1+n}{1+n^2} - \frac{2+n}{n^2+2n+2} \\ &= \frac{n^2+3n}{(1+n^2)(n^2+2n+2)} > 0. \end{aligned}$$

Prema tome, $a_n > a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tj. niz (a_n) je strogo padajući.

Budući da su ispunjene obje pretpostavke Leibnizovog kriterija zaključujemo da zadani red konvergira.

4.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$

Rješenje.

Stavimo $a_n = \frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)} = 0.$$

Ispitajmo monotonost niza (a_n). Za $n \in \mathbb{N}$ računamo

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{2n+1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} > 0. \end{aligned}$$

Dakle, $a_n > a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tj. (a_n) je strogo padajući niz.

Budući da su ispunjene obje pretpostavke Leibnizovog kriterija zaključujemo da zadani red konvergira.

5.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3^n}$

Rješenje.

Stavimo $a_n = \frac{n}{3^n}$. Vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0.$$

Također, za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{3^n} - \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{2n-1}{3^{n+1}} > 0.$$

Dakle, (a_n) je strogo padajući niz.

Prema Leibnizovom kriteriju zadani red je konvergentan.

6.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$

Rješenje.

Stavimo $a_n = \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$. Očito je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = 0.$$

Nadalje, za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} - \frac{n+2}{(n+2)\sqrt{n+2}-1} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)\big(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\big)+1}{\big((n+1)^{\frac{3}{2}}-1\big)\big((n+2)^{\frac{3}{2}}-1\big)} > 0. \end{aligned}$$

Dakle, niz (a_n) je strogo padajući niz.

Prema Leibnizovom kriteriju zadani red je konvergentan.

2.6 Apsolutno konvergentni redovi

Kažemo da je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *apsolutno konvergentan* ako je konvergentan red

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

apsolutnih vrijednosti njegovih članova.

Važno je istaknuti da kod apsolutno konvergentnih redova suma reda ne ovisi o poretku njegovih članova.

Veza između apsolutne i "obične" konvergencije reda dana je sljedećim teoremom.

Teorem 2.6.1. *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergira, tada konvergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Napomenimo da obrat ove tvrdnje općenito ne vrijedi, dakle

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira} \quad \not\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergira.}$$

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, a red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira, tada kažemo da je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uvjetno konvergentan.*

Primjer 2.6.2. 1.) Red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ je uvjetno konvergentan.

Zaista, koristeći Leibnizov kriterij pokazali smo u primjeru 2.5.2 (1) da ovaj red konvergira. Nadalje, red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ apsolutnih vrijednosti njegovih članova je harmonijski red za koji znamo da divergira.

2.) Red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ je uvjetno konvergentan.

Naime, u primjeru 2.5.2 (2) pokazali smo da ovaj red konvergira. Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ apsolutnih vrijednosti njegovih članova je poopćeni harmonijski red koji divergira (uočite $p = \frac{1}{3} < 1$).

3.) Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^6}$ je apsolutno konvergentan.

Naime, red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ apsolutnih vrijednosti njegovih članova je poopćeni harmonijski red koji konvergira ($p = 6 > 1$). Primijetimo da odatle slijedi i konvergencija reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^6}$.

Da rezimiramo, konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s članovima promjenjiva predznaka ponekad je moguće utvrditi promatranjem reda $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ apsolutnih vrijednosti njegovih članova. Budući da je $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ red s pozitivnim članovima, za ispitivanje njegove konvergencije možemo primijeniti neki od kriterija o konvergenciji redova s pozitivnim članovima. Ukoliko red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira, znamo da i naš red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Međutim, ako red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ne konvergira, ne možemo ništa zaključiti o konvergenciji zadanog reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Posebno, ako je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alternirajući red, tada za ispitivanje njegove konvergencije možemo koristiti Leibnizov kriterij, ili promatrati red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ apsolutnih vrijednosti njegovih članova.

Primjer 2.6.3. Ispitati konvergenciju sljedećih redova. Ako red konvergira, provjeriti je li ta konvergencija apsolutna ili uvjetna.

1.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{1+n^2}$

Rješenje.

Za ovaj alternirajući red smo u primjeru 2.5.2 (3) primjenom Leibnizovog kriterija pokazali da konvergira. Provjerimo sada je li ta konvergencija apsolutna ili uvjetna. U tu svrhu promatramo red

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$$

apsolutnih vrijednosti njegovih članova. Konvergenciju toga reda ispitat ćemo uspoređujući ga s harmonijskim redom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Kako je

$$|a_n| = \frac{1+n}{1+n^2} \geq \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

a harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergentan, to je prema teoremu o uspoređivanju redova i red $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ divergentan.

Prema tome, red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{1+n^2}$ je uvjetno konvergentan.

2.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$

Rješenje.

Ovdje se također radi o alternirajućem redu čiju smo konvergenciju utvrdili u primjeru 2.5.2 (4). Preostaje nam provjeriti je li ta konvergencija apsolutna ili uvjetna. Kao i u prethodnom primjeru, red

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$$

usporedit ćemo s harmonijskim redom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Uočimo

$$|a_n| = \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} > \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kako je red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergentan, to je prema teoremu o uspoređivanju redova i red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$ divergentan.

Zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$ uvjetno konvergira.

3.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3^n}$

Rješenje.

Konvergenciju ovog alternirajućeg reda ustanovili smo primjenom Leibnizovog kriterija u primjeru 2.5.2 (5). Sada ćemo pomoću D'Alembertovog kriterija ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}.$$

Računamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{n\cdot 3^{n+1}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}<1.$$

Zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ konvergira.

Prema tome, red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3^n}$ je apsolutno konvergentan.

4.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$

Rješenje.

U primjeru 2.5.2 (6) pokazali smo da zadani red konvergira. Provjerimo sada je li ta konvergencija apsolutna ili uvjetna. Red

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$$

usporedit ćemo s poopćenim harmonijskim redom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
Stavimo $b_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Računamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}}=1\neq 0.\end{aligned}$$

Kako je poopćeni harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ divergentan ($p=\frac{1}{2}<1$) to je, prema teoremu o uspoređivanju redova, red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ također divergentan.

Prema tome, red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ je uvjetno konvergentan.

5.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-3}$

Rješenje.

Konvergenciju danog reda provjerit ćemo ispitujući vrijedi li nužni uvjet konvergencije reda.

Stavimo $a_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{2n-3}$. Vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-3} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Stoga nije ispunjen nužni uvjet konvergencije reda. (Naime, iz $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ slijedilo bi $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ (vidi točku 1.4).)

Prema tome, red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-3}$ divergira.

6.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3n+2}{5n+1}\right)^n$

Rješenje.

Pomoću Cauchyjevog kriterija provjerit ćemo konvergira li zadani red apsolutno.
Stavimo $a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{3n+2}{5n+1}\right)^n$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{5n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{5n+1} = \frac{3}{5} < 1.$$

Dakle, red $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{5n+1}\right)^n$ konvergira.

Prema tome, red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3n+2}{5n+1}\right)^n$ je apsolutno konvergentan.

7.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^3}$

Rješenje.

Uočimo da se ovdje ne radi o redu s pozitivnim članovima. Stoga provjerimo konvergira li zadani red apsolutno.
Stavimo $a_n = \frac{\cos n}{n^3}$. Tada je

$$|a_n| = \left|\frac{\cos n}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ je konvergentan (to je poopćeni harmonijski red, gdje je $p = 3 > 1$). Prema teoremu o uspoređivanju redova zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergira.

Dakle, red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^3}$ je apsolutno konvergentan.

8.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(5n)}{2^n}$

Rješenje.

Budući da je zadani red s članovima promjenjiva predznaka, ispitat ćemo konvergira li red apsolutno.
Stavimo $a_n = \frac{\sin(5n)}{2^n}$. Vrijedi

$$|a_n| = \left|\frac{\sin(5n)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je konvergentan geometrijski red $(q = \frac{1}{2} < 1)$. Prema teoremu o uspoređivanju redova zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira.

Dakle, red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(5n)}{2^n}$ je apsolutno konvergentan.

3 Redovi funkcija

3.1 Pojam reda funkcija

Neka je (f_n) niz realnih funkcija definiranih na skupu $S \subseteq \mathbb{R}$.

Tada za svaki $x \in S$ imamo niz $(f_n(x))$ realnih brojeva, pa možemo promatrati red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ realnih brojeva.

Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in S,$$

(ili kraće $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$) zove se *funkcijski red* ili *red funkcija.*

Primjer 3.1.1. Neka je zadan niz realnih funkcija $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom

$$f_n(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ovim nizom definiran je funkcijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Za svaki (konkretni) $x \in \mathbb{R}$ dobijemo red realnih brojeva. Primjerice, za $x = -1$ imamo red

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.$$

Za taj red brojeva pokazali smo da divergira (vidi primjer 2.2.1 (2)).

Stavimo li $x = \frac{1}{2}$ dobit ćemo red brojeva

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

koji je geometrijski ($q = \frac{1}{2}$) i ima sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Primjer 3.1.2. Neka je zadan niz (f_n) realnih funkcija definiranih na intervalu $S = \langle 0, \infty\rangle$ formulom

$$f_n(x) = (\ln x)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ovim nizom definiran je funkcijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n, \quad x \in \langle 0, \infty\rangle.$$

Uzmemo li $x = 2$ dobit ćemo red brojeva

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(2) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln 2)^n$$

za koji se pokazuje da konvergira. Naime, ako opći član ovog reda označimo s $a_n = (\ln 2)^n$, tada D'Alembertov kriterij daje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(\ln 2)^n} = \ln 2 < 1.$$

Stavimo li npr. $x = e$ dobivamo red brojeva

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(e) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln e)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

koji divergira prema ∞.

Za dani funkcijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in S,$$

zanima nas za koje $x \in S$ pripadni red brojeva $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira.

Skup svih $x \in S$ za koje red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira zovemo *područjem konvergencije* funkcijskog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Označimo s $I \subseteq S$ područje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Tada je za svaki $x \in I$ dobro definirana suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Tu ćemo sumu, budući da ovisi o broju x, označiti s $f(x)$; dakle

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Time smo zapravo definirali funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Kažemo da je funkcija f na skupu I razvijena u funkcijski red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

3.2 Redovi potencija

Među najjednostavnije i najvažnije funkcijske redove ubrajamo *redove potencija*. To su redovi oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots, \quad x \in \mathbb{R},$$

gdje su $c, a_0, a_1, a_2, \ldots$ zadani realni brojevi.

Brojeve $a_0, a_1, a_2, \ldots$ zovemo *koeficijentima reda* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$.

Uočimo da je područje konvergencije reda potencija neprazan skup. Naime, za $x = c$ dobije se red čija je suma jednaka a_0.

Općenito se može pokazati da je područje konvergencije reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ili jednočlan skup $\{c\}$ ili interval u skupu $\mathbb{R}$. Ovaj rezultat je posljedica sljedećeg teorema.

Teorem 3.2.1 (Abelov teorem). *Ako red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ konvergira za neki broj $x_0 \neq c$, tada on konvergira apsolutno za svaku vrijednost x za koju je $|x-c| < |x_0 - c|$.*

Odavde će slijediti da je područje konvergencije reda potencija ili $\{c\}$, ili cijeli skup realnih brojeva (u tom slučaju red konvergira apsolutno na $\mathbb{R}$), ili pak postoji realni broj $r > 0$ tako da na intervalu $\langle c-r, c+r\rangle$ red potencija konvergira apsolutno, dok za svaki $x \in \langle -\infty, c-r\rangle \cup \langle c+r, \infty\rangle$ red divergira. U rubnim točkama intervala ($x = c-r$ i $x = c+r$) konvergenciju reda treba posebno ispitati.

Broj r zovemo *radijusom konvergencije* reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$. Ako je područje konvergencije reda jednočlan skup, tada kažemo da je radijus konvergencije nula, te pišemo $r = 0$. Ako je pak područje konvergencije reda cijeli skup $\mathbb{R}$, kažemo da je radijus konvergencije beskonačan i u tom slučaju pišemo $r = \infty$.

Primjer 3.2.2. Naći područje konvergencije sljedećih redova potencija.

1.) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

Rješenje.

Stavimo $f_n(x) = n!\, x^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pomoću D'Alembertovog kriterija ispitat ćemo za koje realne brojeve red $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira. Naime, $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ je red s pozitivnim članovima, pa za ispitivanje njegove konvergencije možemo koristiti D'Alembertov kriterij. U tu svrhu računamo

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |(n+1)x| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x|.$$

Vidimo da je ovaj limes jednak beskonačno za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, te da za $x = 0$ limes iznosi nula. Stoga ovaj red potencija konvergira samo za $x = 0$ i tada mu je suma jednaka jedinici.

2.) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Rješenje.

Stavimo $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!\, x^{n+1}}{(n+1)!\, x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Prema D'Alembertovom kriteriju zaključujemo da red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ apsolutno konvergira na skupu $\mathbb{R}$.

3.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

Rješenje.

Stavimo $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{x^n}{\sqrt{n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sqrt{n}\, x^{n+1}}{\sqrt{n+1}\, x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| \sqrt{\frac{n}{n+1}} = |x|.$$

Prema D'Alembertovom kriteriju i Abelovom teoremu zaključujemo da ovaj red apsolutno konvergira za $|x| < 1$ i divergira za $|x| > 1$. Preostaje nam ispitati konvergenciju reda u rubovima intervala, tj. u točkama -1 i 1.

Za $x = -1$ imamo $f_n(-1) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergira po Leibnizovom kriteriju.

Za $x = 1$ imamo $f_n(1) = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ je poopćeni harmonijski red koji divergira ($p = \frac{1}{2} < 1$).

Prema tome, područje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ je interval $[-1, 1\rangle$.

4.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x-1)^n$

Rješenje.

Stavimo $f_n(x) = \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x-1)^n\right|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2}|x-1| = \frac{2}{3}|x-1|.
\end{aligned}$$

Prema Cauchyjevom kriteriju i Abelovom teoremu zaključujemo da ovaj red apsolutno konvergira za $\frac{2}{3}|x-1| < 1$ i divergira za $\frac{2}{3}|x-1| > 1$. Kako je

$$\frac{2}{3}|x-1| < 1 \Leftrightarrow |x-1| < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle,$$

to red apsolutno konvergira za $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\rangle$ i divergira za $x \in \langle -\infty, -\frac{1}{2}\rangle \cup \langle \frac{5}{2}, \infty\rangle$. Ispitajmo konvergenciju u rubnim točkama $-\frac{1}{2}$ i $\frac{5}{2}$.

Za $x = -\frac{1}{2}$ imamo

$$f_n\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n \left(-\frac{1}{2}-1\right)^n = \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n \left(-\frac{3}{2}\right)^n = (-1)^n \left(\frac{6n-3}{6n+4}\right)^n.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|f_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right| &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{6n-3}{6n+4}\right)^n = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{6n-3}{6n+4} - 1\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-7}{6n+4}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-7}{6n+4}\right)^{(6n+4)\cdot\frac{1}{6} - \frac{2}{3}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-7}{6n+4}\right)^{(6n+4)}\right]^{\frac{1}{6}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-7}{6n+4}\right)^{-\frac{2}{3}} \\
&= (e^{-7})^{\frac{1}{6}} \cdot 1 = e^{-\frac{7}{6}} \neq 0.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi da red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{6n-3}{6n+4})^n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(-\frac{1}{2})$ divergira, jer nije ispunjen nužni uvjet konvergencije reda.

Za $x = \frac{5}{2}$ imamo

$$f_n\Big(\frac{5}{2}\Big) = \Big(\frac{2n-1}{3n+2}\Big)^n \Big(\frac{5}{2} - 1\Big)^n = \Big(\frac{2n-1}{3n+2}\Big)^n \Big(\frac{3}{2}\Big)^n = \Big(\frac{6n-3}{6n+4}\Big)^n.$$

Budući da je $f_n(\frac{5}{2}) = |f_n(-\frac{1}{2})|$, to je $\lim_{n\to\infty} f_n(\frac{5}{2}) = e^{-\frac{7}{6}} \neq 0$, pa red $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{6n-3}{6n+4})^n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\frac{5}{2})$ također divergira.

Prema tome, područje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n-1}{3n+2})^n(x-1)^n$ je interval $\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\rangle$.

5.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}$

Rješenje.

Stavimo $f_n(x) = \frac{3^n x^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n x^n}{n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}n^2x^{n+1}}{3^n(n+1)^2x^n}\right| \\ &= 3\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^2|x| = 3|x|.\end{aligned}$$

Prema D'Alembertovom kriteriju i Abelovom teoremu zaključujemo da ovaj red apsolutno konvergira za $3|x| < 1$, tj. za $x \in \langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\rangle$ i divergira za $3|x| > 1$, tj. za $x \in \langle -\infty, -\frac{1}{3}\rangle \cup \langle \frac{1}{3}, \infty\rangle$. Ispitajmo konvergenciju reda u rubnim točkama $-\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{3}$.

Za $x = -\frac{1}{3}$ imamo $f_n(-\frac{1}{3}) = \frac{3^n(-\frac{1}{3})^n}{n^2} = \frac{(-1)^n}{n^2}$. Red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergira prema Leibnizovom kriteriju.

Za $x = \frac{1}{3}$ imamo $f_n(\frac{1}{3}) = \frac{1}{n^2}$. Red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ je poopćeni harmonijski red koji konvergira ($p = 2 > 1$).

Dakle, područje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n^2}$ je interval $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

U prethodnoj smo točki vidjeli da funkcijski red na svom području konvergencije definira funkciju, čije se vrijednosti u točkama domene izračunavaju kao sume odgovarajućih redova brojeva. Prema tome, ako red potencija $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ konvergira na intervalu $I = \langle c-r, c+r\rangle$, tada je njime definirana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ takva da je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n.$$

Može se pokazati da ovako definirana funkcija f ima derivacije svakog reda na intervalu I. Derivacija f' dobije se deriviranjem "član po član" reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, tj.

$$f'(x) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n(x-c)^n\big)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}.$$

Sada se ponovnim deriviranjem "član po član" reda potencija dobije druga derivacija funkcije f, tj.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} \big(n a_n (x-c)^{n-1}\big)' \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-c)^{n-2}. \end{aligned}$$

Ponavljanjem ovog postupka mogli bismo izračunati derivaciju svakog reda funkcije f.

Nadalje, pokazuje se da za svaki par brojeva $a, b \in I$ vrijedi

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\Big)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x-c)^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x-c)^n dx, \end{aligned}$$

što nam govori da se red potencija može integrirati "član po član".

Važno je istaknuti da redovi potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (x-c)^{n+1}$$

koji se dobiju deriviranjem, odnosno integriranjem "član po član" reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ imaju isti radijus konvergencije kao i red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$.

Primjer 3.2.3. Dokazati da je $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ za svaki $x \in \langle -1, 1\rangle$.

Rješenje.

Promotrimo red potencija
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$
Za svaki $x \in \mathbb{R}$, red brojeva $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ je geometrijski, s količnikom $q = x$. Znamo da geometrijski red konvergira za $|q| = |x| < 1$ i ima sumu

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Dakle, na području konvergencije $I = \langle -1, 1 \rangle$ ovim je funkcijskim redom definirana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Kao što smo rekli, derivaciju tako dobivene funkcije f možemo računati deriviranjem "član po član" reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, tj.

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

S druge strane,
$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$
Prema tome,
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$
za sve $x \in I$, budući da red $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ i red $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ dobiven derivacijom njegovih članova imaju isti radijus konvergencije.

Primjer 3.2.4. Dokazati da je $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ za svaki $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Rješenje.

Red potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

je geometrijski red s količnikom $q = -x$. Taj red apsolutno konvergira za $|q| = |x| < 1$ i ima sumu

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

Sada se za proizvoljni $x \in \langle -1, 1\rangle$ integriranjem "član po član" ovog reda potencija dobije

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^n dt,$$

odakle je

$$\ln(1+t)\Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x,$$

odnosno

$$\ln(1+x) - \ln 1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Prema tome,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \quad x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Napomenimo da se može pokazati da za $x = 1$ ovaj red konvergira prema $\ln 2$, pa je stoga

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \quad x \in \langle -1, 1].$$

Primjer 3.2.5. Dokazati da je $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje.

U primjeru 3.2.2 (2) pokazali smo da red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$. Stoga je tim redom definirana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa svojstvom

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Deriviranjem "član po član" ovog reda potencija dobije se

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x) \end{aligned}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Poznato je da je jedina funkcija f sa svojstvom $f'(x) = f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ funkcija $f(x) = e^x$. Prema tome,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.3 Taylorovi redovi

Ako je $r > 0$ radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n,$$

tada na intervalu $I = \langle c - r, c + r \rangle$ taj red konvergira apsolutno. Također, njime je dobro definirana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ takva da je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \quad x \in I.$$

Funkcija f ima derivacije svakog reda na intervalu I.

Prvu derivaciju f' računamo deriviranjem "član po član" reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$; dakle

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}.$$

Ponovnim deriviranjem "član po član" reda potencija dobije se

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-c)^{n-2},$$

te zatim

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n(x-c)^{n-3}.$$

Općenito, za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)a_n(x-c)^{n-k}.$$

Uvrstimo li u ovu formulu $x = c$, red na desnoj strani formule imat će sve članove osim možda prvog jednake nuli. Dakle, dobit ćemo

$$f^{(k)}(c) = k(k-1)(k-2)\cdot \ldots \cdot (k-k+1)a_k(c-c)^0 = k!\, a_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Odavde je

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Kako je osim toga $f(c) = a_0$, to uz oznaku $f^{(0)}(c) := f(c)$ imamo

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Prema tome, koeficijente reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ izrazili smo pomoću derivacija funkcije f u točki c. Vrijedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad x \in I.$$

Red potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots$$

nazivamo *Taylorovim redom* funkcije f u točki c i taj red na intervalu I predstavlja funkciju f.

Kažemo da je funkcija f razvijena u Taylorov red u okolini točke c ili po potencijama od $x - c$.

Posebno, za $c = 0$ dobivamo red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

koji nazivamo *Maclaurinovim redom* funkcije f.

Razmotrimo sada problem na drugačiji način. Uzmimo da je zadana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ koja na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ima derivacije svakog reda. Neka je $c \in I$. Tada ima smisla promatrati Taylorov red funkcije f u točki c, tj. red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} (x-c) + \frac{f''(c)}{2!} (x-c)^2 + \dots .$$

Pokazuje se da ovako definiran red u okolini točke c ne mora konvergirati prema funkciji f. Štoviše, može se dogoditi da Taylorov red funkcije f divergira za svaku vrijednost $x \neq c$, odnosno da konvergira prema nekoj drugoj funkciji. Ilustrirajmo to sljedećim primjerom.

Primjer 3.3.1. Neka je zadana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & \text{ako je } |x| < 1; \\ 0, & \text{ako je } |x| \geq 1. \end{cases}$$

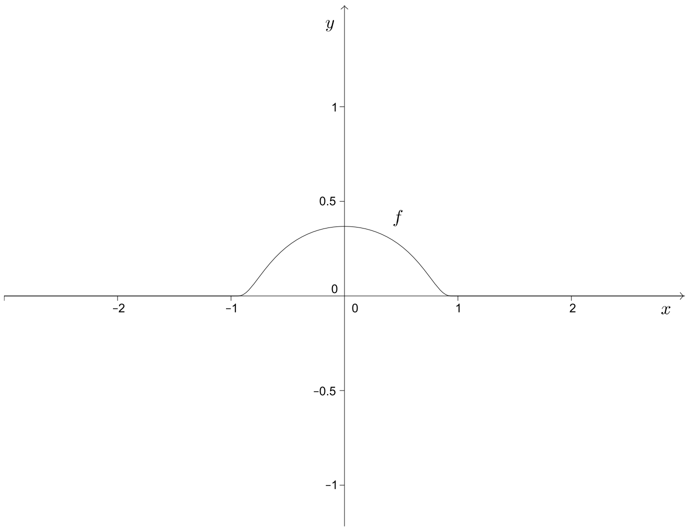
Može se pokazati da funkcija f ima derivacije svakog reda na skupu $\mathbb{R}$. Također, pokazuje se da derivacije funkcije f u točki 1 iznose nula. Dakle, vrijedi

$$f^{(n)}(1) = 0, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Stoga Taylorov red funkcije f u točki $c = 1$ glasi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = 0.$$

Prema tome, Taylorov red funkcije f u točki $c = 1$ konvergira na skupu $\mathbb{R}$, ali ne prema funkciji f, nego prema nul-funkciji.



Slika 1: Graf funkcije f iz primjera 3.3.1

Nameću nam se sljedeća pitanja. Ako funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ definirana na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ima na tom intervalu derivacije svakog reda, koje je područje konvergencije Taylorovog reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

funkcije f u točki $c \in I$, te konvergira li taj red na svom području konvergencije prema funkciji f?

Kako bismo odgovorili na postavljena pitanja, najprije uvedimo sljedeće pojmove.

Za funkciju f definiramo *n-ti Taylorov polinom* u točki c

$$T_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

i *n-ti ostatak* funkcije f u točki c

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad x \in I.$$

Da bi Taylorov red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ na nekom intervalu $D \subseteq I$ predstavljao funkciju f mora biti

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

za svaki $x \in D$. Ovaj uvjet moguće je zadovoljiti ako su na intervalu D derivacije svakog reda funkcije f omeđene istim brojem $M > 0$, kao što pokazuje sljedeći teorem.

Teorem 3.3.2. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija koja na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ima derivacije svakog reda, te neka je $c \in I$. Pretpostavimo da postoje brojevi $\delta > 0$ i $M > 0$ takvi da je*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M$$

za sve $x \in D = \langle c-\delta, c+\delta\rangle \cap I$ i za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

za svaki $x \in D$, pa Taylorov red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ funkcije f na intervalu D konvergira prema funkciji f.

Primjer 3.3.3. Dokazati da je $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje.

Funkcija $f(x) = \sin x$ ima derivacije svakog reda, a prve četiri redom iznose

$f'(x) = \cos x$,
$f''(x) = -\sin x$,
$f'''(x) = -\cos x$,
$f^{(4)}(x) = \sin x$,

pa je

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0.$$

Kako je $f^{(4)}(x) = f(x)$, slijedit će $f^{(5)}(x) = f'(x)$, $f^{(6)}(x) = f''(x)$, $f^{(7)}(x) = f'''(x)$, $f^{(8)}(x) = f(x)$, itd. Posebno, računanjem derivacija funkcije f u nuli dobiva se

$$\begin{aligned} f^{(2n)}(0) &= 0, \\ f^{(2n+1)}(0) &= (-1)^n, \end{aligned}$$

za sve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Maclaurinov red funkcije f glasi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Uočimo da se u redu pojavljuju samo potencije od x neparnog eksponenta.

Nađimo područje konvergencije ovog reda. Označimo

$$f_n(x) = \frac{f^n(0)}{n!}x^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Tada je

$$f_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad f_{2n+3}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}x^{2n+3}.$$

Budući da je

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{2n+3}(x)}{f_{2n+1}(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, to ovaj red po D'Alembertovom kriteriju apsolutno konvergira na cijelom skupu $\mathbb{R}$.

Provjerimo još konvergira li dobiveni red prema funkciji $f(x) = \sin x$. Za to je dovoljno ispitati omeđenost derivacija funkcije f. Uočimo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

odakle slijedi da dobiveni Maclaurinov red na skupu $\mathbb{R}$ zaista konvergira prema funkciji f. Prema tome,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primjer 3.3.4. Dokazati da je $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje.

U prethodnom smo primjeru pokazali da je

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Deriviranjem "član po član" ovog reda potencija dobije se

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

odnosno
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primjer 3.3.5. Razviti funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2}$ u Taylorov red po potencijama od $x+2$ i naći područje konvergencije dobivenog reda.

Rješenje.

Računamo derivacije funkcije f :

$f'(x) = -2x^{-3} = (-1)^1 \cdot 2! \cdot x^{-3}$,
$f''(x) = (-2)(-3)x^{-4} = (-1)^2 \cdot 3! \cdot x^{-4}$,
$f'''(x) = (-2)(-3)(-4)x^{-5} = (-1)^3 \cdot 4! \cdot x^{-5}$,

itd. općenito vrijedi
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (n+1)!\, x^{-(n+2)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uvrstimo li u gornju jednakost $x = -2$ dobit ćemo
$$\begin{aligned} f^{(n)}(-2) &= (-1)^n (n+1)!\, (-2)^{-(n+2)} \\ &= (-1)^n (n+1)!\, (-1)^{-(n+2)} \cdot 2^{-(n+2)} \\ &= (-1)^{-2} (n+1)! \cdot 2^{-(n+2)} = (n+1)! \cdot 2^{-(n+2)} \end{aligned}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako je osim toga $f^{(0)}(-2) = f(-2) = \frac{1}{4} = (0+1)! \cdot 2^{-(0+2)}$, to je
$$f^{(n)}(-2) = (n+1)! \cdot 2^{-(n+2)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Stoga Taylorov red funkcije f u točki $c = -2$ glasi
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-2)}{n!}(x+2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)! \cdot 2^{-(n+2)}}{n!}(x+2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}}(x+2)^n.$$

Nađimo područje konvergencije ovog reda. Označimo
$$f_n(x) = \frac{n+1}{2^{n+2}}(x+2)^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Tada je
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+2}{2^{n+3}}(x+2)^{n+1}}{\frac{n+1}{2^{n+2}}(x+2)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2(n+1)}|x+2| = \frac{|x+2|}{2}.$$

Prema D'Alembertovom kriteriju i Abelovom teoremu zaključujemo da ovaj red apsolutno konvergira za $\frac{|x+2|}{2} < 1$ i divergira za $\frac{|x+2|}{2} > 1$. Kako je

$$\frac{|x+2|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 2 \Leftrightarrow x \in \langle -4, 0\rangle,$$

to Taylorov red apsolutno konvergira za $x \in \langle -4, 0\rangle$ i divergira za $x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$. Ispitajmo konvergenciju reda u rubnim točkama -4 i 0.

Za $x = -4$ imamo

$$f_n(-4) = \frac{n+1}{2^{n+2}}(-4+2)^n = \frac{n+1}{2^{n+2}}(-2)^n = (-1)^n\,\frac{n+1}{4}.$$

Budući da je

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(-4)| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4} = \infty \neq 0,$$

to red $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n+1}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(-4)$ divergira jer nije ispunjen nužni uvjet konvergencije reda.

Za $x = 0$ imamo $f_n(0) = \frac{n+1}{4}$. Red $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(0)$ također divergira, jer nije ispunjen nužni uvjet konvergencije reda.

Dakle, područje konvergencije Taylorovog reda $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}(x+2)^n$ funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$ u točki $c = -2$ je interval $\langle -4, 0\rangle$.

Primjer 3.3.6. Naći prva tri, različita od nule, člana razvoja funkcije $f(x) = \dfrac{2x-5}{(x-2)^2}$ u Taylorov red u okolini točke $c = 3$.

Rješenje.

Označimo s $f_n(x) = \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, n-ti član razvoja funkcije f u Taylorov red u okolini točke $c = 3$.

Vrijedi $f_0(3) = f(3) = 1 \neq 0$.

Redom računamo derivacije funkcije f i njihovu vrijednost u točki $c = 3$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2(x-3)}{(x-2)^3}, & f'(3) &= 0;\\ f''(x) &= \frac{2(2x-7)}{(x-2)^4}, & f''(3) &= -2;\\ f'''(x) &= \frac{-12(x-4)}{(x-2)^5}, & f'''(3) &= 12. \end{aligned}$$

Time smo dobili još dva, različita od nule, člana Taylorovog reda. To su

$$f_2(3) = \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 = \frac{-2}{2}(x-3)^2 = -(x-3)^2,$$
$$f_3(3) = \frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3 = \frac{12}{6}(x-3)^3 = 2(x-3)^3.$$

Taylorov red funkcije f u točki $c = 3$ glasi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n = 1 - (x-3)^2 + 2(x-3)^3 - \dots.$$

3.4 Taylorova formula

Primijetimo da je za definiciju n-tog Taylorovog polinoma

$$T_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ u točki $c \in I$ dovoljno zahtijevati da funkcija f u točki c ima sve derivacije do uključivo n-tog reda. Lako se vidi da je tada

$$T_n(c) = f(c), \quad T_n'(c) = f'(c), \quad T_n''(c) = f''(c), \quad \dots, \quad T_n^{(n)}(c) = f^{(n)}(c).$$

Može se pokazati da među svim polinomima stupnja manjeg ili jednakog n, polinom T_n najbolje aproksimira funkciju f u neposrednoj okolini točke c. Na taj način možemo funkciju f u okolini točke c zamijeniti Taylorovim polinomom T_n, čineći time određenu pogrešku R_n. Stoga se izračunavanje funkcije svodi na izračunavanje polinoma, pri čemu se koristimo samo elementarnim operacijama.

Ako funkcija f na otvorenom intervalu I ima sve derivacije do uključivo reda $n+1$, onda se pogreška R_n može izraziti pomoću derivacije reda $n+1$ o čemu govori sljedeći rezultat.

Teorem 3.4.1 (Taylorov teorem). *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija koja na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ima sve derivacije do uključivo reda $n+1$, te neka je $c \in I$. Tada se n-ti ostatak funkcije f može prikazati u tzv. Lagrangeovom obliku*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \quad x \in I,$$

gdje je ξ_x neka točka koja se nalazi u intervalu $\langle c, x\rangle$, odnosno $\langle x, c\rangle$.

Ako funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ zadovoljava pretpostavke iz Taylorovog teorema, tada je

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad x \in I,$$

odnosno

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \;\; x \in I.$$

Ovaj prikaz nazivamo *Taylorovom formulom.*

Primjer 3.4.2. Naći približnu vrijednost od $\sin\frac{\pi}{12}$ pomoću Taylorovog polinoma T_3 i procijeniti pogrešku aproksimacije.

Rješenje.

Funkciju $f(x) = \sin x$ prikazat ćemo u obliku zbroja

$$f(x) = T_3(x) + R_3(x),$$

gdje je

$$T_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3,$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}x^4 = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24}x^4,$$

te ξ_x neka točka iz intervala $\langle 0, x\rangle$, odnosno $\langle x, 0\rangle$.

Prve četiri derivacije funkcije f su:

$f'(x) = \cos x,$
$f''(x) = -\sin x,$
$f'''(x) = -\cos x,$
$f^{(4)}(x) = \sin x.$

Stoga je $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, pa Taylorov polinom T_3 glasi

$$T_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3,$$

a ostatak R_3 je

$$R_3(x) = \frac{\sin\xi_x}{24}x^4, \quad \xi_x \in \langle 0, x\rangle, \text{ odnosno } \xi_x \in \langle x, 0\rangle.$$

Uvrstimo li $x = \frac{\pi}{12}$, tada je približna vrijednost od $\sin \frac{\pi}{12}$ jednaka

$$\sin \frac{\pi}{12} = f\Big(\frac{\pi}{12}\Big) \approx T_3\Big(\frac{\pi}{12}\Big) = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} \cdot \Big(\frac{\pi}{12}\Big)^3 \approx 0.258808813.$$

Procijenimo pogrešku aproksimacije

$$R_3\Big(\frac{\pi}{12}\Big) = \frac{\sin \xi_{\frac{\pi}{12}}}{24}\Big(\frac{\pi}{12}\Big)^4, \quad \xi_{\frac{\pi}{12}} \in \Big\langle 0, \frac{\pi}{12}\Big\rangle.$$

Za $\xi_{\frac{\pi}{12}} \in \langle 0, \frac{\pi}{12}\rangle$ vrijedi

$$|\sin \xi_{\frac{\pi}{12}}| < \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

pa je pogreška koju činimo

$$\Big|R_3\Big(\frac{\pi}{12}\Big)\Big| < \frac{\frac{1}{2}}{24}\Big(\frac{\pi}{12}\Big)^4 = \frac{1}{48 \cdot 12^4}\pi^4 \approx 9.7866 \cdot 10^{-5}.$$

4 Nelinearne jednadžbe i sustavi

4.1 Rješavanje nelinearnih jednadžbi

Nalaženje nultočaka nelinearnih funkcija je jedan od najčešćih zadataka primijenjene matematike. U većini se slučajeva ovaj problem ne može eksplicitno riješiti. Stoga se koriste razne numeričke metode kojima se nultočke funkcije približno određuju. Pritom pretpostavljamo da su nultočke funkcije izolirane, tj. da se oko svake nultočke može opisati interval koji ne sadrži niti jednu drugu nultočku dane funkcije.

Neka je zadana neprekidna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Postupak nalaženja nultočaka funkcije f, tj. točaka $c \in I$ takvih da je $f(c) = 0$, provodi se u dva koraka. Najprije je potrebno odrediti interval $[a, b] \subseteq I$ koji sadrži točno jednu nultočku c funkcije f. Do takvih se intervala dolazi analizom tijeka funkcije f. Zatim se nekim iterativnim postupkom nultočka c odredi do na traženu točnost. Unutar intervala $[a, b]$ odredi se početna aproksimacija x_0 nultočke c, te rekurzivnom formulom definira niz realnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ koji će, uz neke uvjete na danu funkciju f, konvergirati prema nultočki c. Broj x_n nazivamo n-tom aproksimacijom (iteracijom) nultočke c.

Postoji veliki broj metoda za približno određivanje nultočaka funkcije. Mi ćemo opisati dvije osnovne metode, a to su Newtonova metoda (metoda tangente) i metoda jednostavnih iteracija.

4.1.1 Newtonova metoda (metoda tangente)

Pretpostavimo da je zadana funkcija

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

koja u svim točkama intervala $[a, b]$ ima neprekidnu prvu derivaciju, te vrijedi $f'(x) \neq 0$ za svaki $x \in [a, b]$.

Uzmimo početnu aproksimaciju $x_0 \in [a, b]$ i u točki $T_0(x_0, f(x_0))$ postavimo tangentu na krivulju $y = f(x)$. Jednadžba tangente glasi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{3}$$

Neka ta tangente siječe os x u točki s apscisom x_1. (Uočimo da sjecište postoji budući da je $f'(x_0) \neq 0$.) Uvrštavanjem $x = x_1$ u jednadžbu (3) dobije se

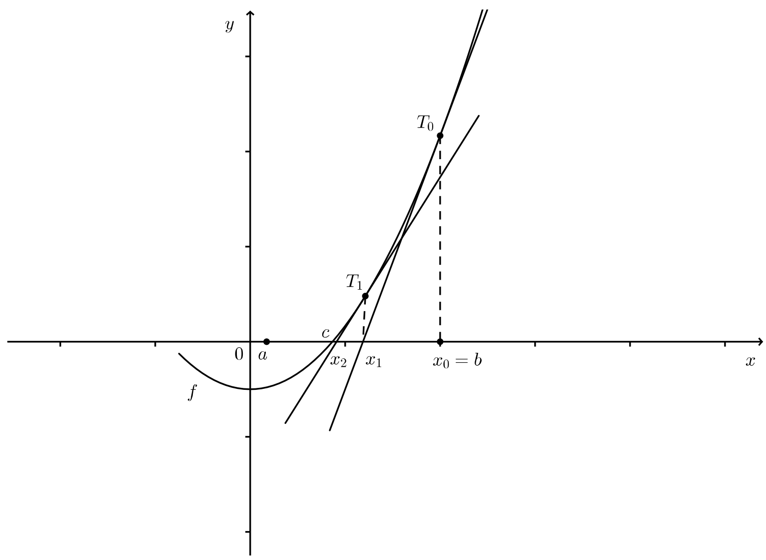
$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

odakle je

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{4}$$

Sada na krivulju $y = f(x)$ postavimo tangentu u točki $T_1(x_1, f(x_1))$. Ova tangenta siječe os x u točki s apscisom

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$



Slika 2: Newtonova metoda

Nastavljajući postupak analogno, dolazimo do niza

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Niz (x_n) definiran ovim iterativnim postupkom konvergirat će prema nultočki funkcije f, ako su zadovoljeni još neki dodatni uvjeti. O tome govori sljedeći rezultat.

Teorem 4.1.1. *Neka funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ima neprekidnu drugu derivaciju na intervalu $[a, b]$. Neka je $f(a)f(b) < 0$, te neka funkcije f' i f''imaju stalan predznak na $[a, b]$. Ako za početnu aproksimaciju $x_0 \in [a, b]$ vrijedi*

$$f(x_0)f''(x_0) > 0,$$

onda niz aproksimacija definiran s

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{5}$$

konvergira prema jedinstvenoj nultočki c funkcije f.

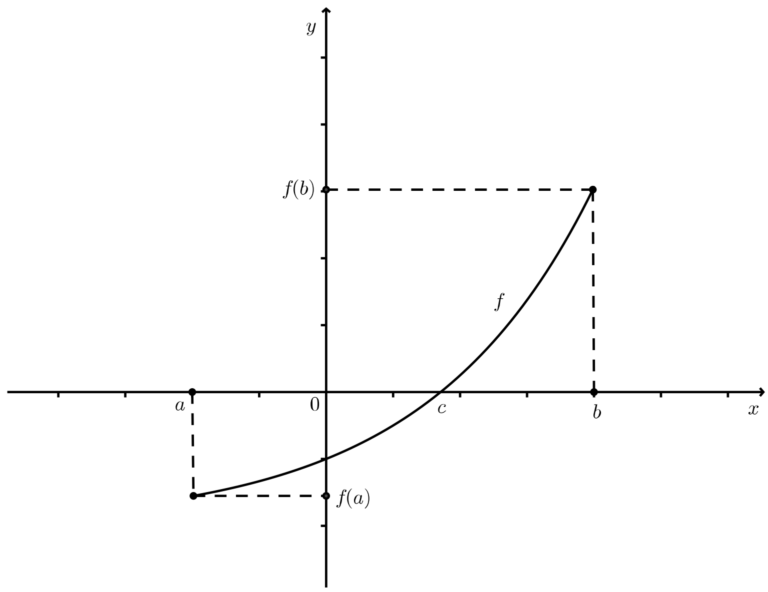
Za ocjenu pogreške aproksimacije vrijedi formula

$$|c - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2, \tag{6}$$

gdje je

$$m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Napomena 4.1.2. (a) Uočimo da je uvjetom $f(a)f(b) < 0$ osigurano postojanje nultočke $c \in [a, b]$ funkcije f. Naime, taj uvjet znači da funkcija f u točkama a i b prima vrijednosti suprotnog predznaka pa stoga, zbog neprekidnosti funkcije f, postoji barem jedna točka $c \in [a, b]$ za koju je $f(c) = 0$ (Slika 3).



Slika 3: Graf neprekidne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, gdje je $f(a)f(b) < 0$

Uvjet da funkcija f' ima stalan predznak na intervalu $[a, b]$, tj. da je f strogo monotona funkcija na tom intervalu, govori nam da je nultočka c jedinstvena.

(b) Uvjet $f(x_0)f''(x_0) > 0$ sigurno zadovoljava jedna od rubnih točaka a ili b. Naime, ako je f' pozitivna na $[a, b]$, onda je f strogo rastuća funkcija, pa zbog uvjeta $f(a)f(b) < 0$ vrijedi $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Pritom, ako je f'' također pozitivna na $[a, b]$, može se uzeti $x_0 := b$, a ako je f'' negativna na $[a, b]$ uzima se $x_0 := a$. Slično zaključujemo i u slučaju negativne funkcije f' na $[a, b]$. Tada je f strogo padajuća funkcija, pa zbog $f(a)f(b) < 0$ mora biti $f(a) > 0$ i $f(b) < 0$. Ako je f'' pozitivna na $[a, b]$, može se uzeti $x_0 := a$, a ako je f'' negativna na $[a, b]$ uzima se $x_0 := b$.

Pri aproksimiranju nultočke c funkcije f s n-tom aproksimacijom x_n dobivenom Newtonovom metodom činimo određenu grešku, za koju vrijedi ocjena (6). Označimo li s ε traženu točnost s kojom računamo nultočku c funkcije f, onda iterativni postupak zaustavljamo kada je ispunjen uvjet

$$\frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2 \leq \varepsilon,$$

odnosno

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} \tag{7}$$

i tada nultočku c aproksimiramo s n-tom aproksimacijom x_n.

Primjer 4.1.3. Newtonovom metodom riješiti jednadžbu $x^5 + x + 1 = 0$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.

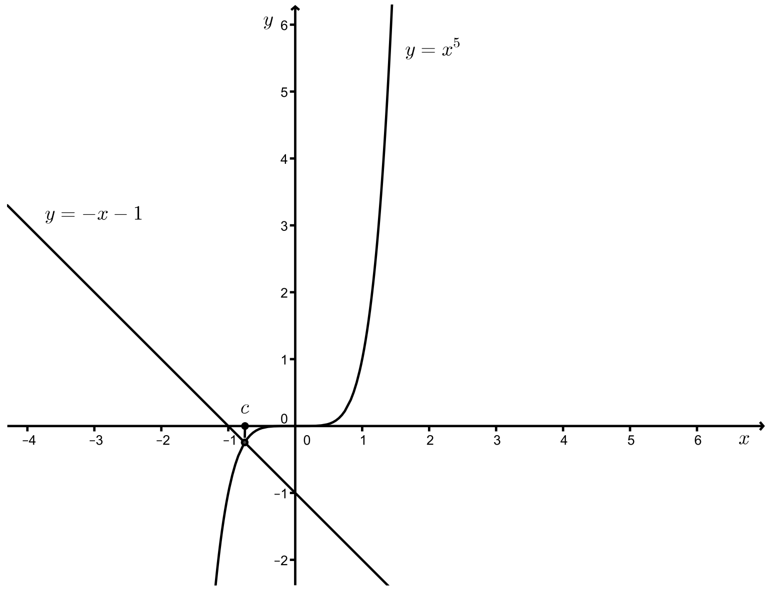
Rješenje.

Neka je $f(x) = x^5 + x + 1$. Kako je $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, zaključujemo da je funkcija f strogo rastuća na $\mathbb{R}$, pa stoga f na skupu $\mathbb{R}$ ima najviše jednu nultočku. Osim toga, kako je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ i f neprekidna, slijedi da f ima točno jednu realnu nultočku.

Nađimo odgovarajući interval $[a, b]$ koji sadrži nultočku funkcije f. Kako je $x^5 + x + 1 = 0$ ekvivalentno s $x^5 = -x - 1$, tražena nultočka c je apscisa točke u kojoj se sijeku grafovi funkcija $y = x^5$ i $y = -x - 1$. Prema Slici 4 naslućujemo da c pripada intervalu $[-1, -\frac{1}{2}]$. Zaista,

$$f(-1) = -1 < 0, \quad f\Big(-\frac{1}{2}\Big) \approx 0.46875 > 0,$$

pa stoga $c \in [-1, -\frac{1}{2}]$.



Slika 4: Presjek krivulja $y = x^5$ i $y = -x - 1$

Provjerimo jesu li na intervalu $[-1, -\frac{1}{2}]$ ispunjene pretpostavke teorema 4.1.1. Vrijedi

$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0, \quad x \in \big[-1, -\frac{1}{2}\big],$

$f''(x) = 20x^3 < 0, \quad\quad x \in \big[-1, -\frac{1}{2}\big].$

Početnu aproksimaciju x_0 biramo tako da je $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Kako je $f(-1)f''(-1) > 0$, uzet ćemo $x_0 = -1$.

Da bismo ocijenili pogrešku aproksimacije, odnosno odredili koliko aproksimacija moramo izračunati da bismo nultočku funkcije f odredili do na zadanu točnost, potrebno je izračunati

$$m_1 = \min_{x \in [-1, -\frac{1}{2}]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in [-1, -\frac{1}{2}]} |f''(x)|.$$

Stavimo

$$g(x) := |f'(x)| = 5x^4 + 1, \quad h(x) := |f''(x)| = -20x^3, \quad x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right].$$

Budući da je $g'(x) = 20x^3 < 0$ za $x \in [-1, -\frac{1}{2}]$, to je funkcija g strogo padajuća na intervalu $[-1, -\frac{1}{2}]$. Osim toga, g je pozitivna funkcija, pa stoga

g postiže minimum u desnom rubu, tj. za $x = -\frac{1}{2}$. Prema tome,

$$m_1 = \min_{x\in[-1,-\frac{1}{2}]} |f'(x)| = \min_{x\in[-1,-\frac{1}{2}]} g(x) = g\Big(-\frac{1}{2}\Big) = 1.3125.$$

Funkcija h je strogo padajuća i pozitivna na intervalu $[-1,-\frac{1}{2}]$, pa stoga h postiže maksimum u lijevom rubu, tj. za $x = -1$. Dakle,

$$M_2 = \max_{x\in[-1,-\frac{1}{2}]} |f''(x)| = \max_{x\in[-1,-\frac{1}{2}]} h(x) = h(-1) = 20.$$

Sada s (5) rekurzivno definiramo niz aproksimacija (x_n), te prema (7), nultočku c funkcije f aproksimiramo s n-tom aproksimacijom x_n za koju je

$$|x_n - x_{n-1}| \le \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1.3125\cdot 10^{-4}}{20}} \approx 0.003622.$$

Računanjem se dobije

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$f(x_n)$
0	-1		-1
1	-0.833333	0.166667	-0.235211
2	-0.764382	0.003622	-0.025329
3	-0.755025	0.009357	-0.000612
4	-0.754878	0.000147	-0.000001

Prema tome, tražena nultočka je $c \approx x_4 = -0.754878$.

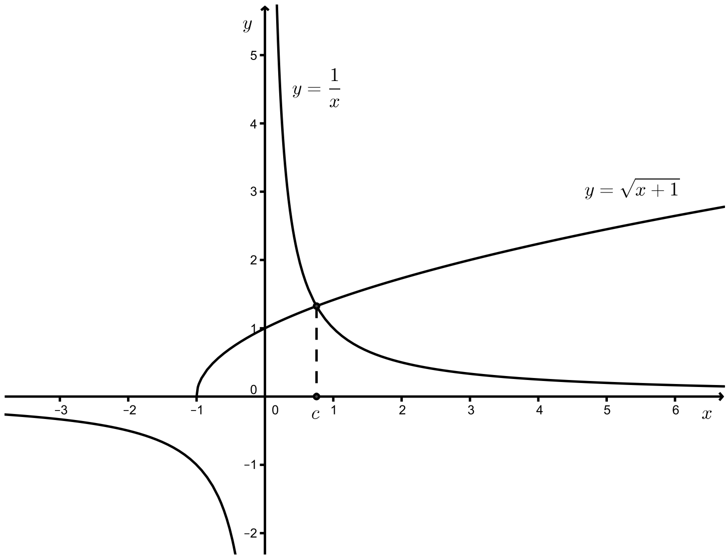
Primjer 4.1.4. Newtonovom metodom riješiti jednadžbu $\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.

Rješenje.

Grafovi funkcija $y = \sqrt{x+1}$ i $y = \frac{1}{x}$ sijeku se u jednoj točki (v. Sliku 5). To znači da dana jednadžba ima točno jedno rješenje, odnosno funkcija $f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{1}{x}$ ima točno jednu realnu nultočku za koju, prema Slici 5, naslućujemo da pripada intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$. Zaista, kako je $f(\frac{1}{2}) \approx -0.78 < 0$, $f(1) \approx 0.41 > 0$ i f neprekidna, to $c \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Provjerimo jesu li na intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$ ispunjene pretpostavke teorema 4.1.1. Vrijedi

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x^2} > 0, \quad x \in \big[\tfrac{1}{2}, 1\big],$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}} - \frac{2}{x^3} < 0, \quad x \in \big[\tfrac{1}{2}, 1\big].$$



Slika 5: Presjek krivulja $y = \frac{1}{x}$ i $y = \sqrt{x+1}$

Početnu aproksimaciju x_0 biramo tako da je $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Kako je $f(\frac{1}{2})f''(\frac{1}{2}) > 0$, uzet ćemo $x_0 = \frac{1}{2}$. Nađimo sada

$$m_1 = \min_{x \in [\frac{1}{2},1]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in [\frac{1}{2},1]} |f''(x)|.$$

Stavimo

$$g(x) := |f'(x)| = f'(x) = \tfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + \tfrac{1}{x^2}, \quad x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right];$$
$$h(x) := |f''(x)| = -f''(x) = \tfrac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}} + \tfrac{2}{x^3}, \quad x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right].$$

Tada je $g'(x) = f''(x) < 0$ za $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, pa je g strogo padajuća funkcija na tom intervalu. Osim toga, g je pozitivna funkcija, pa stoga g postiže minimum na desnom rubu intervala $[\frac{1}{2}, 1]$, tj.

$$m_1 = \min_{x \in [\frac{1}{2},1]} |f'(x)| = \min_{x \in [\frac{1}{2},1]} g(x) = g(1) = \frac{\sqrt{2}}{4} + 1.$$

Kako je $h'(x) = -f'''(x) = -\frac{3}{8\sqrt{(x+1)^5}} - \frac{6}{x^4} < 0$ za $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, to je h strogo padajuća funkcija na tom intervalu. Osim toga, h je pozitivna funkcija, pa stoga h postiže maksimum na lijevom rubu intervala $[\frac{1}{2}, 1]$, tj.

$$M_2 = \max_{x \in [\frac{1}{2},1]} |f''(x)| = \max_{x \in [\frac{1}{2},1]} h(x) = h\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{\sqrt{6}}{18} + 16.$$

Niz aproksimacija (x_n) definiramo koristeći formulu (5). Prema (7), nultočku c funkcije f aproksimiramo s n-tom aproksimacijom x_n za koju je

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+1\right)10^{-4}}{\frac{\sqrt{6}}{18}+16}} \approx 0.004096.$$

Računanjem se dobije

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$f(x_n)$
0	0.5		-0.7752551
1	0.675865	0.175865	-0.1850333
2	0.747711	0.071847	-0.0154049
3	0.754820	0.007109	-0.0001230
4	0.754878	0.000057	0.0000007

.

Prema tome, tražena nultočka je $c \approx x_4 = 0.754878$.

4.1.2 Metoda jednostavnih iteracija

Jednadžba $f(x) = 0$ može se zapisati u obliku $x = g(x)$, pri čemu izbor funkcije g nije jednoznačan. Primjerice, želimo li naći nultočku funkcije $f(x) = x^2 - 3$, tada je taj problem ekvivalentan nalaženju rješenja bilo koje od sljedećih jednadžbi:

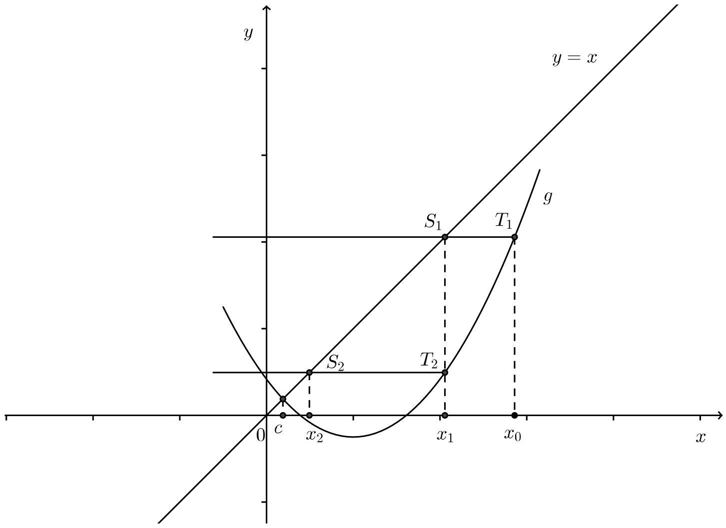
(a) $x = \dfrac{3}{x}$

(b) $x = x^2 + x - 3$

(c) $x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$.

Prema tome, neki od izbora za funkciju g su: $g(x) = \frac{3}{x}$ ili $g(x) = x^2 + x - 3$ ili $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$.

Svako rješenje jednadžbe $x = g(x)$ naziva se *čvrsta* (*fiksna*) točka funkcije g. Stoga se problem nalaženja nultočaka funkcije f može svesti na problem nalaženja fiksnih točaka funkcije g. Geometrijski gledano, svako rješenje jednadžbe $x = g(x)$ je apscisa točke presjeka grafa funkcije g i pravca $y = x$ (Slika 6).



Slika 6: Metoda jednostavnih iteracija

Te ćemo točke pokušati odrediti iterativnim postupkom

$$x_{n+1} := g(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

za neku početnu aproksimaciju x_0. Kako je $x_1 = g(x_0)$, to točka $T_1(x_0, x_1)$ leži na grafu funkcije g. Paralela s osi x kroz točku T_1 siječe pravac $y = x$ u točki $S_1(x_1, x_1)$. Prema tome, prva aproksimacija x_1 je apscisa točke S_1. Nakon toga kroz točku $T_2(x_1, x_2)$ koja leži na grafu funkcije g postavimo paralelu s osi x. Ta paralela siječe pravac $y = x$ u točki $S_2(x_2, x_2)$, pa je druga aproksimacija x_2 apscisa točke S_2. Postupak nastavljamo analogno. Ako tako definirani niz (x_n) konvergira prema točki c, onda je

$$c = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\lim_{n\to\infty} x_n) = g(c)$$

pod uvjetom da je funkcija g neprekidna. Dakle, u tom je slučaju c fiksna točka funkcije g. Međutim, općenito niz (x_n) ne mora konvergirati. Sljedeći teorem daje nam dovoljne uvjete uz koje će tako definiran niz aproksimacija konvergirati.

Teorem 4.1.5. *Neka funkcija $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ima neprekidnu prvu derivaciju na intervalu $[a, b]$. Pretpostavimo da*

(a) *$g(x) \in [a, b]$ za svaki $x \in [a, b]$;*

(b) *postoji* $q \in \langle 0, 1\rangle$ *tako da je* $|g'(x)| \leq q$ *za svaki* $x \in [a, b]$.

Tada postoji jedinstven $c \in [a, b]$ *tako da je* $g(c) = c$. *Također, za proizvoljni* $x_0 \in [a, b]$, *niz* (x_n) *definiran rekurzivno s*

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{8}$$

konvergira prema točki c.

Za ocjenu pogreške aproksimacije vrijede sljedeće formule:

$$|c - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|, \tag{9}$$

$$|c - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|, \tag{10}$$

gdje je $q = \max_{x \in [a,b]} |g'(x)|$.

Želimo li fiksnu točku c funkcije g izračunati s točnošću ε onda, prema formuli (9), iterativni postupak (8) zaustavljamo kada je

$$\frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leq \varepsilon,$$

odnosno

$$n \geq \frac{\log(\varepsilon(1-q)) - \log|x_1 - x_0|}{\log q} \tag{11}$$

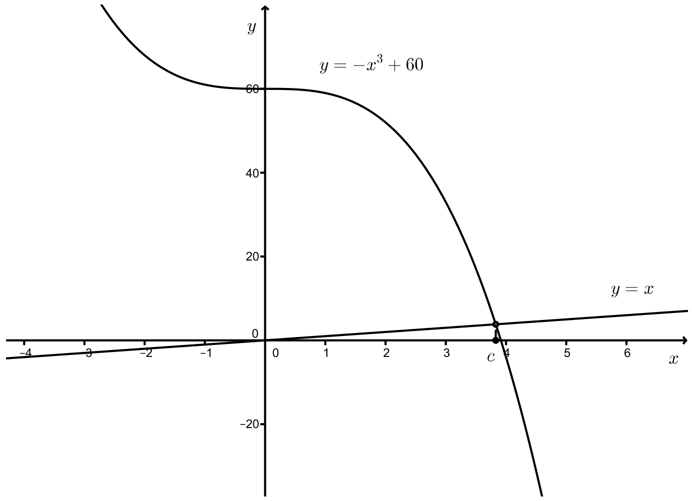
i tada fiksnu točku c aproksimiramo s n-tom aproksimacijom x_n.

Primjer 4.1.6. Metodom jednostavnih iteracija riješiti jednadžbu $x^3 + x - 60 = 0$ s točnošću $\varepsilon = 0.005$.

Rješenje.

Stavimo $f(x) = x^3 + x - 60$. Kako je $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ na $\mathbb{R}$, to je f strogo rastuća funkcija na $\mathbb{R}$ pa može imati najviše jednu realnu nultočku. Osim toga je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ i f neprekidna, pa zaključujemo da f ima točno jednu realnu nultočku koju označimo s c.

Do ovog smo zaključka mogli doći i na sljedeći način. Danu jednadžbu možemo zapisati u obliku $x = -x^3 + 60$. Rješenje ove jednadžbe je apscisa točke presjeka grafa funkcije $y = -x^3 + 60$ i pravca $y = x$ (Slika 7). Vidimo da je rješenje jedinstveno, te naslućujemo da pripada intervalu $[3, 4]$. Zaista, kako je $f(4) = 8 > 0$ i $f(3) = -30 < 0$, to zbog neprekidnosti funkcije f nultočka c pripada intervalu $[3, 4]$.



Slika 7: Presjek krivulja $y = -x^3 + 60$ i $y = x$

Da bismo nultočku c odredili metodom jednostavnih iteracija, potrebno je jednadžbu $f(x) = 0$ zapisati u obliku $x = g(x)$, za neku funkciju g koja zadovoljava uvjete teorema 4.1.5. Kako je $x = -x^3+60$, to bi jedan od izbora za funkciju g mogla biti funkcija $g(x) = -x^3 + 60$. Tada je $g'(x) = -3x^2$, pa je $|g'(x)| = 3x^2$. Budući da je funkcija $x \mapsto |g'(x)|$ strogo rastuća i pozitivna na intervalu $[3, 4]$, to ona na tom intervalu minimalnu vrijednost poprima za $x = 3$, a maksimalnu za $x = 4$, tj.

$$27 = |g'(3)| \leq |g'(x)| \leq |g'(4)| = 48, \quad x \in [3, 4].$$

Vidimo da nije ispunjen uvjet (b) teorema 4.1.5, budući da bi trebalo vrijediti $|g'(x)| < 1$ za svaki $x \in [3, 4]$. Uočimo da čak i kada bismo suzili interval $[3, 4]$, tako da i dalje sadrži c, ne bismo mogli postići da je $|g'(x)| < 1$. Stoga ovakav izbor za funkciju g nije dobar.

Zapišimo sada danu jednadžbu u obliku $x^3 = 60-x$, odakle se dijeljenjem obiju strana ove jednadžbe s x^2 dobije $x = \frac{60}{x^2} - \frac{1}{x}$. Stoga je jedna mogućnost za odabir funkcije g funkcija $g(x) = \frac{60}{x^2} - \frac{1}{x}$. Tada je $g'(x) = \frac{x-120}{x^3} < 0$ za $x \in [3, 4]$. Stoga je $|g'(x)| = \frac{120-x}{x^3}$ i lako se pokaže da je i tada $|g'(x)| > 1$ za svaki $x \in [3, 4]$. Prema tome, niti ovaj izbor nije dobar.

Zapišimo danu jednadžbu u obliku $x^3 = -x+60$, odnosno $x = \sqrt[3]{-x + 60}$, te pokušajmo s izborom $g(x) = \sqrt[3]{-x + 60}$. Tada je

$$g'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(-x + 60)^2}} < 0, \quad x \in [3, 4],$$

pa je g strogo padajuća funkcija na segmentu $[3,4]$. Prema tome,

$$x \in [3,4] \Rightarrow g(x) \in [g(4), g(3)] = [\sqrt[3]{56}, \sqrt[3]{57}] \subset [3,4],$$

čime je zadovoljen uvjet (a) teorema 4.1.5.

Definiramo funkciju $h(x) = |g'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-x+60)^2}}$, $x \in [3,4]$. Tada je

$$h'(x) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(-x+60)^5}} > 0, \quad x \in [3,4],$$

pa je funkcija h rastuća na $[3,4]$. Osim toga, h je pozitivna funkcija, pa stoga h na segmentu $[3,4]$ poprima maksimalnu vrijednost za $x = 4$. Prema tome,

$$q = \max_{x\in[3,4]} |g'(x)| = \max_{x\in[3,4]} h(x) = h(4) = \frac{1}{3\sqrt[3]{56^2}} < 1,$$

pa je ispunjen uvjet (b) teorema 4.1.5. Zaključujemo da funkcija g ima fiksnu točku c na segmentu $[3,4]$. Uzmemo $x_0 := 4$, te niz (x_n) definiramo rekurzivno pomoću formule (8). Tada je $x_1 = g(x_0) = g(4) = \sqrt[3]{56}$, a fiksnu točku c aproksimiramo s n-tom aproksimacijom x_n, gdje je prema (11)

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{\log(\varepsilon(1-q)) - \log|x_1 - x_0|}{\log q} \\ &= \frac{\log\left(0.005\left(1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{56^2}}\right)\right) - \log|\sqrt[3]{56} - 4|}{\log \frac{1}{3\sqrt[3]{56^2}}} \approx 0.95, \end{aligned}$$

pa je stoga $n = 1$. Dobije se

n	x_n	$f(x_n)$
0	4	8
1	3.825862	-0.174138

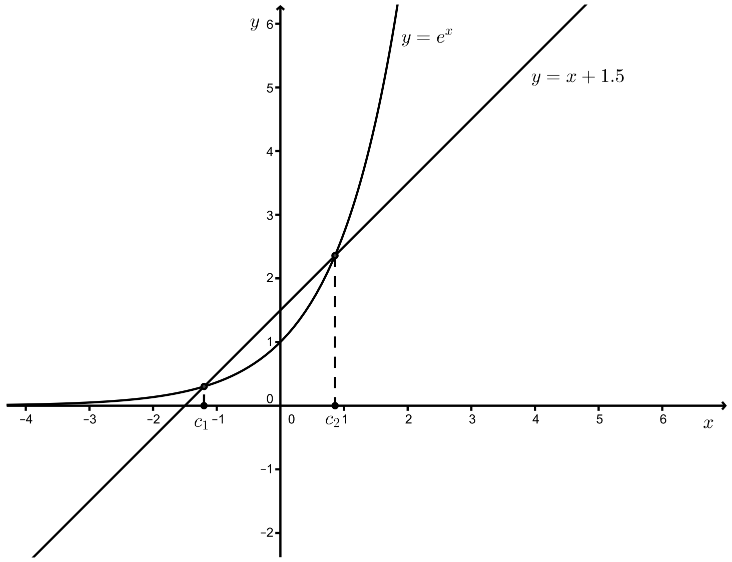
.

Dakle, $c \approx x_1 = \sqrt[3]{56} = 3.825862$.

Primjer 4.1.7. Metodom jednostavnih iteracija riješiti jednadžbu $e^x = x + 1.5$ s točnošću $\varepsilon = 0.005$.

Rješenje.

Potrebno je odrediti nultočke funkcije $f(x) = e^x - x - 1.5$. Nultočke ove funkcije nalaze se na presjeku krivulje $y = e^x$ i pravca $y = x + 1.5$. Prema Slici 8 vidimo da funkcija f ima dvije nultočke.



Slika 8: Presjek krivulja $y = e^x$ i $y = x + 1.5$

Do istog bismo zaključka došli ispitivanjem tijeka funkcije f. Naime, $f'(x) = e^x - 1$ pa je $x = 0$ stacionarna točka funkcije f. Kako je f' negativna na $\langle -\infty, 0\rangle$, a pozitivna na $\langle 0, \infty\rangle$, zaključujemo da f strogo pada na $\langle -\infty, 0\rangle$ i strogo raste na $\langle 0, \infty\rangle$ pa je $x = 0$ točka minimuma funkcije f i $f(0) = -0.5 < 0$. Osim toga je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ i f neprekidna, pa stoga f ima dvije nultočke.

Prema Slici 8 naslućujemo da nultočke od f pripadaju intervalima $[-2, -1]$ i $[0, 1]$. Zaista, $f(-2) \approx 0.63 > 0$ i $f(-1) \approx -0.13 < 0$ pa zbog neprekidnosti funkcije f postoji nultočka $c_1 \in [-2, -1]$. Također, $f(0) = -0.5 < 0$ i $f(1) \approx 0.22 > 0$ pa druga nultočka c_2 pripada intervalu $[0, 1]$.

Pronađimo najprije negativnu nultočku $c_1 \in [-2, -1]$. Uočimo da jednadžbu $e^x = x + 1.5$ možemo zapisati kao $x = g(x)$, gdje je $g(x) = e^x - 1.5$. Provjerimo ispunjava li funkcija g pretpostavke teorema 4.1.5. Kako je g rastuća funkcija, vrijedi

$$x \in [-2, -1] \Rightarrow g(x) \in [g(-2), g(-1)] = [e^{-2} - 1.5, e^{-1} - 1.5] \subset [-2, -1],$$

čime je ispunjen uvjet (a) teorema 4.1.5.

Nadalje,

$$q = \max_{x\in[-2,-1]} |g'(x)| = \max_{x\in[-2,-1]} |e^x| = \max_{x\in[-2,-1]} e^x = e^{-1} < 1,$$

pa je time ispunjen i uvjet (b) teorema 4.1.5. Stoga postoji jedinstvena fiksna točka $c_1 \in [-2, -1]$ funkcije g. Uzmemo $x_0 := -1.5$ i definiramo rekurzivno niz (x_n) pomoću formule (8). Tada je $x_1 = g(x_0) = e^{-1.5} - 1.5$, a c_1 aproksimiramo n-tom iteracijom x_n, gdje je prema (11)

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{\log(\varepsilon(1-q)) - \log|x_1 - x_0|}{\log q} \\ &= \frac{\log(0.005(1-e^{-1})) - \log e^{-1.5}}{\log e^{-1}} \approx 4.26, \end{aligned}$$

pa je stoga $n = 5$. Računanjem se dobije

n	x_n	$f(x_n)$
0	-1.5	0.223130
1	-1.276870	0.055779
2	-1.221091	0.015999
3	-1.205092	0.004756
4	-1.200336	0.001429
5	-1.198907	0.000431

.

Dakle, $c_1 \approx x_5 = -1.198907$.

Pronađimo sada pozitivnu nultočku $c_2 \in [0, 1]$. U tu svrhu potrebno je odrediti funkciju g koja ispunjava uvjete teorema 4.1.5. U ovom slučaju izbor funkcije $g(x) = e^x - 1.5$ nije dobar, budući da je

$$\max_{x\in[0,1]} |g'(x)| = \max_{x\in[0,1]} e^x = e > 1.$$

Logaritmiranjem zadane jednadžbe $e^x = x + 1.5$ dobije se $x = \ln(x + 1.5)$. Provjerimo ispunjava li funkcija $g(x) = \ln(x + 1.5)$ pretpostavke teorema 4.1.5. Kako je funkcija g rastuća, imamo

$$x \in [0, 1] \Rightarrow g(x) \in [g(0), g(1)] = [\ln 1.5, \ln 2.5] \subset [0, 1],$$

čime je zadovoljen uvjet (a) teorema 4.1.5. Nadalje, $g'(x) = \frac{1}{x+1.5}$ pa je $|g'(x)| = \frac{1}{x+1.5}$ za svaki $x \in [0, 1]$. Budući da je funkcija $x \mapsto |g'(x)|$ pozitivna i strogo padajuća na $[0, 1]$, to se njezin maksimum postiže za $x = 0$, odakle slijedi

$$q = \max_{x\in[0,1]} |g'(x)| = |g'(0)| = \frac{2}{3} < 1.$$

Prema tome, zadovoljen je i uvjet (b) teorema 4.1.5. Stoga funkcija g ima jedinstvenu fiksnu točku $c_2 \in [0,1]$. Uzmemo $x_0 := 1$, te niz (x_n) definiramo rekurzivno pomoću formule (8). Tada je $x_1 = g(x_0) = g(1) = \ln 2.5$, a fiksnu točku c_2 aproksimiramo s n-tom aproksimacijom x_n, gdje je prema (11)

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{\log(\varepsilon(1-q)) - \log|x_1 - x_0|}{\log q} \\ &= \frac{\log\Big(0.005\Big(1-\frac{2}{3}\Big)\Big) - \log|\ln 2.5 - 1|}{\log\frac{2}{3}} \approx 9.66, \end{aligned}$$

pa je stoga $n = 10$. Računanjem se dobije

n	x_n	$f(x_n)$
0	1	0.218282
1	0.916291	0.083710
2	0.882234	0.034058
3	0.868039	0.014196
4	0.862062	0.005977
5	0.859535	0.002527
6	0.858465	0.001071
7	0.858012	0.000455
8	0.857818	0.000192
9	0.857737	0.000082
10	0.857702	0.000034

Dakle, $c_2 \approx x_{10} = 0.857702$.

4.2 Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi

Problem rješavanja sustava nelinearnih jednadžbi često se javlja u primjenama. Postoje razne metode za rješavanje takvih sustava. Mi ćemo opisati dvije osnovne metode, a to su Newtonova metoda i metoda iteracije.

4.2.1 Newtonova metoda

Neka je dan sustav n nelinearnih jednadžbi s n nepoznanica

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

gdje su $f_1, f_2, \ldots, f_n$ realne funkcije n varijabli koje imaju neprekidne parcijalne derivacije prvog reda. Ovaj se sustav zapisuje matrično u obliku

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

gdje je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Želimo naći (izolirano) rješenje $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ našeg sustava, tj. točku

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

za koju je $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$. U tu svrhu izaberemo početnu aproksimaciju

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

i zatim konstruiramo niz aproksimacija

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

koji će uz određene uvjete konvergirati prema $\mathbf{c}$, u smislu

$$\lim_{k \to \infty} x_i^{(k)} = c_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Postupak provodimo rekurzivno na sljedeći način. Krenemo od aproksimacije $\mathbf{x}^{(k)}$ i zatim formiramo *Jacobijevu matricu* (odnosno *Jacobijan sustava*)

$$\mathbf{J}^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^{(k)}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^{(k)}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}^{(k)}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}^{(k)}) \end{bmatrix}.$$

Ako je $\mathbf{J}^{(k)}$ regularna matrica, tada se aproksimacija $\mathbf{x}^{(k+1)}$ računa po formuli

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left(\mathbf{J}^{(k)}\right)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{12}$$

Ako je tako konstruirani niz aproksimacija $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \dots$ konvergentan, tada će taj niz konvergirati prema rješenju $\mathbf{c}$ našeg sustava. Uvjete pod kojima ovaj niz konvergira nećemo razmatrati u okviru ovog kolegija. Međutim, primjeri na kojima ćemo ilustrirati primjenu ove metode biti će takvi da zadovoljavaju te uvjete.

Primjer 4.2.1. Newtonovom metodom riješiti sustav nelinearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1x_2 - x_2 - 1 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

uzevši za početnu aproksimaciju $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 1)$. Postupak prekinuti nakon treće iteracije.

Rješenje.

Stavimo

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1x_2 - x_2 - 1, \\ f_2(x_1, x_2) &= x_1^2 - x_2^2 - 1. \end{aligned}$$

Tada je za $k = 0, 1, 2, \dots,$

$$\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) = \begin{bmatrix} f_1\big(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\big) \\ f_2\big(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\big) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)}x_2^{(k)} - x_2^{(k)} - 1 \\ \big(x_1^{(k)}\big)^2 - \big(x_2^{(k)}\big)^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Kako je

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 - 1, \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2, \end{aligned}$$

to je za $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\mathbf{J}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_2^{(k)} & x_1^{(k)} - 1 \\ 2x_1^{(k)} & -2x_2^{(k)} \end{bmatrix},$$

te

$$\left(\mathbf{J}^{(k)}\right)^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}^{(k)}} \begin{bmatrix} -2x_2^{(k)} & 1 - x_1^{(k)} \\ -2x_1^{(k)} & x_2^{(k)} \end{bmatrix},$$

gdje je

$$\det \mathbf{J}^{(k)} = -2\left(x_1^{(k)}\right)^2 + 2x_1^{(k)} - 2\left(x_2^{(k)}\right)^2.$$

Prema (12), za $k = 0, 1, 2, \ldots$ imamo

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} - \frac{1}{\det \mathbf{J}^{(k)}} \begin{bmatrix} -2x_2^{(k)} & 1 - x_1^{(k)} \\ -2x_1^{(k)} & x_2^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) \\ f_2\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \frac{1}{\det \mathbf{J}^{(k)}}\Big(-2x_2^{(k)} f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) + \left(1 - x_1^{(k)}\right) f_2\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)\Big), \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} - \frac{1}{\det \mathbf{J}^{(k)}}\Big(-2x_1^{(k)} f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) + x_2^{(k)} f_2\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)\Big). \end{aligned}$$

Računanjem se dobije

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)$	$f_2\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)$
0	2	1	0	2
1	1.666667	1.333333	-0.111111	0
2	1.717949	1.397436	0.003287	-0.001479
3	1.716674	1.395339	0.000003	-0.000001

Dakle, treća iteracija iznosi $\mathbf{x}^{(3)} = (1.716674, 1.395339)$.

Primjer 4.2.2. Newtonovom metodom riješiti sustav nelinearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 4x_1^2 + x_2^2 - 4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - \sin(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

uzevši za početnu aproksimaciju $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0)$. Postupak prekinuti nakon treće iteracije.

Rješenje.

Stavimo

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &= 4x_1^2+x_2^2-4,\\ f_2(x_1,x_2) &= x_1+x_2-\sin(x_1-x_2). \end{aligned}$$

Tada je za $k=0,1,2,\ldots,$

$$\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(k)}\big)=\begin{bmatrix} f_1\big(x_1^{(k)},x_2^{(k)}\big)\\ f_2\big(x_1^{(k)},x_2^{(k)}\big)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\big(x_1^{(k)}\big)^2+\big(x_2^{(k)}\big)^2-4\\ x_1^{(k)}+x_2^{(k)}-\sin(x_1^{(k)}-x_2^{(k)})\end{bmatrix}.$$

Kako je

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2)=8x_1, && \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)=2x_2,\\ &\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2)=1-\cos(x_1-x_2), && \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)=1+\cos(x_1-x_2), \end{aligned}$$

to je za $k=0,1,2,\ldots,$

$$\mathbf{J}^{(k)}=\begin{bmatrix} 8x_1^{(k)} & 2x_2^{(k)}\\ 1-\cos\big(x_1^{(k)}-x_2^{(k)}\big) & 1+\cos\big(x_1^{(k)}-x_2^{(k)}\big)\end{bmatrix},$$

te

$$\big(\mathbf{J}^{(k)}\big)^{-1}=\frac{1}{\det\,\mathbf{J}^{(k)}}\begin{bmatrix} 1+\cos\big(x_1^{(k)}-x_2^{(k)}\big) & -2x_2^{(k)}\\ -1+\cos\big(x_1^{(k)}-x_2^{(k)}\big) & 8x_1^{(k)}\end{bmatrix},$$

gdje je

$$\begin{aligned} \det\,\mathbf{J}^{(k)} &= 8x_1^{(k)}\big(1+\cos\big(x_1^{(k)}-x_2^{(k)}\big)\big)-2x_2^{(k)}\big(1+\cos\big(x_1^{(k)}-x_2^{(k)}\big)\big)\\ &= \big(8x_1^{(k)}-2x_2^{(k)}\big)\big(1+\cos\big(x_1^{(k)}-x_2^{(k)}\big). \end{aligned}$$

Prema (12), za $k=0,1,2,\ldots$ imamo

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)}\\ x_2^{(k+1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1^{(k)}\\ x_2^{(k)}\end{bmatrix}-\frac{1}{\det\,\mathbf{J}^{(k)}}\begin{bmatrix} 1+\cos\big(x_1^{(k)}-x_2^{(k)}\big) & -2x_2^{(k)}\\ -1+\cos\big(x_1^{(k)}-x_2^{(k)}\big) & 8x_1^{(k)}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} f_1\big(x_1^{(k)},x_2^{(k)}\big)\\ f_2\big(x_1^{(k)},x_2^{(k)}\big)\end{bmatrix},$$

odnosno

$$x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}-\frac{1}{\det\,\mathbf{J}^{(k)}}\Big(\big(1+\cos\big(x_1^{(k)}-x_2^{(k)}\big)\big)f_1\big(x_1^{(k)},x_2^{(k)}\big)-2x_2^{(k)}f_2\big(x_1^{(k)},x_2^{(k)}\big)\Big),$$

$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{1}{\det \mathbf{J}^{(k)}}\Big(\big(-1+\cos\big(x_1^{(k)}-x_2^{(k)}\big)\big)f_1\big(x_1^{(k)},x_2^{(k)}\big)+8x_1^{(k)}f_2\big(x_1^{(k)},x_2^{(k)}\big)\Big).$$

Računanjem se dobije

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f_1\big(x_1^{(k)},x_2^{(k)}\big)$	$f_2\big(x_1^{(k)},x_2^{(k)}\big)$
0	1	0	0	0.158529
1	1	-0.102921	0.010593	0.004550
2	0.998883	-0.105017	0.002098	0.000896
3	0.998611	-0.105522	0.000030	0.000016

.

Dakle, treća iteracija iznosi $\mathbf{x}^{(3)} = (0.998611, -0.105522)$.

4.2.2 Metoda iteracije

Neka je dan sustav n nelinearnih jednadžbi s n nepoznanica

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= 0 \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= 0 \end{aligned}$$

gdje su $f_1, f_2, \ldots, f_n$ realne funkcije n varijabli. Ovaj se sustav prevodi u ekvivalentni oblik

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ x_2 &= g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(x_1,x_2,\ldots,x_n), \end{aligned}$$

koji se matrično zapisuje kao

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

gdje je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Neka je

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

početna aproksimacija, koju smo našli nekom grubom ocjenom. Zatim formiramo niz aproksimacija

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

pomoću formule

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{13}$$

Ovaj će niz aproksimacija, uz određene uvjete koje ne razmatramo u okviru ovog kolegija, konvergirati prema izoliranoj točki

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

u smislu

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = c_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ako su funkcije g_i neprekidne, onda je za $i = 1, \ldots, n$,

$$c_i = \lim_{k\to\infty} x_i^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} g_i(\mathbf{x}^{(k)}) = g_i(\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)}) = g_i(\mathbf{c}),$$

odnosno $\mathbf{c} = \mathbf{g}(\mathbf{c})$. Prema tome, $\mathbf{c}$ je rješenje polaznog sustava.

Primjer 4.2.3. Metodom iteracije riješiti sustav nelinearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 + 3 &= 0 \\ x_1^3 - x_2^3 - 6x_2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

uzevši za početnu aproksimaciju $\mathbf{x}^{(0)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$. Postupak prekinuti nakon pete iteracije.

Rješenje.

Zapišimo sustav u obliku

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{6}(x_1^3 + x_2^3 + 3) \\ x_2 &= \frac{1}{6}(x_1^3 - x_2^3 + 2). \end{aligned}$$

Uvodimo funkcije $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ formulom

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{6}(x_1^3 + x_2^3 + 3), \\ g_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{6}(x_1^3 - x_2^3 + 2). \end{aligned}$$

Tada je, prema (13), za $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ g_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\big(\big(x_1^{(k)}\big)^3 + \big(x_2^{(k)}\big)^3 + 3\big) \\ \frac{1}{6}\big(\big(x_1^{(k)}\big)^3 - \big(x_2^{(k)}\big)^3 + 2\big) \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{6}\big(\big(x_1^{(k)}\big)^3 + \big(x_2^{(k)}\big)^3 + 3\big), \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{6}\big(\big(x_1^{(k)}\big)^3 - \big(x_2^{(k)}\big)^3 + 2\big). \end{aligned}$$

Stavimo

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 + 3, \\ f_2(x_1, x_2) &= x_1^3 - x_2^3 - 6x_2 + 2. \end{aligned}$$

Računanjem se dobije

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f_1\big(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\big)$	$f_2\big(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\big)$
0	0.5	0.333333	0.162037	0.087963
1	0.527006	0.347994	0.026474	0.016262
2	0.531418	0.350704	0.004701	0.002717
3	0.532202	0.351157	0.000830	0.000497
4	0.532340	0.351240	0.000150	0.000085
5	0.532365	0.351254	0.000026	0.000017

.

Dakle, peta iteracija iznosi $\mathbf{x}^{(5)} = (0.532365, 0.351254)$.

Primjer 4.2.4. Metodom iteracije riješiti sustav nelinearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2 - 3\log x_2 &= 0 \\ 2x_2^2 - x_1 x_2 - 5x_2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

uzevši za početnu aproksimaciju $\mathbf{x}^{(0)} = (2.2, 3.4)$. Postupak prekinuti nakon desete iteracije.

Rješenje.

Zapišimo sustav u obliku

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_2 + 3\log x_2 \\ x_2^2 &= \frac{1}{2}(x_1 x_2 + 5x_2 - 1), \end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{x_2 + 3\log x_2} \\ x_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}(x_1 x_2 + 5x_2 - 1)}. \end{aligned}$$

Uvodimo funkcije $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ formulom

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2) &= \sqrt{x_2 + 3\log x_2}\,, \\ g_2(x_1, x_2) &= \sqrt{\frac{1}{2}(x_1 x_2 + 5x_2 - 1)}. \end{aligned}$$

Tada je, prema (13), za $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ g_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_2^{(k)} + 3\log x_2^{(k)}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}(x_1^{(k)} x_2^{(k)} + 5x_2^{(k)} - 1)} \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \sqrt{x_2^{(k)} + 3\log x_2^{(k)}}, \\ x_2^{(k+1)} &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(x_1^{(k)} x_2^{(k)} + 5x_2^{(k)} - 1)}. \end{aligned}$$

Stavimo

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1^2 - x_2 - 3\log x_2, \\ f_2(x_1, x_2) &= 2x_2^2 - x_1 x_2 - 5x_2 + 1. \end{aligned}$$

Računanjem se dobije

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f_1\big(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\big)$	$f_2\big(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\big)$
0	2.2	3.4	-0.154437	-0.36
1	2.234824	3.426368	-0.036432	-0.309174
2	2.242960	3.448853	-0.031007	-0.190730
3	2.249862	3.462651	-0.018998	-0.123838
4	2.254080	3.471580	-0.012285	-0.079384
5	2.256803	3.477292	-0.007856	-0.050904
6	2.258543	3.480950	-0.005027	-0.032599
7	2.259656	3.483290	-0.003214	-0.020869
8	2.260367	3.484787	-0.002057	-0.013352
9	2.260822	3.485745	-0.001316	-0.008538
10	2.261113	3.486357	-0.000841	-0.005462

Dakle, deseta iteracija iznosi $\mathbf{x}^{(10)} = (2.261113, 3.486357)$.

5 Interpolacija funkcija

Jedan od osnovnih problema u teoriji aproksimacija jest kako funkciju f aproksimirati nekom jednostavnijom funkcijom. Potreba za aproksimacijom javlja se iz razloga što je oblik funkcije f previše složen za računanje, ili su pak poznate vrijednosti funkcije f u samo konačno mnogo točaka $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, a željeli bismo procijeniti njezinu vrijednost u bilo kojoj točki intervala $[a, b]$. Drugi je slučaj čest u praksi, kada pokušavamo aproksimirati podatke koji se nalaze između podataka $x_0, x_1, \ldots, x_n$ koji se dobivaju mjerenjem. Napomenimo da je procjena pogreške aproksimacije moguća samo u slučaju kada je funkcija f na intervalu $[a, b]$ poznata, odnosno zadana formulom.

Funkciju kojom aproksimiramo funkciju f obično biramo u klasi polinoma, potencija, trigonometrijskih, eksponencijalnih, racionalnih funkcija ili linearnih kombinacija takvih funkcija. Među njima su najjednostavniji polinomi. Pomoću polinoma možemo sa zadanom točnošću $\varepsilon > 0$ aproksimirati bilo koju neprekidnu funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Naime, tada postoji polinom p tako da je

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

To je poznati Weierstrassov teorem o aproksimaciji (v. [11, teorem 5, str. 252]).

Standardna ideja u interpolaciji funkcije polinomom jest naći polinom p_n stupnja najviše n, tako da je

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Točke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ zovu se *čvorovi interpolacije* (*bazne točke* ili *interpolacijske točke*), a p_n je *interpolacijski polinom.* Kao što ćemo uskoro vidjeti, interpolacijski polinom uvijek postoji. Štoviše, takav je polinom jedinstven. (Zaista, ako je g polinom stupnja najviše n koji također zadovoljava relacije (14), tj. ako je $g(x_i) = f(x_i)$ za $i = 0, 1, \ldots, n$, onda je $g(x_i) = p_n(x_i)$ za $i = 0, 1, \ldots, n$. Neka je $h := g - p_n$. Tada je h polinom stupnja najviše n, te vrijedi $h(x_i) = g(x_i) - p_n(x_i) = 0$ za $i = 0, 1, \ldots, n$, tj. h ima $n + 1$ nultočaka. Prema osnovnom teoremu algebre zaključujemo da je h nulpolinom, pa je stoga $g = p_n$.)

Postoji više metoda za nalaženje interpolacijskog polinoma. Mi ćemo opisati dvije standardne metode. Za dani skup podataka, obje metode dat će isti interpolacijski polinom (jer je takav polinom jedinstven), ali zapisan u različitim oblicima, prikladnima za različite svrhe.

5.1 Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

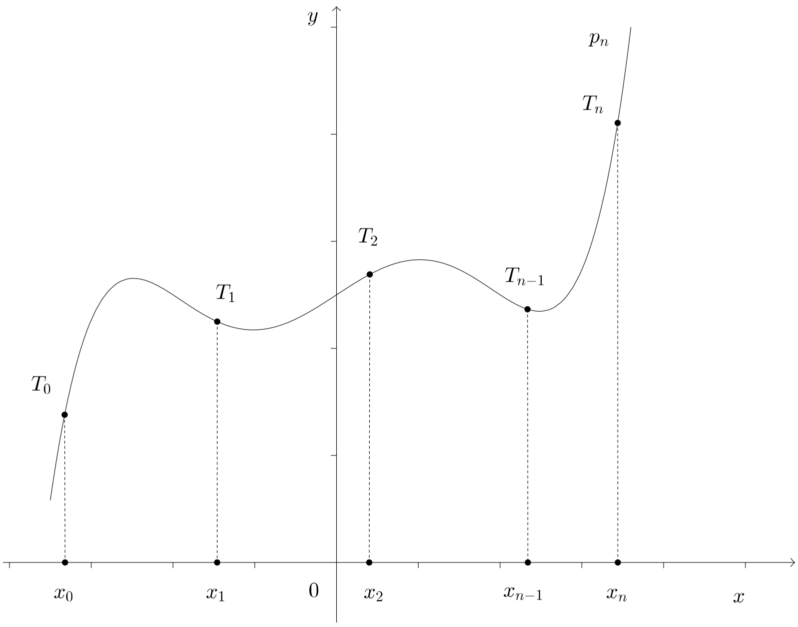
Pretpostavimo da su poznate vrijednosti

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \ldots, \quad y_n = f(x_n)$$

funkcije f u konačno mnogo točaka $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Želimo naći polinom p_n stupnja najviše n koji prolazi točkama

$$T_0(x_0, y_0), \quad T_1(x_1, y_1), \ldots, \quad T_n(x_n, y_n),$$

tj. takav da vrijedi $p_n(x_j) = y_j$ za $j = 0, 1, \ldots, n$.



Slika 9: Interpolacijski polinom p_n

Interpolacijski polinom p_n tražimo u obliku

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x), \tag{15}$$

gdje je $l_i(x)$ polinom n-tog stupnja koji u točki x_i poprima vrijednost 1 i kojemu su $x_0, x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ nultočke. Dakle, za $i = 0, 1, \ldots, n$,

$$l_i(x) = \alpha_i (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n),$$

pri čemu se konstanta α_i određuje iz uvjeta $l_i(x_i) = 1$. Prema tome,

$$1 = \alpha_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n),$$

pa je

$$\alpha_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Stoga je

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}, \tag{16}$$

pa se uvrštavanjem u (15) dobije

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}. \tag{17}$$

Prema (15), uočimo da je

$$p_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x_j) = y_j l_j(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Formulom (17) dan je *Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma* p_n.

Ocjena pogreške

Pretpostavimo da funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na segmentu $[a, b]$ ima neprekidne derivacije do uključivo $(n + 1)$-og reda. Funkciju f aproksimiramo interpolacijskim polinomom p_n, gdje su $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ čvorovi interpolacije. Tada za $x \in [a, b]$ imamo ocjenu pogreške

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n + 1)!}|(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)|, \tag{18}$$

gdje je

$$M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Primjer 5.1.1. Naći Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma koji prolazi točkama $T_0(0, 2)$, $T_1(1, 0)$, $T_2(2, 0)$, $T_3(3, 8)$. Izračunati vrijednost polinoma za $x = \frac{1}{2}$.

Rješenje.
Traženi polinom p_3 zapišimo u obliku

$$p_3(x) = \sum_{i=1}^{3} y_i l_i(x) = 2l_0(x) + 0l_1(x) + 0l_2(x) + 8l_3(x) = 2l_0(x) + 8l_3(x),$$

gdje je prema (16)

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3),$$
$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2).$$

Stoga je

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 2l_0(x) + 8l_3(x) \\ &= -\frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{4}{3}x(x-1)(x-2) \\ &= x^3 - 2x^2 - x + 2. \end{aligned}$$

U točki $x = \frac{1}{2}$ polinom poprima vrijednost $p_3(\frac{1}{2}) = \frac{9}{8}$.

Primjer 5.1.2. Naći Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma za funkciju $f(x) = \sin(\pi x)$ i čvorove interpolacije $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Izračunati vrijednost polinoma, ocjenu pogreške i stvarnu pogrešku za $x = 0.4$.

Rješenje.
Kako je

$$y_0 = f(x_0) = f(0) = 0, \quad y_1 = f(x_1) = f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad y_2 = f(x_2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

traženi interpolacijski polinom je

$$p_2 = \sum_{i=0}^{2} y_i l_i(x) = 0l_0(x) + \frac{1}{2}l_1(x) + l_2(x) = \frac{1}{2}l_1(x) + l_2(x),$$

gdje je prema (16)

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{6}-0)(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})} = -18x^2 + 9x,$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})} = 6x^2 - x.$$

Stoga je

$$p_2(x) = \frac{1}{2}l_1(x) + l_2(x) = \frac{1}{2}(-18x^2 + 9x) + 6x^2 - x = -3x^2 + \frac{7}{2}x.$$

Prema (18), za $x \in [0, \frac{1}{2}]$ imamo ocjenu pogreške aproksimacije

$$|f(x) - p_2(x)| \le \frac{M_3}{3!}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| = \frac{M_3}{6}\Big|x\Big(x-\frac{1}{6}\Big)\Big(x-\frac{1}{2}\Big)\Big|,$$

gdje je

$$M_3 = \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f'''(x)|.$$

Vrijedi

$$f'(x) = \pi\cos(\pi x), \quad f''(x) = -\pi^2\sin(\pi x), \quad f'''(x) = -\pi^3\cos(\pi x),$$

pa je

$$M_3 = \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f'''(x)| = \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |-\pi^3\cos(\pi x)| = \pi^3\cos 0 = \pi^3.$$

Prema tome,

$$|f(x) - p_2(x)| \le \frac{\pi^3}{6}\Big|x\Big(x-\frac{1}{6}\Big)\Big(x-\frac{1}{2}\Big)\Big|.$$

Odavde za $x = 0.4$ imamo ocjenu pogreške

$$|f(0.4) - p_2(0.4)| \le \frac{\pi^3}{6}\Big|0.4\Big(0.4-\frac{1}{6}\Big)\Big(0.4-\frac{1}{2}\Big)\Big| \approx 0.048231985.$$

Kako je

$$f(0.4) = \sin(0.4\pi) \approx 0.951056516, \quad p_2(0.4) = -3\cdot 0.4^2 + \frac{7}{2}\cdot 0.4 = 0.92,$$

to stvarna pogreška iznosi

$$f(0.4) - p_2(0.4) \approx 0.951056516 - 0.92 = 0.031056516.$$

5.2 Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Pretpostavimo da funkcija f u konačno mnogo točaka $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ poprima vrijednosti $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$. Znamo da postoji jedinstven interpolacijski polinom stupnja najviše n koji prolazi točkama $T_0(x_0, y_0)$, $T_1(x_1, y_1), \ldots, T_n(x_n, y_n)$. Sada ćemo taj polinom tražiti u obliku

$$p_n(x) = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

Razmotrimo najprije slučaj $n = 1$. Treba naći polinom

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \tag{19}$$

stupnja najviše 1 koji prolazi točkama $T_0(x_0, y_0)$ i $T_1(x_1, y_1)$. Dakle, vrijedi $p_1(x_0) = y_0$ i $p_1(x_1) = y_1$ pa se uvrštavanjem u (19) dobije $y_0 = p_1(x_0) = a_0$ i $y_1 = p_1(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$, odakle slijedi

$$a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Uz oznake

$$f[x_0] := y_0, \quad f[x_0, x_1] := \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{20}$$

polinom p_1 poprima oblik

$$p_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x_1 - x_0).$$

Uzmimo sada da je $n = 2$. Tada polinom p_2 tražimo u obliku

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1), \tag{21}$$

uz uvjet da taj polinom prolazi točkama $T_0(x_0, y_0)$, $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$, tj. da je $p_2(x_0) = y_0$, $p_2(x_1) = y_1$ i $p_2(x_2) = y_2$. Uvrštavanjem u (21) dobije se $y_0 = p_2(x_0) = a_0$, $y_1 = p_2(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$ i $y_2 = p_2(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$. Odavde prema (20) slijedi

$$a_0 = f[x_0], \quad a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1],$$

te

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{y_2 - a_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\
&= \frac{y_2 - y_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_1 - y_0)(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\
&= \frac{(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\
&= \frac{(y_2 - y_1)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\
&= \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)}.
\end{aligned}$$

Uz oznake (20) i

$$f[x_1, x_2] := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad f[x_0, x_1, x_2] := \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \tag{22}$$

dobije se $a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$, pa polinom (21) glasi

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Općenito, stavljamo

$$f[x_i] = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

a za $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \in \mathbb{N}$ takve da je $i + k \leq n$, uvode se oznake

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \tag{23}$$

i tada se lako pokaže da je $a_i = f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$ za $i = 1, \ldots, n$, pa interpolacijski polinom p_n ima oblik

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \tag{24}$$

Brojevi (23) zovu se *podijeljene razlike k-tog reda funkcije f u točkama* $x_i, \ldots, x_{i+k}$, a s (24) dan je *Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_n*. Za ocjenu pogreške interpolacije također koristimo formulu (18).

Za računanje podijeljenih razlika prikladno je koristiti sljedeću tablicu

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$\cdots$
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	$\vdots$	
		$f[x_2, x_3]$	$\vdots$		
x_3	$f[x_3]$	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$				

.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma je prikladniji za računanje od Lagrangeovog oblika interpolacijskog polinoma. Naime, u praksi često ne znamo stupanj interpolacijskog polinoma koji će nam dati dovoljno dobru aproksimaciju, pa se prema potrebi stupanj polinoma povećava. Radimo li Lagrangeovu interpolaciju, tada svako povećanje stupnja polinoma zahtijeva ponovno računanje svih koeficijenata interpolacijskog polinoma. S Newtonovom interpolacijom taj se postupak znatno pojednostavljuje. Zaista, kako je

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + a_{n+1}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

jasno je da svako povećanje stupnja polinoma, odnosno dodavanje još jedne interpolacijske točke x_{n+1}, iziskuje računanje samo jednog dodatnog koeficijenta $a_{n+1} = f[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}]$.

Primjer 5.2.1. Naći Newtonov oblik interpolacijskog polinoma koji prolazi točkama $T_0(-1, 7)$, $T_1(2, 22)$, $T_2(4, 2)$, $T_3(5, 19)$. Izračunati vrijednost polinoma za $x = 1$.

Rješenje.
Prema formuli (23) računamo podijeljene razlike i upisujemo ih u tablicu

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
$x_0 = -1$	$f[x_0] = 7$			
		$f[x_0, x_1] = 5$		
$x_1 = 2$	$f[x_1] = 22$		$f[x_0, x_1, x_2] = -3$	
		$f[x_1, x_2] = -10$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 2$
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		$f[x_1, x_2, x_3] = 9$	
		$f[x_2, x_3] = 17$		
$x_3 = 5$	$f[x_3] = 19$			

.

Prema (24), Newtonov oblik interpolacijskog polinoma glasi

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 7 + 5(x+1) - 3(x+1)(x-2) + 2(x+1)(x-2)(x-4) \\ &= 2x^3 - 13x^2 + 12x + 34. \end{aligned}$$

U točki $x = 1$ polinom poprima vrijednost $p_3(1) = 35$.

Primjer 5.2.2. Naći Newtonov oblik interpolacijskog polinoma za funkciju $f(x) = \ln x$ i čvorove interpolacije $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$. Izračunati vrijednost polinoma, ocjenu pogreške i stvarnu pogrešku za $x = 3$.
Rješenje.
Prema formuli (23) dobije se

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
$x_0 = 2$	$f[x_0] = 0.693148$		
		$f[x_0, x_1] = 0.446286$	
$x_1 = 2.5$	$f[x_1] = 0.916291$		$f[x_0, x_1, x_2] = -0.066476$
		$f[x_1, x_2] = 0.313335$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 1.386294$		

.

Prema (24), Newtonov oblik interpolacijskog polinoma glasi

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 0.693148 + 0.446286(x-2) - 0.066476(x-2)(x-2.5) \\ &= -0.066476x^2 + 0.745428x - 0.531804. \end{aligned}$$

U točki $x = 2.7$ polinom poprima vrijednost $p_2(2.7) = 0.996242$.
Prema (18), za $x \in [2, 4]$ imamo ocjenu pogreške aproksimacije

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| = \frac{M_3}{6}|(x-2)(x-2.5)(x-4)|,$$

gdje je

$$M_3 = \max_{x\in[2,4]} |f'''(x)|.$$

Vrijedi

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3},$$

pa je

$$M_3 = \max_{x\in[2,4]} |f'''(x)| = \max_{x\in[2,4]} \left|\frac{2}{x^3}\right| = \frac{2}{2^3} = 0.25.$$

Prema tome,

$$|f(x) - p_2(x)| \le \frac{0.25}{6}|(x-2)(x-2.5)(x-4)| = \frac{1}{24}|(x-2)(x-2.5)(x-4)|.$$

Odavde za $x = 2.7$ imamo ocjenu pogreške

$$|f(2.7) - p_2(2.7)| \le \frac{1}{24}|(2.7-2)(2.7-2.5)(2.7-4)| \approx 0.007583.$$

Kako je

$$f(2.7) = \ln 2.7 \approx 0.993252, \quad p_2(2.7) = 0.996242,$$

to stvarna pogreška iznosi

$$f(2.7) - p_2(2.7) \approx 0.993252 - 0.996242 = -0.00299.$$

6 Numeričke metode za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi

Numeričke metode za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi imaju veliku važnost u primjenama. Razlog leži u činjenici da se pri rješavanju raznih praktičnih problema često pojavljuju diferencijalne jednadžbe za koje ne možemo napisati egzaktno rješenje, ili je pak rješavanje diferencijalnih jednadžbi analitičkim postupkom dugotrajno ili previše složeno. Rješavajući običnu diferencijalnu jednadžbu nekom numeričkom metodom, dobit ćemo tablično zadanu funkciju, odnosno približne vrijednosti $y_i \approx y(x_i)$ tražene funkcije $y = y(x)$ u konačno mnogo točaka x_i zadanog intervala.

U ovom poglavlju opisat ćemo osnovne metode za numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi prvog i drugog reda.

6.1 Eulerova metoda

Diferencijalna jednadžba prvog reda je jednadžba oblika $F(x, y, y') = 0$ za neku funkciju F. Ova jednadžba često se može zapisati eksplicitno u obliku $y' = f(x, y)$. Za zadanu funkciju f želimo naći rješenje $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, diferencijalne jednadžbe

$$y' = f(x, y) \tag{25}$$

koje za neki $y_0 \in \mathbb{R}$ zadovoljava početni uvjet

$$y(a) = y_0. \tag{26}$$

Ovaj problem zove se *Cauchyjev problem* ili *inicijalni problem.* Uz neke pretpostavke na funkciju f, Cauchyjev problem ima jedinstveno rješenje.

Pri numeričkom rješavanju Cauchyjevog problema, segment $[a, b]$ točkama $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$ podijelimo na $n \in \mathbb{N}$ jednakih dijelova duljine $h = \frac{b-a}{n}$. Točke x_i, $i = 0, \ldots, n$, nazivamo *čvorovima*, a h *korakom.* Uočimo

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, \ldots, n.$$

U svakom čvoru x_i, vrijednosti tražene funkcije $y = y(x)$ aproksimiramo vrijednostima y_i do kojih dolazimo na sljedeći način. U okolini točke x_0 funkciju $y = y(x)$ možemo aproksimirati linearnom funkcijom

$$x \mapsto y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \tag{27}$$

čiji graf je tangenta na graf funkcije $y = y(x)$ u točki (x_0, y_0). Naime, za dovoljno glatku funkciju $y = y(x)$ prema Taylorovoj formuli vrijedi

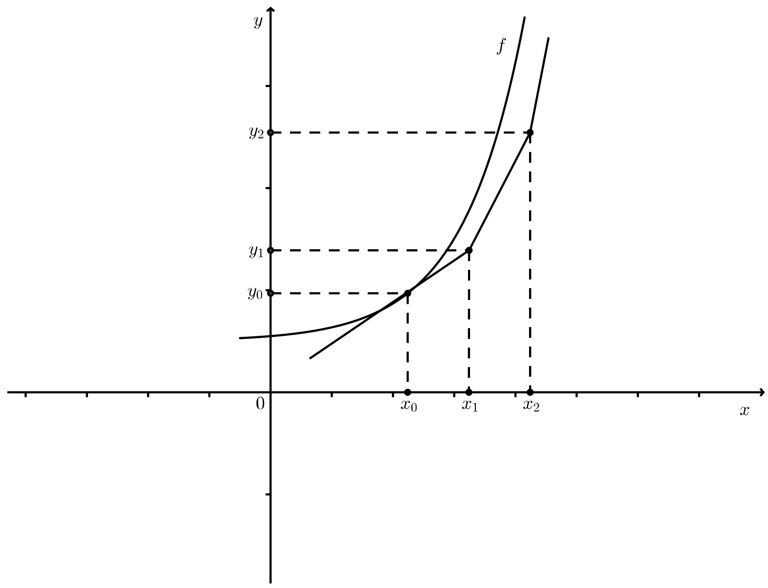
$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{y''(x_0 + th)}{2}h^2$$

za neki $t \in \langle 0, 1\rangle$. Stoga za dovoljno malu vrijednost koraka h, član $\frac{y''(x_0+th)}{2}h^2$ koji sadrži h^2 možemo zanemariti i time $y(x_1)$ aproksimirati s

$$y(x_1) \approx y_1 := y(x_0) + y'(x_0)h,$$

što je vrijednost linearne funkcije (27) u točki x_1. Koeficijent smjera tangente na graf funkcije $y = y(x)$ je poznat i iznosi $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Stoga je

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$



Slika 10: Eulerova metoda

Za računanje aproksimativne vrijednosti $y_2 \approx y(x_2)$ koristimo sada poznatu vrijednost y_1. Stavimo

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h.$$

Postupajući analogno, dolazimo do formule

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h, \quad i = 0, \ldots, n-1. \tag{28}$$

Opisani postupak nazivamo *Eulerovom metodom.*

Geometrijski gledano, funkciju $y = y(x)$ zamjenjujemo po dijelovima linearnom funkcijom koja prolazi točkama (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$. Pritom točke (x_i, y_i) i (x_{i+1}, y_{i+1}) leže na pravcu čiji koeficijent smjera, prema (28), iznosi

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Za dovoljno malu vrijednost koraka h, ova po dijelovima linearna funkcija daje dobru aproksimaciju tražene funkcije $y = y(x)$ u svim točkama intervala $[a, b]$. Međutim, ova se metoda rijetko koristi u praksi, budući da bi za postizanje preciznijih rezultata korak h trebao biti jako mali. Ipak, ova jednostavna metoda ima važno teorijsko značenje i stoga može poslužiti kao uvod u razumijevanje složenijih postupaka.

Primjer 6.1.1. Eulerovom metodom riješiti Cauchyjev problem

$$y' = x - y, \quad y(1) = 0.4$$

na segmentu $[1, 3.4]$ dijeleći ga na četiri, odnosno dvanaest dijelova. Vrijednosti u čvorovima usporediti sa stvarnim vrijednostima.

Rješenje.

(a) Uzmimo $n = 4$. Tada je $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3.4-1}{4} = 0.6$, a čvorovi su

$$x_0 = 1, \quad x_1 = x_0 + h = 1.6, \quad x_2 = x_1 + h = 2.2, \quad x_3 = x_2 + h = 2.8, \quad x_4 = 3.4.$$

Kako je $f(x, y) = x - y$, to je prema (28)

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h = y_i + 0.6(x_i - y_i), \quad i = 0, \ldots, 3.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
y_0 &= 0.4, \\
y_1 &= y_0 + 0.6(x_0 - y_0) = 0.4 + 0.6(1 - 0.4) = 0.76, \\
y_2 &= y_1 + 0.6(x_1 - y_1) = 0.76 + 0.6(1.6 - 0.76) = 1.264, \\
y_3 &= y_2 + 0.6(x_2 - y_2) = 1.264 + 0.6(2.2 - 1.264) = 1.8256, \\
y_4 &= y_3 + 0.6(x_3 - y_3) = 1.8256 + 0.6(2.8 - 1.8256) = 2.41024.
\end{aligned}$$

Obična diferencijalna jednadžba $y' = x - y$ je linearna i njezino egzaktno rješenje uz uvjet $y(1) = 0.4$ je funkcija $y(x) = x - 1 + 0.4e^{1-x}$.

Dobivene aproksimacije y_i unijet ćemo u tablicu i usporediti sa stvarnim vrijednostima $y(x_i) = x_i - 1 + 0.4e^{1-x_i}$. Dobije se

i	x_i	y_i	$y(x_i)$
0	1	0.4	0.4
1	1.6	0.76	0.819524654
2	2.2	1.264	1.320477685
3	2.8	1.8256	1.866119555
4	3.4	2.41024	2.436287181

.

(b) Uzmimo $n = 12$. Tada je $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3.4-1}{12} = 0.2$, a čvorovi su

$$x_0 = 1, \quad x_i = x_0 + ih = 1 + 0.2i, \quad i = 1, \ldots, 12.$$

Aproksimacije y_i u čvorovima x_i računaju se prema (28), tj.

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h = y_i + 0.2(x_i - y_i), \quad i = 0, \ldots, 11.$$

Iznosi aproksimacija i stvarnih vrijednosti prikazani su u tablici

i	x_i	y_i	$y(x_i)$
0	1	0.4	0.4
1	1.2	0.52	0.527492301
2	1.4	0.656	0.668128018
3	1.6	0.8048	0.819524654
4	1.8	0.96384	0.979731586
5	2	1.131072	1.147151776
6	2.2	1.3048576	1.320477685
7	2.4	1.48388608	1.498638786
8	2.6	1.667108864	1.680758607
9	2.8	1.853766867	1.866119555
10	3	2.043013494	2.054134113
11	3.2	2.234410795	2.244321263
12	3.4	2.427528636	2.436287181

.

Primjer 6.1.2. Eulerovom metodom riješiti Cauchyjev problem

$$y' = xy, \quad y(0) = 1$$

na segmentu $[0, 1]$ dijeleći ga na deset dijelova. Vrijednosti u čvorovima usporediti sa stvarnim vrijednostima.

Rješenje.

Kako je $n = 10$, to duljina koraka iznosi $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$. Čvorovi su

$$x_0 = 0, \quad x_i = x_0 + ih = 1 + 0.1i, \quad i = 1, \ldots, 10.$$

Kako je $f(x, y) = xy$, to su prema (28) aproksimacije y_i u čvorovima x_i

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h = y_i + 0.1x_iy_i, \quad i = 0, \ldots, 9.$$

Jednadžba $y' = xy$ je obična diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama i njezino egzaktno rješenje uz uvjet $y(0) = 1$ je $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$. Iznosi aproksimacija y_i i stvarnih vrijednosti $y(x_i)$ prikazani su u tablici

i	x_i	y_i	$y(x_i)$
0	0	1	1
1	0.1	1	1.005012521
2	0.2	1.01	1.02020134
3	0.3	1.0302	1.04602786
4	0.4	1.061106	1.083287068
5	0.5	1.10355024	1.133148453
6	0.6	1.158727752	1.197217363
7	0.7	1.228251417	1.277621313
8	0.8	1.314229016	1.377127764
9	0.9	1.419358538	1.4993025
10	1	1.547100806	1.648721271

.

6.2 Runge–Kuttina metoda

Postoji čitav niz Runge–Kuttinih metoda za numeričko rješavanje Cauchyjevog problema

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0$$

na segmentu $[a, b]$. Među njima je najpoznatija i najviše korištena klasična Runge–Kuttina metoda četvrtog reda. Vidjeli smo da se Eulerovom metodom aproksimacija y_{i+1} tražene funkcije $y = y(x)$ u točki x_{i+1} računa pomoću već poznate aproksimacije y_i funkcije $y = y(x)$ u točki x_i i aproksimacije $f(x_i, y_i)$ vrijednosti funkcije $x \mapsto f(x, y(x))$ u točki x_i. Za razliku od Eulerove metode, klasičnom Runge–Kuttinom metodom se aproksimacija y_{i+1} računa pomoću y_i i aproksimacije vrijednosti funkcije $x \mapsto f(x, y(x))$ u četiri točke, gdje se x bira unutar segmenta $[x_i, x_{i+1}]$. Napomenimo da je, za istu duljinu koraka, ova metoda puno preciznija od Eulerove metode. Metodu ćemo samo navesti, jer je izvod kompliciran i izlazi iz okvira ovog kolegija.

Segment $[a, b]$ točkama $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ podijelimo na n jednakih dijelova duljine $h = \frac{b-a}{n}$. Aproksimacije y_i vrijednosti funkcije $y = y(x)$ u točkama x_i, $i = 1, \ldots, n$, računamo rekurzivno. Naime, za već poznatu aproksimaciju y_i, aproksimacija y_{i+1} dobiva se pomoću formule

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{29}$$

gdje su

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{k_1}{2}), \\ k_3 &= hf(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{k_2}{2}), \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3). \end{aligned}$$

Primjer 6.2.1. Runge–Kuttinom metodom riješiti Cauchyjev problem

$$y' = x - y, \quad y(1) = 0.4$$

na segmentu $[1, 3.4]$ dijeleći ga na četiri dijela. Vrijednosti u čvorovima usporediti s vrijednostima dobivenim Eulerovom metodom i sa stvarnim vrijednostima.

Rješenje.

Za $n = 4$ duljina koraka iznosi $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3.4-1}{4} = 0.6$. Čvorovi su

$$x_0 = 1, \quad x_1 = x_0 + h = 1.6, \quad x_2 = x_1 + h = 2.2, \quad x_3 = x_2 + h = 2.8, \quad x_4 = 3.4,$$

a $f(x, y) = x - y$.

Zadano je $y_0 = y(x_0) = y(1) = 0.4$, a aproksimacije y_{i+1}, $i = 0, 1, 2, 3$, računamo pomoću formule (29), gdje je

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i) = 0.6(x_i - y_i), \\ k_2 &= hf(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{k_1}{2}) = 0.6(x_i + 0.3 - y_i - \tfrac{k_1}{2}), \\ k_3 &= hf(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{k_2}{2}) = 0.6(x_i + 0.3 - y_i - \tfrac{k_2}{2}), \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3) = 0.6(x_i + 0.6 - y_i - k_3). \end{aligned}$$

Za $i = 0$ imamo

$$\begin{aligned} k_1 &= 0.6(x_0 - y_0) = 0.6(1 - 0.4) = 0.36, \\ k_2 &= 0.6(x_0 + 0.3 - y_0 - \tfrac{k_1}{2}) = 0.6(1 + 0.3 - 0.4 - \tfrac{0.36}{2}) = 0.432, \\ k_3 &= 0.6(x_0 + 0.3 - y_0 - \tfrac{k_2}{2}) = 0.6(1 + 0.3 - 0.4 - \tfrac{0.432}{2}) = 0.4104, \\ k_4 &= 0.6(x_0 + 0.6 - y_0 - k_3) = 0.6(1 + 0.6 - 0.4 - 0.4104) = 0.47376. \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 0.4 + \tfrac{1}{6}(0.36 + 2 \cdot 0.432 + 2 \cdot 0.4104 + 0.47376) \\
&= 0.81976.
\end{aligned}$$

Za $i = 1$ imamo

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.6(x_1 - y_1) = 0.468144, \\
k_2 &= 0.6(x_1 + 0.3 - y_1 - \tfrac{k_1}{2}) = 1.0154016, \\
k_3 &= 0.6(x_1 + 0.3 - y_1 - \tfrac{k_2}{2}) = 0.99166752, \\
k_4 &= 0.6(x_1 + 0.6 - y_1 - k_3) = 0.530643744.
\end{aligned}$$

Tada je

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.320736144.$$

Za $i = 2$ imamo

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.6(x_2 - y_2) = 0.527558313, \\
k_2 &= 0.6(x_2 + 0.3 - y_2 - \tfrac{k_1}{2}) = 1.098581639, \\
k_3 &= 0.6(x_2 + 0.3 - y_2 - \tfrac{k_2}{2}) = 1.085542135, \\
k_4 &= 0.6(x_2 + 0.6 - y_2 - k_3) = 0.561895673.
\end{aligned}$$

Tada je

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.866332437.$$

Za $i = 3$ imamo

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.6(x_3 - y_3) = 0.560200537, \\
k_2 &= 0.6(x_3 + 0.3 - y_3 - \tfrac{k_1}{2}) = 1.144280753, \\
k_3 &= 0.6(x_3 + 0.3 - y_3 - \tfrac{k_2}{2}) = 1.13711685, \\
k_4 &= 0.6(x_3 + 0.6 - y_3 - k_3) = 0.579065482.
\end{aligned}$$

Tada je

$$y_4 = y_3 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.436443041.$$

U primjeru 6.1.1 aproksimacije y_i izračunali smo pomoću Eulerove metode. Egzakto rješenje ovog Cauchyjevog problema je funkcija $y(x) = x - 1 +$

$0.4e^{1-x}$. Aproksimacije dobivene Eulerovom metodom, Runge–Kuttinom metodom i stvarne vrijednosti prikazane su u tablici

i	x_i	y_i (Euler)	y_i (Runge-Kutta)	$y(x_i)$
0	1	0.4	0.4	0.4
1	1.6	0.76	0.81976	0.819524654
2	2.2	1.264	1.320736144	1.320477685
3	2.8	1.8256	1.866332437	1.866119555
4	3.4	2.41024	2.436443041	2.436287181

.

Uočimo da su aproksimacije dobivene Runge–Kuttinom metodom točnije od aproksimacija dobivenih Eulerovom metodom.

Primjer 6.2.2. Runge–Kuttinom metodom riješiti Cauchyjev problem

$$y' = (y - x - 1)^2 + 2, \quad y(0) = 1$$

na segmentu $[0, 0.4]$ dijeleći ga na četiri dijela. Vrijednosti u čvorovima usporediti sa stvarnim vrijednostima.

Rješenje.

Za $n = 4$ duljina koraka iznosi $h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.4-0}{4} = 0.1$. Čvorovi su

$$x_0 = 0, \quad x_1 = x_0 + h = 0.1, \quad x_2 = x_1 + h = 0.2, \quad x_3 = x_2 + h = 0.3, \quad x_4 = 0.4,$$

a $f(x, y) = (y - x - 1)^2 + 2$.

Zadano je $y_0 = y(x_0) = y(0) = 1$, a aproksimacije y_{i+1}, $i = 0, 1, 2, 3$, računamo pomoću formule (29), gdje je

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_i, y_i) = 0.1\big((y_i - x_i - 1)^2 + 2\big), \\
k_2 &= hf(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{k_1}{2}) = 0.1\big((y_i + \tfrac{k_1}{2} - x_i - 1.05)^2 + 2\big), \\
k_3 &= hf(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{k_2}{2}) = 0.1\big((y_i + \tfrac{k_2}{2} - x_i - 1.05)^2 + 2\big), \\
k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3) = 0.1\big((y_i + k_3 - x_i - 1.1)^2 + 2\big).
\end{aligned}$$

Za $i = 0$ imamo

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.1\big((y_0 - x_0 - 1)^2 + 2\big) = 0.2, \\
k_2 &= 0.1\big((y_0 + \tfrac{k_1}{2} - x_0 - 1.05)^2 + 2\big) = 0.20025, \\
k_3 &= 0.1\big((y_0 + \tfrac{k_2}{2} - x_0 - 1.05)^2 + 2\big) = 0.200251251, \\
k_4 &= 0.1\big((y_0 + k_3 - x_0 - 1.1)^2 + 2\big) = 0.201005031.
\end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 1 + \tfrac{1}{6}(0.2 + 2 \cdot 0.20025 + 2 \cdot 0.200251251 + 0.201005031) \\
&= 1.200334589.
\end{aligned}$$

Za $i = 1$ imamo

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.1\big((y_1 - x_1 - 1)^2 + 2\big) = 0.201006703, \\
k_2 &= 0.1\big((y_1 + \tfrac{k_1}{2} - x_1 - 1.05)^2 + 2\big) = 0.202275208, \\
k_3 &= 0.1\big((y_1 + \tfrac{k_2}{2} - x_1 - 1.05)^2 + 2\big) = 0.202294382, \\
k_4 &= 0.1\big((y_1 + k_3 - x_1 - 1.1)^2 + 2\big) = 0.20410585.
\end{aligned}$$

Tada je

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.402709878.$$

Za $i = 2$ imamo

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.1\big((y_2 - x_2 - 1)^2 + 2\big) = 0.204109129, \\
k_2 &= 0.1\big((y_2 + \tfrac{k_1}{2} - x_2 - 1.05)^2 + 2\big) = 0.206490492, \\
k_3 &= 0.1\big((y_2 + \tfrac{k_2}{2} - x_2 - 1.05)^2 + 2\big) = 0.206551302, \\
k_4 &= 0.1\big((y_2 + k_3 - x_2 - 1.1)^2 + 2\big) = 0.209564247.
\end{aligned}$$

Tada je

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.609336039.$$

Za $i = 3$ imamo

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.1\big((y_3 - x_3 - 1)^2 + 2\big) = 0.209568878, \\
k_2 &= 0.1\big((y_3 + \tfrac{k_1}{2} - x_3 - 1.05)^2 + 2\big) = 0.213258372, \\
k_3 &= 0.1\big((y_3 + \tfrac{k_2}{2} - x_3 - 1.05)^2 + 2\big) = 0.213393054, \\
k_4 &= 0.1\big((y_3 + k_3 - x_3 - 1.1)^2 + 2\big) = 0.217869988.
\end{aligned}$$

Tada je

$$y_4 = y_3 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.822792992.$$

Egzaktno rješenje ovog Cauchyjevog problema je funkcija $y(x) = \text{tg } x + x + 1$. Aproksimacije dobivene Runge–Kuttinom metodom i stvarne vrijednosti prikazane su u tablici

i	x_i	y_i	$y(x_i)$
0	0	1	1
1	0.1	1.200334589	1.200334672
2	0.2	1.402709878	1.402710036
3	0.3	1.609336039	1.609336250
4	0.4	1.822792992	1.822793219

.

6.3 Metoda konačnih diferencija

Pri rješavanju praktičnih problema često se javljaju diferencijalne jednadžbe sa zadanim rubnim vrijednostima. Postoji više metoda za rješavanje ove vrste problema. Mi ćemo opisati *metodu konačnih diferencija.* Za zadane funkcije $f, p, q : [a, b] \to \mathbb{R}$ treba naći rješenje $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{30}$$

koje za neke $a_0, b_0, a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, takve da je $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, zadovoljava rubne uvjete

$$\begin{aligned} a_0 y(a) + b_0 y'(a) &= c_0 \\ a_1 y(b) + b_1 y'(b) &= c_1. \end{aligned}$$

Posebno, ako su zadane vrijednosti funkcije $y = y(x)$ na rubovima (tj. $b_0 = b_1 = 0$), radi se o *Dirichletovom rubnom uvjetu*, a ako su zadane vrijednosti derivacije funkcije $y = y(x)$ na rubovima (tj. $a_0 = a_1 = 0$), radi se o *Neumannovom rubnom uvjetu.*

Segment $[a, b]$ točkama $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ podijelimo na n jednakih dijelova duljine $h = \frac{b-a}{n}$. Tada je

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Točke $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zovu se *unutrašnji čvorovi*, a x_0 i x_n *rubni čvorovi.* Ideja metode je da se u svakom čvoru diferencijalna jednadžba zamijeni odgovarajućom linearnom jednadžbom i zatim riješi tako dobiveni sustav linearnih jednadžbi. Rješenje ovog numeričkog problema bit će konačan niz vrijednosti

y_i, $i = 0, \ldots, n$, gdje su y_i aproksimacije za vrijednosti $y(x_i)$. Uvedimo oznake y'_i za aproksimacije vrijednosti $y'(x_i)$, te y''_i za aproksimacije vrijednosti $y''(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

Uočimo jedan čvor x_i, gdje je $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Pretpostavimo li da je tražena funkcija $y = y(x)$ dovoljno glatka, prema Taylorovoj formuli imamo

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i + th)}{2}h^2 \tag{31}$$

za neki $t \in \langle 0, 1\rangle$. Ako je h mali, možemo zanemariti član $\frac{y''(x_i+th)}{2}h^2$ koji sadrži h^2 i dobiti približnu vrijednost za $y(x_{i+1})$, tj.

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + y'(x_i)h,$$

što uz naše oznake daje

$$y_{i+1} = y_i + y'_i h.$$

Odavde je

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad i = 0, \ldots, n-1. \tag{32}$$

Aproksimacija y'_i derivacije $y'(x_i)$ dana formulom (32) zove se *aproksimacija zdesna.*

Osim aproksimacije zdesna također se koriste aproksimacija slijeva i centralna aproksimacija koje definiramo na sljedeće načine.

Uzmimo čvor x_i, gdje je $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ako se u formuli (31) h zamijeni s $-h$, dobije se

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) + y'(x_i)(-h) + \frac{y''(x_i + th)}{2}(-h)^2$$

za neki $s \in \langle 0, 1\rangle$. Za malu vrijednost koraka h može se zanemariti član $\frac{y''(x_i+th)}{2}h^2$ koji sadrži h^2 i dobiti približna vrijednost za $y(x_{i-1})$, tj.

$$y(x_{i-1}) \approx y(x_i) - y'(x_i)h,$$

što uz naše oznake daje

$$y_{i-1} = y_i - y'_i h.$$

Odavde je

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{33}$$

Aproksimacija y_i' derivacije $y(x_i)$ dana formulom (33) zove se *aproksimacija slijeva.*

Uzmimo sada čvor x_i, gdje je $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Centralnu aproksimaciju dobijemo polazeći od Taylorovih formula

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2}h^2 + \frac{y'''(x_i + th)}{6}h^3,$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2}h^2 - \frac{y'''(x_i - sh)}{6}h^3,$$

(gdje su $t, s \in \langle 0, 1\rangle$), koje oduzmemo i podijelimo s $2h$. Dobije se

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} = y'(x_i) + \frac{1}{12}\big(y'''(x_i + th) + y'''(x_i - sh)\big)h^2$$

odnosno, zanemarimo li član $\frac{1}{12}\big(y'''(x_i + th) + y'''(x_i - sh)\big)h^2$ koji sadrži h^2,

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h},$$

što uz naše oznake daje

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{34}$$

Aproksimacija y_i' derivacije $y'(x_i)$ dana formulom (34) zove se *centralna aproksimacija.*

Za aproksimaciju y_i'' druge derivacije $y''(x_i)$, gdje je $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, polazimo od Taylorovih formula

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2}h^2 + \frac{y'''(x_i)}{6}h^3 + \frac{y^{iv}(x_i + th)}{24}h^4,$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2}h^2 - \frac{y'''(x_i)}{6}h^3 + \frac{y^{iv}(x_i - sh)}{24}h^4,$$

(gdje su $t, s \in \langle 0, 1\rangle$), koje zbrojimo i zatim podijelimo s h^2. Dobije se

$$\frac{y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) - 2y(x_i)}{h^2} = y''(x_i) + \frac{1}{24}\big(y^{iv}(x_i + th) + y^{iv}(x_i - sh)\big)h^2.$$

Zanemarimo li član $\frac{1}{24}\big(y^{iv}(x_i + th) + y^{iv}(x_i - sh)\big)h^2$ koji sadrži h^2 imamo

$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) - 2y(x_i)}{h^2},$$

odnosno

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{35}$$

U čvorovima x_i, $i = 1, \ldots, n-1$, diferencijalna jednadžba (30) glasi

$$y''(x_i) + p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) = f(x_i).$$

Kako je $y_i \approx y(x_i)$, $y_i' \approx y'(x_i)$ te $y_i'' \approx y''(x_i)$, gornja jednadžba daje

$$y_i'' + p(x_i)y_i' + q(x_i)y_i = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n-1$$

odnosno, prema (34) i (35),

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Sređivanjem se dobije

$$\Big(\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i)}{2h}\Big)y_{i-1} + \Big(q(x_i) - \frac{2}{h^2}\Big)y_i + \Big(\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h}\Big)y_{i+1} = f(x_i), \ \ i = 1, \ldots, n-1.$$

Napomenimo da smo pritom umjesto centralne aproksimacije za prvu derivaciju mogli koristiti aproksimaciju zdesna ili aproksimaciju slijeva.

Rubni uvjeti u čvorovima x_0 i x_n glase

$$\begin{aligned} a_0y_0 + b_0y_0' &= c_0 \\ a_1y_n + b_1y_n' &= c_1 \end{aligned}$$

odnosno, prema (32) i (33) imamo

$$\begin{aligned} a_0y_0 + b_0\frac{y_1 - y_0}{h} &= c_0 \\ a_1y_n + b_1\frac{y_n - y_{n-1}}{h} &= c_1, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \Big(a_0 - \frac{b_0}{h}\Big)y_0 + \frac{b_0}{h}y_1 &= c_0 \\ -\frac{b_1}{h}y_{n-1} + \Big(a_1 + \frac{b_1}{h}y_n\Big) &= c_1. \end{aligned}$$

Dobili smo sustav od $n+1$ linearnih jednadžbi s $n+1$ nepoznanica $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Uvedimo oznake

$$u_0 = a_0 - \frac{b_0}{h}, \quad v_0 = \frac{b_0}{h}, \quad w_n = -\frac{b_1}{h}, \quad u_n = a_1 + \frac{b_1}{h}, \quad f_0 = c_0, \quad f_n = c_1,$$

te za $1 = 1, \dots, n-1$:

$$w_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i)}{2h}, \quad u_i = q(x_i) - \frac{2}{h^2}, \quad v_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h} \quad f_i = f(x_i).$$

Tada sustav linearnih jednadžbi možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} u_0 y_0 + v_0 y_1 &= f_0 \\ w_i y_{i-1} + u_i y_i + v_i y_{i+1} &= f_i, \qquad i = 1, \dots, n-1, \\ w_n y_{n-1} + u_n y_n &= f_n \end{aligned}$$

odnosno u matričnom obliku

$$M\mathbf{y} = \mathbf{f},$$

gdje je

$$M = \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & u_1 & v_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & u_2 & v_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & u_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-2} & v_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & w_{n-1} & u_{n-1} & v_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & w_n & u_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Ako je matrica sustava $M = [m_{i,j}]$ regularna, tada je rješenje sustava jedinstveno. Dovoljan (ali ne i nužan) uvjet za regularnost matrice M jest da je ta matrica striktno dijagonalno dominantna, tj. da vrijedi

$$|m_{i,1}| + |m_{i,2}| + \cdots + |m_{i,i-1}| + |m_{i,i+1}| + \cdots + |m_{i,n}| < |m_{i,i}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

To u našem slučaju trodijagonalne matrice M znači

$$|v_0| < |u_0|, \quad |w_n| < |u_n|, \quad |v_i| + |w_i| < |u_i|, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Primjer 6.3.1. Metodom konačnih diferencija riješiti rubni problem

$$y'' + y = x, \quad y(0) = 1, \quad y\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2} - 1$$

na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ dijeleći ga na pet dijelova. Vrijednosti u čvorovima usporediti sa stvarnim vrijednostima.

Rješenje.

Za $n = 5$ duljina koraka iznosi $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{5} = \frac{\pi}{10}$, pa su čvorovi

$$x_0 = 0, \quad x_i = x_0 + ih = \frac{\pi}{10} i, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Zapišemo li zadanu diferencijalnu jednadžbu u obliku (30), imamo

$$p(x) = 0, \quad q(x) = 1, \quad f(x) = x, \quad x \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big],$$

te

$$a_0 = a_1 = c_0 = 1, \quad b_0 = b_1 = 0, \quad c_1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Stoga je

$$u_0 = a_0 - \frac{b_0}{h} = 1, \quad v_0 = \frac{b_0}{h} = 0, \quad w_5 = -\frac{b_1}{h} = 0, \quad u_5 = a_1 + \frac{b_1}{h} = 1,$$
$$f_0 = c_0 = 1, \quad f_5 = c_1 = \frac{\pi}{2} - 1,$$

te za $1 = 1, \dots, 4:$

$$w_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i)}{2h} = \frac{1}{h^2} = \frac{100}{\pi^2}, \quad u_i = q(x_i) - \frac{2}{h^2} = 1 - \frac{2}{h^2} = 1 - \frac{200}{\pi^2},$$
$$v_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h} = \frac{1}{h^2} = \frac{100}{\pi^2}, \quad f_i = f(x_i) = x_i = \frac{\pi}{10} i.$$

Potrebno je riješiti sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} u_0 y_0 + v_0 y_1 &= f_0 \\ w_i y_{i-1} + u_i y_i + v_i y_{i+1} &= f_i, \qquad i = 1, \dots, n-1, \\ w_n y_{n-1} + u_n y_n &= f_n \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ \frac{100}{\pi^2} y_{i-1} + \Big(1 - \frac{200}{\pi^2}\Big) y_i + \frac{100}{\pi^2} y_{i+1} &= \frac{\pi}{10} i, \qquad i = 1, \dots, 4. \\ y_5 &= \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Sustav se može zapisati u obliku

$$\begin{aligned}
\Big(1-\frac{200}{\pi^2}\Big)y_1+\frac{100}{\pi^2}y_2 &= \frac{\pi}{10}-\frac{100}{\pi^2}\\
\frac{100}{\pi^2}y_1+\Big(1-\frac{200}{\pi^2}\Big)y_2+\frac{100}{\pi^2}y_3 &= \frac{\pi}{5}\\
\frac{100}{\pi^2}y_2+\Big(1-\frac{200}{\pi^2}\Big)y_3+\frac{100}{\pi^2}y_4 &= \frac{3\pi}{10}\\
\frac{100}{\pi^2}y_3+\Big(1-\frac{200}{\pi^2}\Big)y_4 &= \frac{2\pi}{5}-\frac{100}{\pi^2}\Big(\frac{\pi}{2}-1\Big)
\end{aligned}$$

pri čemu smo uvažili da je $y_0 = 1$ i $y_5 = \frac{\pi}{2} - 1$.

Egzaktno rješenje ovog rubnog problema je funkcija $y(x) = \cos x - \sin x + x$. Rješenje sustava linearnih jednadžbi i stvarne vrijednosti u zadanim čvorovima prikazani su u tablici

i	x_i	y_i	$y(x_i)$
0	0	1	1
1	0.31416	0.95735	0.95620
2	0.62832	0.85091	0.84956
3	0.94248	0.72224	0.72125
4	1.25664	0.61507	0.61460
5	1.57080	0.57080	0.57080

.

Primjer 6.3.2. Metodom konačnih diferencija riješiti rubni problem

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0$$

na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ dijeleći ga na osam dijelova. Vrijednosti u čvorovima usporediti sa stvarnim vrijednostima.

Rješenje.

Za $n = 8$ duljina koraka iznosi $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{8} = \frac{\pi}{16}$, pa su čvorovi

$$x_0 = 0, \quad x_i = x_0 + ih = \frac{\pi}{16}i, \qquad i = 1, \ldots, 8.$$

Zapišemo li zadanu diferencijalnu jednadžbu u obliku (30), imamo

$$p(x) = 0, \quad q(x) = 1, \quad f(x) = 0, \quad x \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big],$$

te

$$a_0 = a_1 = c_0 = 1, \quad b_0 = b_1 = c_1 = 0.$$

Stoga je

$$u_0 = a_0 - \frac{b_0}{h} = 1, \quad v_0 = \frac{b_0}{h} = 0, \quad w_8 = -\frac{b_1}{h} = 0, \quad u_8 = a_1 + \frac{b_1}{h} = 1,$$
$$f_0 = c_0 = 1, \quad f_8 = c_1 = 0,$$

te za $1 = 1, \ldots, 7$:

$$w_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i)}{2h} = \frac{1}{h^2} = \frac{256}{\pi^2}, \quad u_i = q(x_i) - \frac{2}{h^2} = 1 - \frac{2}{h^2} = 1 - \frac{512}{\pi^2},$$
$$v_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h} = \frac{1}{h^2} = \frac{256}{\pi^2}, \quad f_i = f(x_i) = 0.$$

Potrebno je riješiti sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} u_0 y_0 + v_0 y_1 &= f_0 \\ w_i y_{i-1} + u_i y_i + v_i y_{i+1} &= f_i, \qquad i = 1, \ldots, n-1, \\ w_n y_{n-1} + u_n y_n &= f_n \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ \frac{256}{\pi^2} y_{i-1} + \left(1 - \frac{512}{\pi^2}\right) y_i + \frac{256}{\pi^2} y_{i+1} &= 0, \qquad i = 1, \ldots, 7. \\ y_8 &= 0. \end{aligned}$$

Sustav se može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{512}{\pi^2}\right) y_1 + \frac{256}{\pi^2} y_2 &= -\frac{256}{\pi^2} \\ \frac{256}{\pi^2} y_1 + \left(1 - \frac{512}{\pi^2}\right) y_2 + \frac{256}{\pi^2} y_3 &= 0 \\ \frac{256}{\pi^2} y_2 + \left(1 - \frac{512}{\pi^2}\right) y_3 + \frac{256}{\pi^2} y_4 &= 0 \\ \frac{256}{\pi^2} y_3 + \left(1 - \frac{512}{\pi^2}\right) y_4 + \frac{256}{\pi^2} y_5 &= 0 \\ \frac{256}{\pi^2} y_4 + \left(1 - \frac{512}{\pi^2}\right) y_5 + \frac{256}{\pi^2} y_6 &= 0 \\ \frac{256}{\pi^2} y_5 + \left(1 - \frac{512}{\pi^2}\right) y_6 + \frac{256}{\pi^2} y_7 &= 0 \\ \frac{256}{\pi^2} y_6 + \left(1 - \frac{512}{\pi^2}\right) y_7 &= 0 \end{aligned}$$

pri čemu smo uvažili da je $y_0 = 1$ i $y_8 = 0$.

Egzaktno rješenje ovog rubnog problema je funkcija $y(x) = \cos x$. Rješenje sustava linearnih jednadžbi i stvarne vrijednosti u zadanim čvorovima prikazani su u tablici

i	x_i	y_i	$y(x_i)$
0	0	1	1
1	0.1963495	0.9812186	0.9807853
2	0.3926991	0.9246082	0.9238795
3	0.5890486	0.8323512	0.8314696
4	0.7853982	0.7080045	0.7071068
5	0.9817477	0.5563620	0.5555702
6	1.1780972	0.3832699	0.3826834
7	1.3744468	0.1954016	0.1950903
8	1.5707963	0	0

.

Literatura

[1] K.E. Atkinson: An Introduction to Numerical Analysis, Wiley, 1978.

[2] T. Bradić, R. Roki, J. Pečarić, M. Strunje: Matematika za tehnološke fakultete, Multigraf, Zagreb, 1994.

[3] B.P. Demidovič i suradnici: Zadaci i riješeni primjeri iz matematičke analize za tehničke fakultete, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 1998.

[4] C.F. Gerald, P.O. Wheatley, Applied Numerical Analysis, 5th Ed., Addison-Wesley, 1994.

[5] I. Ivanšić: Numerička matematika, Element, Zagreb, 1998.

[6] S.R.K. Iyengar, R.K. Jain: Numerical Methods, New Age International (P) Ltd., Publishers, New Delhi, 2009.

[7] P. Javor: Matematička analiza 1, Element, Zagreb, 1999.

[8] P. Javor: Matematička analiza 2, Element, Zagreb, 2000.

[9] E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, John Wiley and Sons, Boston, 2006.

[10] S. Kurepa: Matematička analiza 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1987.

[11] S. Mardešić: Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, Prvi dio, Školska knjiga, Zagreb, 1988.

[12] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri: Numerical Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.

[13] R. Scitovski: Numerička matematika, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, Grafika d.o.o., Osijek, 2004.

[14] D. Veljan: Matematika 4, Školska knjiga, Zagreb, 1997.