Osječki matematički list 22 (2022), 131–141

Radionica „Plohe od sapunice“

Ivana Filipan,[*] Ema Jurkin,[†] Željka Milin Šipuš,[‡] Ljiljana Primorac Gajčić[§]

Sažetak

U radu je opisana radionica pod nazivom „Plohe od sapunice“ koja je održana na Rudarsko-geološko-naftnom fakultetu u Zagrebu u sklopu projekta *Večer matematike 2021*. Na radionici su promatrani, te matematički opisani mjehurići i plohe od sapunice. Dobiveni oblici se mogu shvatiti kao rješenja izoperimetrijskog problema, tj. problema određivanja plohe najmanje površine sa zadanim rubom, odnosno određivanja zatvorene plohe najmanje površine koja omeđuje zadani volumen. Na radionici je promatran i specijalan slučaj izoperimetrijskog problema — *Steinerov problem*, tj. problem pronalaska najkraćeg puta između različitih točaka u ravnini i prostoru. Sudionici radionice su pomoću pribora i sapunice pronalazili rješenja predstavljenih problema te dobivali poznate minimalne plohe kao što su katenoid, helikoid, te Scherkova ploha.

Ključne riječi: *plohe od sapunice, izoperimetrijski problem, Steinerov problem*

[*]Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Sveučilište u Zagrebu,
email: ivana.filipan@rgn.hr

[†]Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Sveučilište u Zagrebu,
email: ema.jurkin@rgn.unizg.hr

[‡]Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu,
email: zeljka.milin.sipus@math.hr

[§]Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku,
email: lprimora@mathos.hr

Ivana Filipan, Ema Jurkin, Željka Milin Šipuš, Ljiljana Primorac Gajčić

Workshop “Soap film surfaces”

Abstract

In this work we present the workshop "Soap film surfaces" that was organized at the Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering in Zagreb as a part of the project *Mathematical evening 2021*. At this workshop, soap films and soap bubbles were analyzed and mathematically described. Obtained forms can be considered as solutions to an isoperimetric problem, i.e. problem of finding a surface of the largest possible area whose boundaries are prescribed, respectively finding a closed surface of the smallest possible area whose volume is prescribed. Another special type of isoperimetric problem is also considered — the *Steiner problem*, i.e. problem of finding the shortest path between points in the plane or space. Participants of the workshop were able to find solutions to the presented problems by using the given equipment and soap water, and they obtained famous minimal surfaces such as catenoid, helicoid, the Scherk surface and other.

Keywords: *soap film surfaces, isoperimetric problem, Steiner problem*

1 Uvod

Jedan od osnovnih zadataka matematičkog obrazovanja koje susrećemo još od najranijeg školovanja su problemi s ekstremima. Već u osnovnoj školi učenicima se mogu zadati zadaci poput:

Odredite dva prirodna broja kojima je zbroj 8*, a umnožak najveći moguć.*

U ovom radu proučit ćemo specijalne izoperimetrijske probleme za plohe, te Steinerov problem. Izoperimetrijski problem za krivulje sastoji se u tome da se od svih likova zadanog opsega nađe onaj, koji ima najveću površinu, odnosno pitamo se koja glatka jednostavno zatvorena krivulja zadanog opsega omeđuje maksimalnu površinu? Rješenje ovoga problema nazvano je prema kraljici Dido. Dido je bila kći kralja Tyre i prema legendi ona je na vrlo domišljat način osnovala Kartagu. Kada je 814. godine prije Krista stigla na obale Tunisa, zatražila je komad zemlje. Odgovor na njezin zahtjev bio je da će dobiti onoliko zemlje koliko može obuhvatiti kožom jednog bika. Kraljica je bikovu kožu izrezala na uske trake, te ih polagala na zemlju jednu do druge i tim trakama opisala krug, dobivši na taj način najveći mogući komad zemlje. Rješenje problema matematički je dano sljedećim teoremom:

Teorem 1.1 (Izoperimetrijska nejednakost). *Neka je c jednostavno zatvorena krivulja, $l(c)$ njezina duljina, $A(int(c))$ površina njezine unutrašnjosti. Tada je*

$$A(int(c)) \leq \frac{1}{4\pi} l(c)^2,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je c kružnica.

Primjeri zadataka kakvi se mogu susresti u srednjoškolskom obrazovanju vezani za izoperimetrijski problem su:

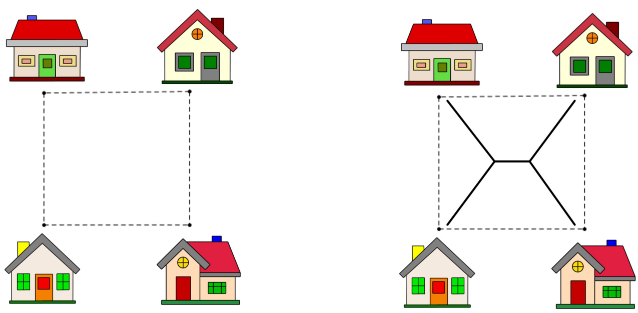
Na velikom polju treba odrediti granice livade pravokutnog oblika kojoj će opseg biti 400 m, *a površina maksimalna.*

Na velikom polju treba odrediti granice livade pravokutnog oblika zadane površine od $100\,\mathrm{m}^2$ *i minimalnog opsega.*

Ovakvi problemi se tada rješavaju primjenom diferencijalnog računa, odnosno primjenom derivacija funkcije jedne varijable.

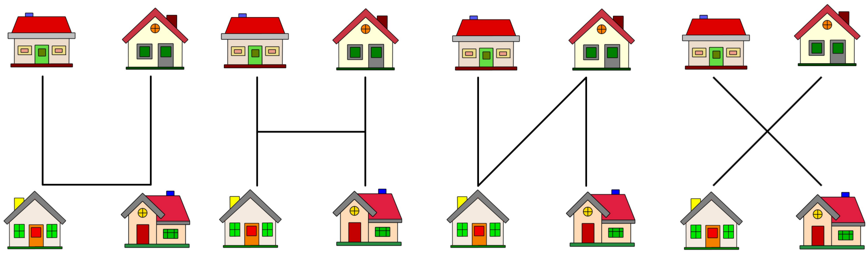
Još jedan primjer problema s ekstremima je Steinerov problem, odnosno problem pronalaska najkraćeg puta između različitih točaka u ravnini i prostoru. Takav problem odnosi se na zadatke poput:

Četiri kuće su smještene u vrhove kvadrata duljine stranice 1 km. *Susjedi žele spojiti svoje kuće cestom najkraće duljine (vidi sliku 1 lijevo). Koja je to cesta?*



Slika 1. Slika lijevo: Koja je najkraća cesta između kuća?
Slika desno: Najkraća cesta između kuća iznosi $1 + \sqrt{3} \approx 2.7$.

Nekoliko mogućih povezivanja prikazana su na slici 2, a rješenje problema nalazi se na slici 1 desno. Steinerov problem predstavlja ozbiljan optimizacijski problem i određivanje njegovog rješenja je zahtjevan postupak, ali kako će biti pokazano u nastavku, uz pomoć sapunice, možemo vrlo brzo doći do rješenja.



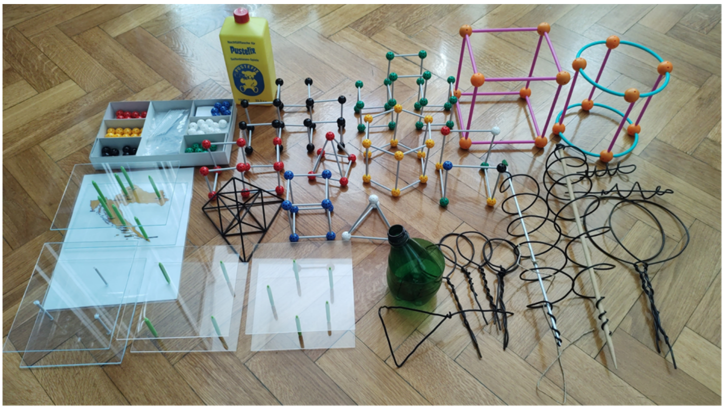
Slika 2. Redom duljine ceste s lijeva na desno su: 3, 3, $2 + \sqrt{2} \approx 3.41$, $2\sqrt{2} \approx 2.83$

1.1 Plohe konstantne srednje zakrivljenosti

Promotrimo sad izoperimetrijski problem u prostoru. U tu svrhu najprije spomenimo pojam ploha konstantne srednje zakrivljenosti. Prvi zapisi u kojima se počinje razvijati teorija takvih ploha pojavljuju se u 18. stoljeću. Od tada pa sve do danas plohe konstantne srednje zakrivljenosti važna su klasa ploha i intenzivno područje istraživanja u klasičnoj diferencijalnoj geometriji. Kako je za matematičko definiranje ovakvih ploha potrebno poznavati osnove diferencijalne geometrije, ovdje izostavljamo njihovu matematičku definiciju te predstavljamo samo njihovu fizikalnu interpretaciju. Takve plohe dijelimo na dvije temeljne potklase tzv. minimalne i CMC (eng. constant mean curvature) plohe (plohe konstantne srednje zakrivljenosti). Obje se potklase realiziraju kao lokalna rješenja izoperimetrijskih problema, minimalne plohe kao plohe najmanje površine sa zadanim rubom, a CMC plohe kao plohe najmanje površine zadanog volumena. U prirodi se rješenja ovakvih problema realiziraju kao plohe od sapunice, tzv. *soap films* i *soap bubbles*. Temeljna svojstva tih ploha opisane su u monografijama, primjerice Hopfa, Lópeza, Nietzschea i Ossermana (vidi popis citirane literature pod [1, 2, 3, 4]).

2 Više o radionici „Plohe od sapunice"

Na Rudarsko-geološko-naftnom fakultetu u Zagrebu u sklopu projekta *Večer matematike 2021.* koju organizira Hrvatsko matematičko društvo, 2. prosinca održana je radionica pod nazivom „Plohe od sapunice" koju su organizirale prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš, izv. prof. dr. sc. Ema Jurkin, doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić i dr. sc. Ivana Filipan. Potreban pribor za radionicu prikazan je na slici 3.



Slika 3. Potreban pribor

Za radionicu su pripremljena tri radna centra (vidi sliku 4) s različitim zadacima. U prvom radnom centru (slika 4 lijevo) cilj je bio kreirati poznatu Scherkovu plohu te njene generalizacije i rješenje Steinerovog problema u prostoru, tj. problema pronalaska najkraćeg puta između različitih točaka u prostoru. U drugom radnom centru (slika 4 sredina) promatrao se Steinerov problem u ravnini, tj. problem pronalaska najkraćeg puta između različitih točaka u ravnini, a u trećem radnom centru (slika 4 desno) cilj je bio kreirati plohe od raznih žičanih modela, pri čemu su dobivane poznate minimalne plohe, poput helikoida i katenoida.

Slika 4. Radni centri

Na početku radionice autori su održali kratku prezentaciju kojom su sudionike uveli u problematiku te postavili probleme koje bi sudionici trebali riješiti promatrajući dobivene plohe od sapunice. Postavljeni su sljedeći problemi:

- odrediti plohe najmanje površine sa zadanim rubom, tj. krivuljom,
- odrediti zatvorene plohe najmanje površine koje omeđuju zadani volumen, odnosno zadana dva odvojena volumena.

U nastavku su navedeni neki primjeri ploha koje su dobivene, te su navedeni i njihovi matematički opisi.

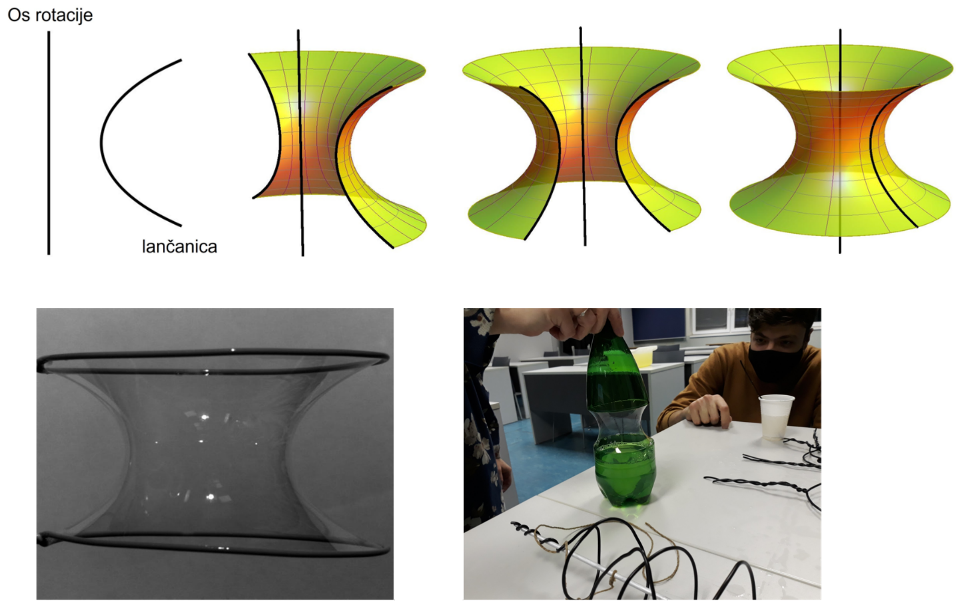
3 Primjeri dobivenih ploha

3.1 Katenoid

Katenoid je rotacijska ploha, tj. ploha koja nastaje rotacijom krivulje (lančanice) $c(v) = \left(a \cosh\left(\frac{v}{c}\right), 0, v\right)$ oko z-osi (vidi sliku 5 gore). Parametarska jednadžba katenoida je

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(a \cos u \cosh\left(\frac{v}{a}\right), a \sin u \cosh\left(\frac{v}{a}\right), v\right), \quad a \in \mathbf{R}\backslash\{0\}.$$

Katenoid je jedina minimalna rotacijska ploha, tj. jedino rješenje izoperimetrijskog problema koje možemo dobiti rotacijom neke krivulje. Na slici 5 dolje prikazani su katenoidi kreirani od sapunice.



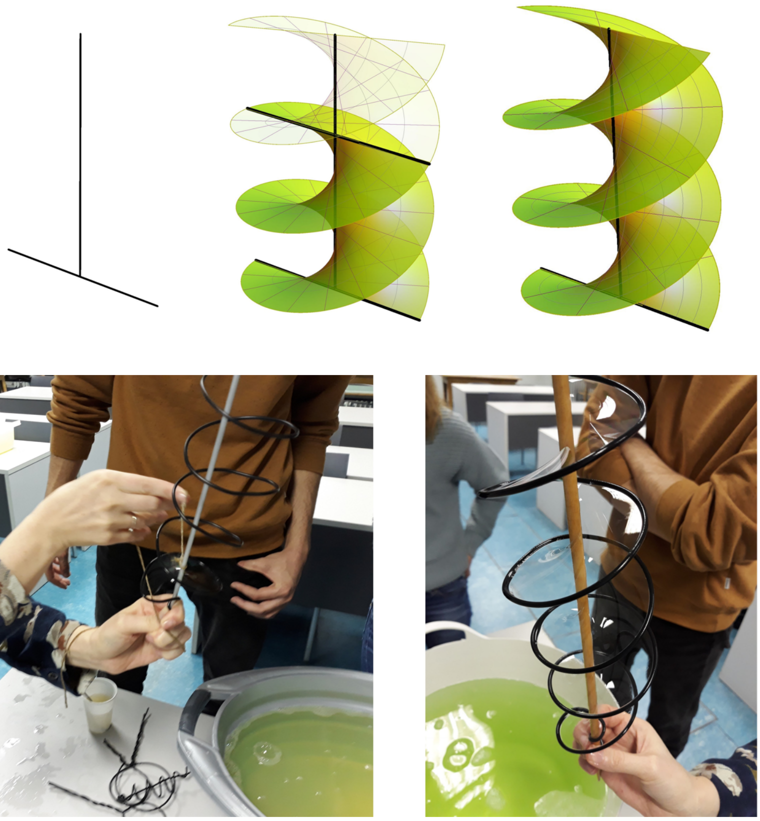
Slika 5. Katenoidi

3.2 Helikoid

Helikoid nastaje istovremenom translacijom i rotacijom pravca (tzv. *zavojnim* (*helikoidnim gibanjem*)) oko fiksnog pravca na kojeg je okomit, pri čemu je brzina translacije proporcionalna brzini rotacije (vidi sliku 6 gore). Kako helikoid nastaje gibanjem pravca duž krivulje (odnosno u ovom slučaju duž pravca) nazivamo ga pravčastom plohom. Njegova parametarska jednadžba je

$$\mathbf{x}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, bu),\ a > 0,\ b \in \mathbf{R}\backslash\{0\}.$$

Helikoid je jedina pravčasta minimalna ploha. Na slici 6 prikazano je nastajanje helikoida i helikoid kreiran od sapunice.



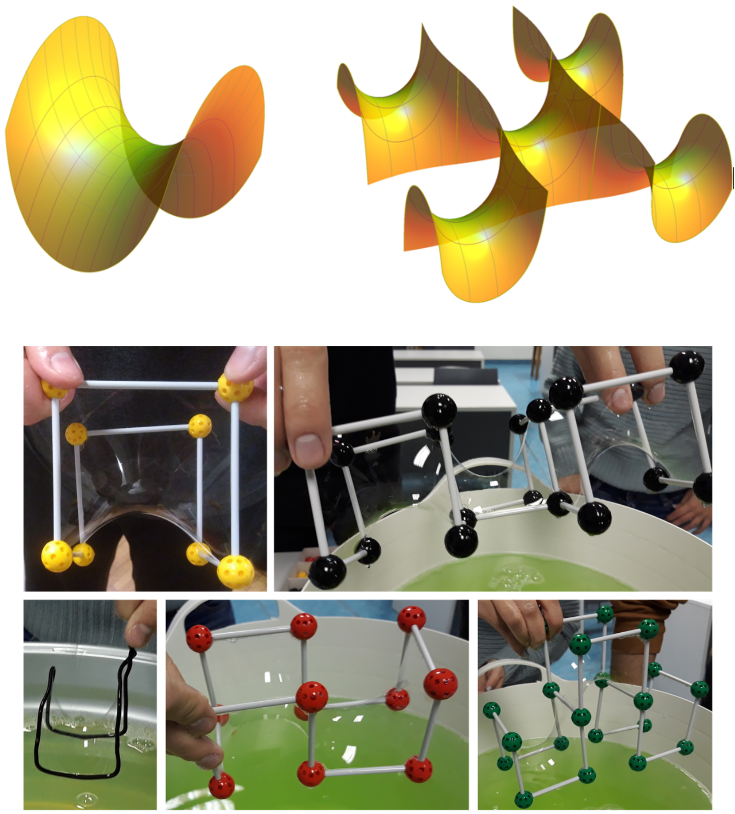
Slika 6. Helikoidi

3.3 Scherkova minimalna ploha

Scherkova ploha je dobila ime po njemačkom matematičaru Heinrichu Ferdinandu Scherku koji ju je otkrio 1834. godine. Scherkove minimalne plohe su prve minimalne plohe otkrivene nakon katenoida i helikoida i zapravo se ne radi o samo jednoj plohi, nego o cijeloj familiji plohā. Prva Scherkova minimalna ploha dana je parametarskom jednadžbom

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u, v, \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\cos au}{\cos av}\right)\right).$$

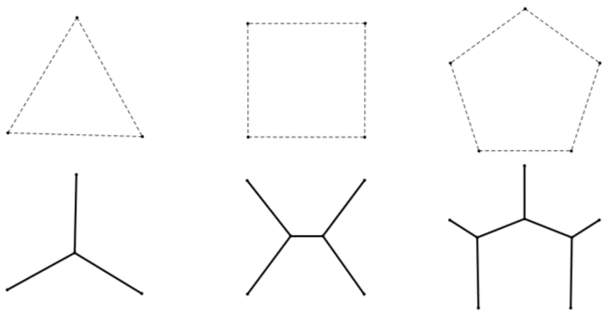
Na slici 7 prikazana je Scherkova ploha i njene generalizacije.



Slika 7. Scherkova ploha i njene generalizacije

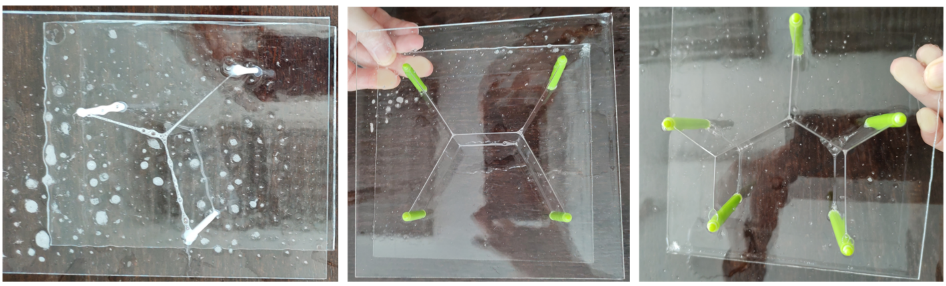
3.4 Steinerov problem

Steinerov problem je klasičan matematički problem kojim se niz matematičara bavio još od 17. stoljeća. Problem se sastoji u određivanju točaka u ravnini zadanog mnogokuta tako da zbroj udaljenosti točaka od vrhova mnogokuta bude najmanji moguć (slika 8).



Slika 8. Steinerov problem za stranice mnogokuta duljine 1 su redom $L \approx 1.732$, $L \approx 2.732$, $L \approx 3.891$

Na slici 9 prikazano je rješenje Steinerovog problema uz pomoć sapunice. Koliko je rješenje uz pomoć sapunice točno može se jednostavno provjeriti usporedimo li sredinu slike 9 i rješenje problema najkraćeg puta između kuća na slici 1 desno.

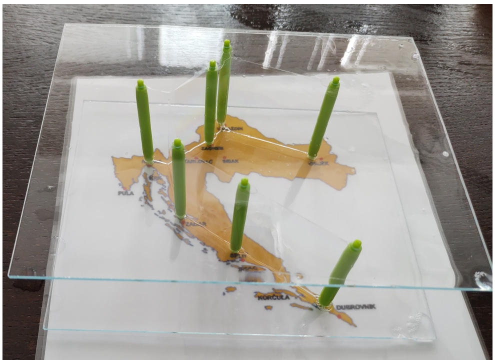


Slika 9. Rješenje Steinerov problem od sapunice

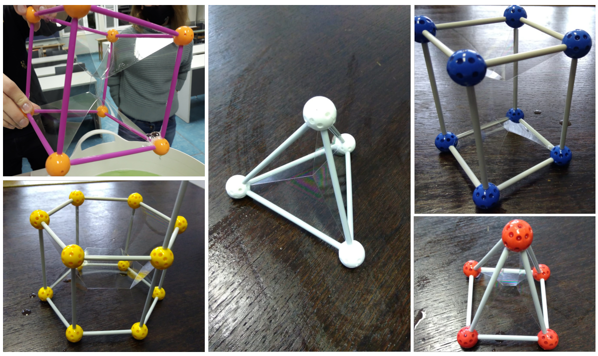
Na slici 10 prikazan je najkraći put između najvećih gradova u Hrvatskoj: Osijeka, Varaždina, Zagreba, Rijeke, Zadra, Splita i Dubrovnika.

Steinerov problem u prostoru sastoji se u određivanju najkraćeg puta između različiti točaka u prostoru. Na slici 11 prikazano je rješenje Steinerovog problem u prostoru uz pomoć sapunice.

Na održanoj radionici, sudionici su se bez sumnje i zabavili, što je vidljivo na slici 12.



Slika 10. Najkraći put između velikih gradova u Hrvatskoj od sapunice



Slika 11. Rješenje Steinerovog problema u prostoru

Slika 12. ‚Trampolin', ‚tenis' i još jedan primjer plohe od sapunice

Literatura

[1] H. Hopf, *Differential Geometry in the Large Lecture*, Notes in Mathematics, Berlin, Springer, 1983.

[2] R. López, *Constant mean curvature surfaces with boundary*, Berlin, Springer, 2013.

[3] J. C. C. Nietzsche, *Lectures on minimal surfaces*, Cambridge, Cambridge University Press, 1989.

[4] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, New York, Dover, 1986.