O glatkoći rješenja konstruktorskih problema i fizičkoj interpretaciji slabe formulacije

Dvornik, Josip; Lazarević, Damir; Fresl, Krešimir; Jaguljnjak Lazarević, Antonia

Source / Izvornik: **Građevinar, 2019, 71, 187 - 195**

Journal article, Published version
Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

https://doi.org/10.14256/JCE.2583.2018

Primljen / Received: 13.12.2018.
Ispravljen / Corrected: 8.2.2019.
Prihvaćen / Accepted: 15.2.2019.
Dostupno online / Available online: 25.3.2019.

O glatkoći rješenja konstruktorskih problema i fizičkoj interpretaciji slabe formulacije

Autori:

Prof.emer.dr.sc. **Josip Dvornik**, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet
dvornik@grad.hr

Prof.dr.sc. **Damir Lazarević**, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet
damir@grad.hr

Prof.dr.sc. **Krešimir Fresl**, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet
fresl@grad.hr

Doc.dr.sc. **Antonia Jaguljnjak Lazarević**, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Zagrebu
Rudarsko-geološko-naftni fakultet
ajagu@rgn.hr

Pregledni rad

Josip Dvornik, Damir Lazarević, Krešimir Fresl, Antonia Jaguljnjak Lazarević

O glatkoći rješenja konstruktorskih problema i fizičkoj interpretaciji slabe formulacije

U radu su na više interpretativan nego na formalan način svrstana i opisana tipična rješenja modela konstrukcije, s posebnim osvrtom na slabu formulaciju i njezino fizičko tumačenje, koje prema našemu mišljenju nedostaje u literaturi. Upozoreno je i na pogreške u približenju radi ustrajavanja na pretjeranoj glatkoći rješenja. Razmišljanja su potkrijepljena primjerima. Nadamo se da rad može pridonijeti shvaćanju biti aproksimacije praktičnih modela u građevinarstvu i zorno predočiti snagu slabe formulacije - temelja približnih postupaka proračuna.

Ključne riječi:
model konstrukcije, jaka formulacija, slaba formulacija, rezidual, singularna točka, diskontinuitet

Subject review

Josip Dvornik, Damir Lazarević, Krešimir Fresl, Antonia Jaguljnjak Lazarević

On smoothness of solutions to structural problems and physical interpretation of weak formulation

Typical structural modelling solutions are classified and described in the paper based on an approach that is more interpretative than formal. A special emphasis is placed on weak formulation and its physical interpretation which, in the authors' opinion, is lacking in the literature. The attention is also drawn to approximation errors, caused by insisting on excessive smoothness of solutions. These considerations are backed by examples. It is hoped that the paper will contribute to the understanding of the essence of approximation of practical models in civil engineering, while clearly demonstrating the power of weak formulation - the foundation of approximation procedures.

Key words:
structural model, strong formulation, weak formulation, residual, singular point, discontinuity

Übersichtsarbeit

Josip Dvornik, Damir Lazarević, Krešimir Fresl, Antonia Jaguljnjak Lazarević

Glatte Lösungen bei Konstruktionsproblemen und physische Interpretation schwacher Formulierungen

In der Abhandlung wurden auf eine mehr interpretative als formale Art und Weise die typischen Lösungen des Konstruktionsmodells eingeordnet und beschrieben, unter besonderer Berücksichtigung der schwachen Formulierung sowie deren physische Auslegung, die unserer Meinung nach in der Literatur fehlt. Hingewiesen wird auch auf die Fehler bei der Annäherung, um auf einer übertrieben glatten Lösung zu bestehen. Die Überlegungen werden durch Beispiele untermauert. Wir hoffen, dass die Abhandlung dem Verständnis des Kerns der Approximation der praktischen Modelle im Bauwesen beitragen und die Stärke der schwachen Formulierung – Grundlage der ungefähren Berechnungsverfahren anschaulich darlegen kann.

Schlüsselwörter:
Konstruktionsmodell, starke Formulierung, schwache Formulierung, Residuum, Singularpunkt, Diskontinuität

1. Uvod

Poznato je da diferencijalne jednadžbe linearnih matematičkih modela temeljenih na metodi pomaka simbolički možemo zapisati u obliku

$$\mathcal{K}\vec{u} = \vec{f} \tag{1}$$

gdje je $\mathcal{K}$ diferencijalni izraz koji djeluje na traženo vektorsko polje pomaka $\vec{u}$. Rezultat djelovanja jednak je zadanom vektorskom polju opterećenja $\vec{f}$, jer jednadžba predstavlja uvjete ravnoteže. Uz diferencijalnu jednadžbu, rješenje treba ispuniti i rubne uvjete po pomacima. Strogo teorijski, postoji samo jedno (egzaktno) rješenje problema [1, 2]. Srećom, za inženjerske potrebe možemo odrediti dobra približna rješenja [3, 4]. Štoviše, ima ih beskonačno mnogo. Prijeđimo postupno od egzaktnoga prema slabom rješenju, onomu koje donosi niz prednosti.

2. Jako rješenje

Naslov upućuje: takvo rješenje (ako postoji) ispunjava jaku formulaciju - diferencijalnu jednadžbu i rubne uvjete. Rezultate možemo tražiti u svim ili u dovoljnom broju točaka područja. Pomaci su egzaktni, u prvom slučaju najčešće izraženi formulom, a u drugom skupom funkcijskih vrijednosti.

Skup možemo odrediti na dva načina. Prvo analitički, uvrštavanjem ulaznih podataka iz točaka područja u zatvoreno rješenje, jer je presloženo da bismo ga izrazili formulom [5]. Drugo, možemo ga odrediti i numerički, ako diskretne vrijednosti nije moguće dobiti izravno, nego ih moramo proračunati (primjerice iteracijski, na proizvoljnu točnost). To nazivamo približno jakim rješenjem (odjeljak 4). Kroz takav, analitički ili numerički određen "oblak" točaka, ponekad možemo provući polinom ili sličnu funkciju, pa i njega prikažemo formulom. Za razliku od egzaktne, ona vrijedi samo u određenim točkama. Kada bi obje formule vrijedile u svim točkama područja, morale bi se podudarati, jer je egzaktno rješenje linearnoga modela jedinstveno. Iz ovoga kratkog opisa uočavamo: egzaktno rješenje jest jako, ali jako rješenje može biti približno.

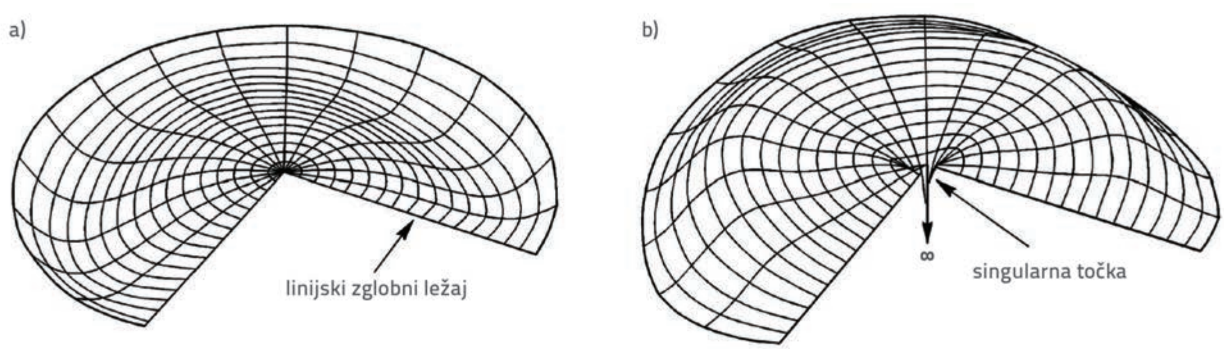
U nekim jednostavnim i "pitomim" slučajevima jako rješenje određujemo izravno, rješavanjem diferencijalne jednadžbe. Takve, najčešće vrlo idealizirane primjere, nazivamo glatkima. Pripada im područje jednoličnih svojstava, bez konkavnih lomova ruba, uglavnom konstantnih rubnih uvjeta i opterećenja opisanoga glatkom ili po dijelovima glatkom funkcijom. Tipičan primjer čini kružna, zglobno oslonjena ploča konstantnih svojstava i opterećenja. Rješenje, koje možemo zvati i pitomim, prilično je glatka, istaknuli smo, formulom ili skupom podataka određena funkcija koja ispunjava (1). Ili drugačije: egzaktnom rješenju pripada neuravnoteženo opterećenje, rezidual, jednak nul-vektoru: $\vec{r} = \vec{f} - \mathcal{K}\vec{u} = \vec{0}$. Za nedeformirano stanje vrijedi $\vec{u} = \vec{0}$ i $\vec{r} = \vec{f}$, odnosno rezidual je jednak opterećenju.

Matematički, navedeni uvjeti nisu ni nužni niti dovoljni za dobivanje glatkoga rješenja. Ipak, čisto iskustveno, ispunjenje takvih zahtjeva višestruko povećava vjerojatnost njegova nalaženja. Budući da uvjeti glatkoće nisu dovoljni, možemo ih ispuniti, a ne pronaći jako rješenje. Nisu niti nužni, pa premda ih nismo ispunili, pronađemo jako rješenje. Tipičan je primjer potonjeg slučaja model koji sadrži diskontinuitete i točke s raznim oblicima singulariteta. Zajedno s pripadajućim rješenjem zvat ćemo ga jakim s iznimkama.

3. Jako rješenje s iznimkama

Ovo je rješenje posvuda glatko, osim u konačnom broju točaka gdje vrijednosti pomaka, kutova zaokreta, deformacija i/ili naprezanja teže prema neizmjernom. To su točke konkavnoga loma područja, hvatišta koncentriranih sila ili momenata, mjesta skokovite promjene debljine, modula elastičnosti, rubnih uvjeta i slično. Fizički, riječ je o područjima koncentracije naprezanja. U singularnoj točki diferencijalna jednadžba i/ili njezine pretpostavke nisu ispunjeni. Na tom mjestu polje pomaka često nije ni dovoljno puta derivabilno da bismo ga uvrstili u diferencijalnu jednadžbu.

Jednostavan je primjer zglobno oslonjena ploča, oblika tri četvrtine kruga, konstantnih svojstava (slika 1.). Na slici 1.a prikazana je moguća progibna ploha kao jedno rješenje, a na slici 1.b pripadajuće opterećenje, određeno obratnim postupkom. U točki konkavnoga loma derivacije polja pomaka (unutarnje sile i opterećenje) teže prema neizmjernom. Izuzevši singularnu točku, takvo je rješenje poput jakoga ili približno jakog; ispunjava jednadžbe rubnog problema.



Slika 1. Zglobno oslonjena ploča: a) moguća progibna ploha; b) pripadajuće opterećenje

Matematička točnost rješenja ne jamči njegovu fizičku korektnost. Često postoje (obično mali) dijelovi područja u kojima postoje proturječja: rješenje diferencijalne jednadžbe jest točno, ali su narušene pretpostavke nužne za njezinu tvorbu. Primjerice, geometrijskom linearizacijom pretpostavimo male pomake i deformacije, a rješenje ponegdje poprima prevelike ili beskonačnu vrijednost. Ili smo zamislili neograničeno važenje Hookeova zakona, a računske deformacije i naprezanja ulaze u plastično područje modela materijala. Proturječna područja najčešće su u okolini singularnih točaka, ali mogu biti i podalje, čak i u pitomim primjerima. Premašenje Hookeova zakona može biti na posve glatkom mjestu.
Osim područja rasprostiranja i utjecaj je ovih poremećaja ograničen. Prema Saint - Venantovu načelu, ima značajan lokalni, a zanemariv globalni učinak na dobivena polja. Konstruktori smiju primijeniti takva rješenja, ali moraju biti svjesni posljedica i provesti dodatne lokalne provjere, popravke dobivenih vrijednosti, preciznije modeliranje na mjestu singulariteta, zaobljenje konkavnog loma, a često uvesti i konstruktivne mjere (ojačanja, ukrućenja i vute) u okolini takvih točaka.
Mnoga jaka rješenja (klasična i s iznimkama) možemo generirati obratnim ili poluobratnim postupkom [6]. Tako određena, obično nemaju praktičnu ili teorijsku vrijednost, ali služe za provjeru numeričkih postupaka.

4. Približno jako rješenje

Ovo rješenje, označimo ga s $\vec{u}_p$, približno ispunjava diferencijalnu jednadžbu i rubne uvjete u svakoj točki područja:

$$\mathcal{K}\vec{u}_p \approx \vec{f} \tag{2}$$

Ako uvrštavamo $\vec{u}_p$ u jaku formulaciju, moramo postaviti dva pitanja. Prvo: Je li približno rješenje dovoljno puta derivabilno da bismo ga mogli uvrstiti u jednadžbu? I drugo: Ako jest, je li jednadžba približno ispunjena? Drugo pitanje ima smisla samo ako je odgovor na prvo potvrdan, jer kod numeričkoga rješenja definiranog nizom diskretnih vrijednosti ne možemo raspravljati o derivabilnosti. Ako smo rješenje uspjeli uvrstiti u jednadžbu, valjanost ocijenimo rezidualom

$$\vec{r} = \vec{f} - \mathcal{K}\vec{u}_p \neq \vec{0} \tag{3}$$

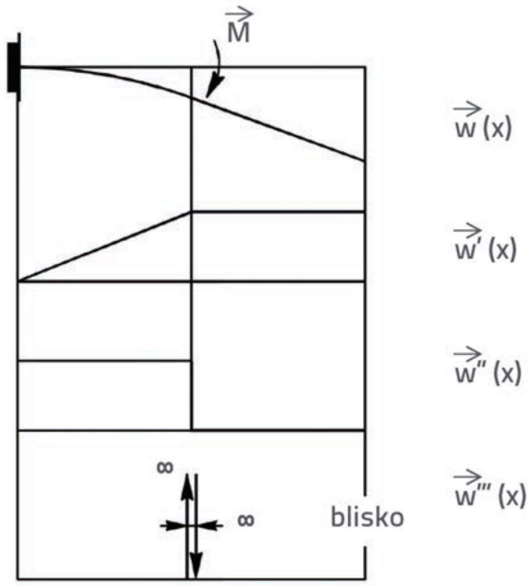
jer zbog približne naravi $\vec{u}_p$ dio opterećenja nije uravnotežen. Primijenimo li na $\vec{u}_p$ obratni postupak, imamo $\mathcal{K}\vec{u}_p = \vec{f}_p$, čime dobivamo pripadajuće opterećenje $\vec{f}_p$. Ono se razlikuje od zadanoga. (U protivnom bi $\vec{u}_p$ bilo točno rješenje.) Sada prema (3) rezidual možemo zapisati kao:

$$\vec{r} = \vec{f} - \vec{f}_p \neq \vec{0} \tag{4}$$

Ako je približno rješenje dobro tada je $\vec{r} \approx \vec{0}$, a kao i kod većine aproksimacija, pogreška mora biti manja od kriterija, odnosno $\|\vec{r}\| < \varepsilon$. Premda smo u odjeljku 2 istaknuli - u točkama pitomih primjera približno jako rješenje po volji je blisko jakom - najčešće ga poistovjećujemo s numeričkim rješenjem koje vrlo dobro aproksimira jako.
U posebnim slučajevima, ako točno rješenje leži u prostoru koordinatnih funkcija, numerički pristup ne daje približno jako, nego jako rješenje. Primjerice, ako je egzaktno rješenje polinom, a koordinatne funkcije tvore potpuni skup polinoma, Ritzov postupak [7] daje jako rješenje. Ako egzaktno rješenje nije polinom, ali ga možemo dobro aproksimirati polinomom, dobivamo približno jako rješenje. Možemo ga pronaći i za primjere s iznimkama, ali tada prostor koordinatnih funkcija mora sadržavati singularitete baš na mjestima njihove pojave u točnu rješenju. U praksi rijetko biramo takve funkcije. I metoda konačnih razlika [8] daje približno jako rješenje posvuda, osim u blizini singulariteta i diskontinuiteta. U regularnim točkama točno rješenje možemo razviti u konvergentan Taylorov red, pa konačne razlike dobro aproksimiraju derivacije rješenja. I drugi numerički postupci daju približno jako rješenje, ako je egzaktno rješenje dovoljno (barem po dijelovima) glatka funkcija.
Na žalost, neki numerički postupci često ne nalaze približno jako rješenje pitomih primjera, jer sam postupak generira parazitne diskontinuitete (one koji nisu neizbježni, svojstveni problemu, nego su posljedica izbora numeričkoga postupka). Primjerice, metoda konačnih elemenata [9, 10] često sadrži diskontinuitete na granici dvaju elemenata. Njezine koordinatne funkcije tada možemo smatrati neglatkima.

5. Pretjerano jaki pristup rješenju

Jako rješenje ispunjava i pretjerano jaku formulaciju: ne samo diferencijalnu jednadžbu nego i njezine derivacije, ili više jednadžbi nastalih jednostrukim, pa i višestrukim deriviranjem osnovne jednadžbe. To znači, osim u singularnim točkama, rješenje može imati veću glatkoću od one koja pripada jakom ili približno jakom rješenju. Pomaci imaju više neprekinutih derivacija od potrebnih za uvrštavanje u jednadžbu. To se ponekad nastoji iskoristiti u numeričkim postupcima.
U primjeni na izrazito glatke primjere ovaj pristup doista jamči bolju konvergenciju. Ako je rješenje glatka, analitička funkcija, bez singularnih točaka, ono se čak može beskonačno puta derivirati. Rješavanje vrlo glatkoga problema tada je jednostavno i uz pretjerane pretpostavke točnost jakoga rješenja postižemo manjim brojem nepoznanica.
Međutim, traženje izrazito jakoga rješenja u slučaju iznimnih točaka može stvoriti teškoće. Razlog je jednostavan: deriviranjem jakih rješenja s iznimkama često povećavamo broj diskontinuiteta. Ako postoji prilika za singularitet, ovim će se pristupom sigurno pojaviti (slika 2.). Primjerice, derivacijom jednadžbe ploče koja je djelomice opterećena konstantnim opterećenjem, nastaju novi diskontinuiteti na granici opterećena i neopterećena dijela.



Slika 2. Primjer singularne točke

Izrazito jako rješenje ističemo zbog pokušaja primjene na ubrzanje konvergencije. Jednako dobru aproksimaciju dobivamo uz kraće trajanje proračuna (slabiju diskretizaciju, veće priraste opterećenja ili dulje vremenske korake) ili puno bolju aproksimaciju uz jednaki utrošak vremena.
Istina je, ustrajavanje na pretjeranoj glatkoći ubrzava rješavanje pitomih problema, ali usporava pronalazak rješenja s točkama singulariteta i diskontinuiteta područja ili funkcije koju aproksimiramo. Malo preciznije, problemi kod kojih je Taylorov red konvergentan dobri su kandidati za ubrzanje, a gdje je divergentan ili slabo konvergentan (trebamo velik broj članova za prihvatljivo rješenje), ubrzanje nije moguće. Tada prisiljavanjem na glatkoću radimo štetu.
Primjer pretjerano jakoga pristupa. Kako bismo čitateljima približili težnju za izrazito jakim rješenjem, promotrimo poznatu dinamičku jednadžbu gibanja modela s jednim stupnjem slobode:

$$m\frac{d^2u}{dt^2}+c\frac{du}{dt}+ku=f(t) \tag{5}$$

gdje su m, c i k konstante koje označavaju masu, prigušenje i krutost, u predstavlja pomak, prva i druga derivacija brzinu i ubrzanje, a $f(t)$ funkciju opterećenja. U nelinearnom slučaju i konstante modela mogu biti ovisne, primjerice o vremenu, pomaku i brzini, pa jednadžbu možemo općenito zapisati kao:

$$\frac{d^2u}{dt^2}=g\left(t,u,\frac{du}{dt}\right) \tag{6}$$

gdje je g oznaka funkcije kojom opisujemo istaknute ovisnosti.

Ako su u trenutku $t = t_0$ zadani početni uvjeti

$$u(t)=u_0 \quad \text{i} \quad \frac{du}{dt}(t_0)=\left(\frac{du}{dt}\right)_0 \tag{7}$$

možemo ih uvrstiti u diferencijalnu jednadžbu i odrediti početnu vrijednost druge derivacije:

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_0=\frac{d^2u}{dt^2}(t_0)=g\left(t_0,u_0,\left(\frac{du}{dt}\right)_0\right) \tag{8}$$

Ovo je normalna točnost potrebna za realizaciju postupaka vremenske diskretizacije, primjerice izravne integracije jednadžbe gibanja [11, 12]. Povišenu točnost dobivamo ako lijevu i desnu stranu deriviramo po vremenu i odredimo početne vrijednosti treće i viših derivacija, do proizvoljnog reda, ovisno o željenom stupnju aproksimacije:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)_0=\frac{d^3u}{dt^3}(t_0)=\frac{d}{dt}g\left(t_0,u_0,\left(\frac{du}{dt}\right)_0\right)\\
&\left(\frac{d^4u}{dt^4}\right)_0=\frac{d^4u}{dt^4}(t_0)=\frac{d^2}{dt^2}g\left(t_0,u_0,\left(\frac{du}{dt}\right)_0\right)\\
&\dots\\
&\left(\frac{d^Su}{dt^S}\right)_0=\frac{d^Su}{dt^S}(t_0)=\frac{d^{S-2}}{dt^{S-2}}g\left(t_0,u_0,\left(\frac{du}{dt}\right)_0\right)
\end{aligned} \tag{9}$$

Vrijednosti možemo uvrstiti u Taylorov red:

$$\begin{aligned}
u(t)&=u_0+\left(\frac{du}{dt}\right)_0(t-t_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_0(t-t_0)^2\\
&+\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)_0(t-t_0)^3+\ldots+\frac{1}{s!}\left(\frac{d^su}{dt^s}\right)_0(t-t_0)^s\\
&+\mathcal{O}\left((t-t_0)^{s+1}\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

Ako vrijeme računamo od $t_0 = 0$, prirast $t - t_0$ označimo sa Δt i zanemarimo doprinos preostalih članova reda $\mathcal{O}(\Delta t^{s+1})$, razvoj može poslužiti eksplicitnom algoritmu za numeričko rješavanje jednadžbe gibanja. Rješenje na kraju prvoga koraka (poznavajući početni pomak i derivacije) možemo prikazati u obliku:

$$\begin{aligned}
u(\Delta t)&=u_0+\left(\frac{du}{dt}\right)_0+\Delta t+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_0\Delta t^2\\
&+\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)_0\Delta t^3+\ldots+\frac{1}{s!}\left(\frac{d^su}{dt^s}\right)_0\Delta t^s
\end{aligned} \tag{11}$$

a na kraju n-toga koraka (uz poznato rješenje iz prethodnoga):

$$u(n\Delta t) = u_{n-1} + \left(\frac{du}{dt}\right)_{n-1} + \Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_{n-1} \Delta t^2$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)_{n-1} \Delta t^3 + \ldots + \frac{1}{s!}\left(\frac{d^su}{dt^s}\right)_{n-1} \Delta t^s \tag{12}$$

U izrazito glatkim slučajevima ovaj postupak poboljšava numeričko rješenje, ali uz "jaki" ustupak kojim tražimo postojanje viših derivacija funkcije pomaka, odnosno broja članova reda. A ni fizička interpretacija viših derivacija nije jasna.

6. Slabo rješenje

Nažalost, približno jako rješenje, a posebice jako rješenje nije moguće pronaći za brojne inženjerske probleme, pa je logično postaviti potpitanje: Ako pitanja iz odjeljka 4 nisu ispunjena, je li numeričko rješenje nužno loše? Odgovor je optimističan: nije. Diferencijalna jednadžba i rubni uvjeti ne moraju biti približno ispunjeni u svakoj točki. Dovoljno je da vrijede integralno, po dijelovima područja. Zahtjev $\vec{r} \approx \vec{0}$ koji pripada približno jakom rješenju je prestrog. O jakomu, za koje je $\vec{r} = \vec{0}$ da i ne raspravljamo. Odnosno, ne treba približno ili potpuno ispuniti uvjete ravnoteže u svakoj točki modela. Znamo da konstrukcije nisu osjetljive na lokalna preopterećenja, ako nije riječ o prevelikim vrijednostima (problemima proboja). Primjerice, stalno i pokretno opterećenje na pločama propisujemo jednolikim, premda se mogu pojaviti značajna lokalna premašenja, poput grupiranja namještaja (ormari s knjigama) ili ljudi (prilikom sastanka). I ništa se strašnoga s pločom ne događa. I tu se pojavljuje zgodna zamisao: umjesto točnoga, treba upotrijebiti dobro približno opterećenje.

6.1. Zamisao zamjenjujućega opterećenja

Zamjena je inženjerima toliko prirodna i intuitivna da i ne razmišljaju o posljedicama [13]. Teškoće nastaju prilikom formalne interpretacije na matematičkim modelima. Navedimo zbog toga nekoliko primjera kada, bez rasprave o rezidualima, primjenjujemo zamjenjujuće opterećenje. Pri tome kontinuirano djelovanje zamjenjujemo diskretnim i obratno.
Diferencijalnu jednadžbu štapnoga problema lakše riješimo ako je opterećenje opisano glatkom neprekinutom funkcijom (polinomom ili harmonijskom funkcijom) nego koncentriranim silama i momentima. U propisima, opterećenje pješacima ili vozilima zamjenjujemo kontinuiranim. U grafostatici je obratno: zbog grafičkih konstrukcija kontinuirano opterećenje prikazujemo nizom koncentriranih sila. I pri numeričkom rješavanju problema kontinuirano opterećenje zamjenjujemo diskretnim. Opterećenja u metodi konačnih elemenata završavaju kao sile u čvorovima. Pri laboratorijskim pokusima i probnim opterećenjima, teret realiziramo slojem šljunka, kamenjem, bačvama s vodom, vrećama pijeska, vozilima, a računsko je opterećenje jednoliko.

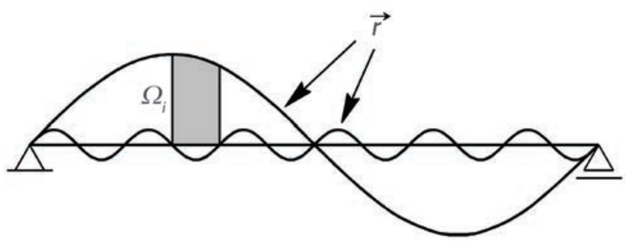
Prema temeljnoj mehanici, opterećenja smatramo sličnima ako se njihove rezultante približno podudaraju. Istoznačno, razlika ukupnih opterećenja - rezidual, približno je jednak nul-funkciji:

$$\int_{\Omega}\left(\vec{f} - \vec{f}_p\right)d\Omega = \int_{\Omega}\vec{r}\,d\Omega \approx \vec{0} \tag{13}$$

Ovaj uvjet očigledno ne znači da je i $\vec{r} \approx \vec{0}$. Rezidual je vektorska funkcija, pa za male vrijednosti na području proračuna nije dovoljno zahtijevati malu rezultantu (integral). Primjerice, rezidual može biti antimetričan (slika 3.). Površine se integracijom poništavaju, rezultanta je jednaka nul-funkciji, a rezidual nije. Nije dovoljan ni zapis (13) u obliku sume po proizvoljno odabranim područjima:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\vec{r}\,d\Omega_i \approx \vec{0} \tag{14}$$

uz $\cup\Omega_i = \Omega$. Time zbroj rezultanata reziduala po područjima mora biti malen, ali neke opet mogu biti značajni nasuprotni vektori koje se u sumi poništavaju. Očigledno nedostaje uvjet: svaka rezultanta mora biti dovoljno mala. Time će i zbroj ostati blizak nul-vektoru, pa će (13) i (14) biti ispunjeni.



Slika 3. Dobra i loša funkcija reziduala

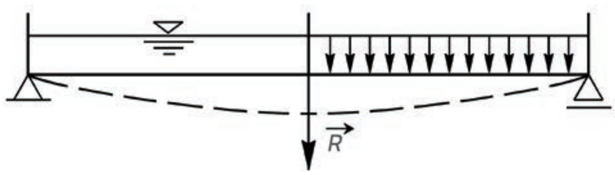
Postoji bitna razlika u odnosu na približno jako rješenje. Posljednjim zahtjevom tražimo malu rezultantu reziduala nad svakim područjem Ω_i, a ne malu ordinatu reziduala u svakoj točki. Time (samo) nad dijelovima područja jamčimo sličnu razdiobu zadanoga i zamjenjujućeg opterećenja, podudaranje rezultanata. Funkcija reziduala koja omogućuje takvo zamjenjujuće opterećenje dodana je na sliku 3. Ovaj pristup rješenju vodi izravno na slabu formulaciju. Istaknimo prije nastavka: jako i približno jako rješenje trivijalno ispunjavaju (13) i (14), jer je rezidual posvuda jednak ili blizak nul-vektoru.

6.2. Slaba formulacija

Formalno razumijevanje prethodnih objašnjenja nije teško, ali, prema našem mišljenju, nedostaje povezivanje s praktičnim primjerima. Zato smo odlučili dodatno sniziti razinu apstrakcije, općenitosti i strogosti, uz pokušaj očuvanja kolike - tolike matematičke korektnosti. Zamisao slabe formulacije pokušali smo pojasniti primjenom triju jednostavnih primjera. Naravno, oni nisu zamjena za teoriju, nego pomažu osvijetliti problematiku s druge, fizičke strane. Nakon ovih razmatranja trebalo bi proučiti osnovnu lemu varijacijskog računa i posljedice njezina uvođenja u postupke proračuna [14-16].

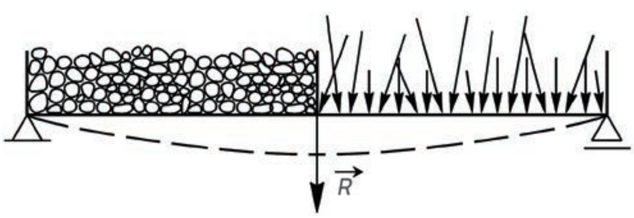
6.2.1. Pokus kao motivacija

Zamislimo jednostavan zadatak: treba ispitati jednoliko opterećenu armiranobetonsku ploču. Kako ostvariti konstantno opterećenje? Sjetili smo se vode kao dobre realizacije jednolikoga djelovanja (slika 4.). Na krutoj, horizontalno položenoj ploči, dubina je vode konstantna, pa je opterećenje u svim točkama jednako. Razmišljajući preciznije, to nije potpuno točno. Progibanjem ploče nastaje promjena dubine i iznosa opterećenja. Ako je ploča pretanka, gipka, mogući su veliki progibi, pa bismo morali uzeti u obzir nelinearnu vezu između pomaka i opterećenja. Čak i uz krutu ploču, realizacija vodom (zbog tvorbe nepropusna bazena) bila bi dosta neprikladna.



Slika 4. Model opterećenja vodom

Umjesto vodom opterećenje lakše realiziramo šljunkom (slika 5.). Doduše, ploču opet treba ograditi, ali nepropusnost nije potrebna, a nanošenje i otklanjanje šljunka lakše je provesti. Ukupne težine materijala i jednolikoga opterećenja (označene s $\vec{R}$) moraju se podudarati. Šljunak treba jednoliko razastrijeti po ploči. Prvim uvjetom ispunjavamo integrale (13) i (14), a drugim dodatni zahtjev o jednakosti opterećenja po manjim područjima. Opterećenje šljunkom mora i oblikovno odgovarati jednolikoj razdiobi.

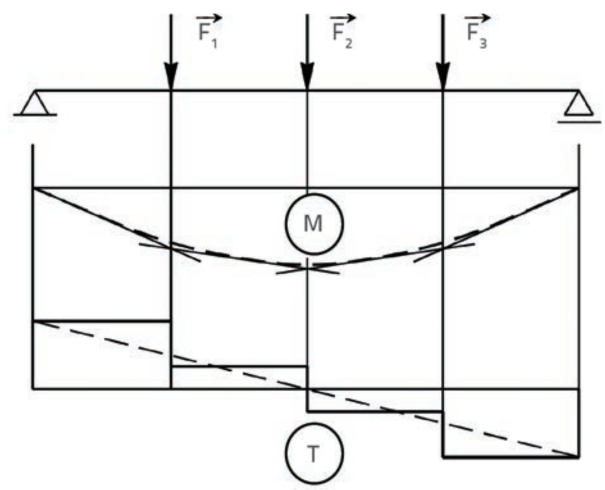


Slika 5. Model opterećenja šljunkom

Fizički razmišljajući, zamjena je vrlo prihvatljiva, a iskustvo i pokusi potvrđuju slutnju. Izmjereni pomaci i deformacije (u granicama točnosti mjerenja) ne ovise o razdiobi opterećenja. Bez obzira na to djeluju li šljunak ili voda, ni vrlo precizni uređaji neće registrirati razliku.

Međutim, opterećenje ploče na razini oblutaka značajno odstupa od jednolikoga pritiska. Riječ je o djelovanju nepravilno raspoređenih kontaktnih naprezanja, koja izrazito osciliraju oko jednolike vrijednosti. Na mjestu dodira oblutaka i ploče opterećenje može biti vrlo veliko, a između kontakata nema ni dodira niti opterećenja. Kada bi ploča i valutice bili neizmjerno kruti (nedeformabilni), kontakt bi djelovao u točki kroz koju prolazi kontaktna sila, a naprezanje toga mjesta težilo bi prema neizmjernom. U slučaju realnih materijala postoji širenje kontaktne plohe. Nastaju kontaktna naprezanja, a dodir se ostvaruje po maloj površini spoja. Zbog međusobnoga podupiranja valutica, naprezanja djeluju pod kutom, jer zbog hrapavosti površine postoji trenje. Tako, nasuprot vodi, ploču osim vertikalnih sila opterećuju i horizontalne sile. U skladu s uvjetima ravnoteže, rezultanta horizontalnih sila jednaka je nuli, a vertikalnih odgovara težini šljunka. Isto vrijedi i za bilo kako izrezani dio ploče. Ako horizontalne sile svodimo na srednju ravninu, po njoj moraju djelovati i koncentrirani momenti, jednaki umnošku horizontalnih sila i polovine debljine ploče, ali i njihova je suma jednaka nuli. Vertikalna kontaktna naprezanja utječu na razdiobu normalnih naprezanja okomitih na ploču, ali nisu mjerodavna za dimenzioniranje i prema teoriji tankih ploča zanemaruju se.

U slučaju velikih dimenzija konstrukcije spram elemenata kojima opterećujemo, možemo primijeniti mnogo grublje zamjenjujuće opterećenje: isticali smo zamjenu kontinuiranoga opterećenja koncentriranim, ali i kamenje, bačve, vozila i slično. Svi tereti prilično odstupaju od jednolikoga, ali su prema rezultatima mjerenja zapravo ekvivalentni. Kod verižnoga poligona jednoliko opterećenje zamjenjujemo nizom koncentriranih sila. Gledajući po točkama to je vrlo loša aproksimacija. U gotovo svim točkama naprezanje je jednako nuli, a u malom broju točaka, gdje djeluju sile, teži prema neizmjernom. Ipak, s povećanjem broja i smanjenjem razmaka koncentriranih djelovanja, aproksimacija unutarnjih sila konvergira prema rješenju za kontinuirano opterećenje. Trivijalan primjer prikazan je na slici 6.



Slika 6. Zamjena kontinuiranoga opterećenja koncentriranim

Vidimo da intuicija daje različite odgovore ako rješavamo apstraktan matematički problem, diferencijalnu jednadžbu ploče, ili provodimo praktičnu realizaciju ispitivanja. A zapravo, riječ je o istoj ploči. Kada razmišljamo o približnom rješavanju jednadžbe, nastojimo ju što bolje ispuniti, pa (matematička) intuicija traži što manje odstupanje zamjenjujućega od zadanog opterećenja. Postizanjem takvog cilja jednadžbu približno ispunimo u svakoj točki, odnosno dobivamo približno jako rješenje. Naprotiv, ako razmišljamo o realnoj ploči, (fizička) intuicija smatra diskontinuirano zamjenjujuće opterećenje potpuno prirodnim. Fizička i matematička intuicija u očitom su proturječju. Iz rezultata pokusa i matematičkih dokaza znamo da je prva dovoljno dobra, a druga suvišna i prestroga.

U smislu jake ili približno jake formulacije, sloj šljunka nije dobra aproksimacija jednolikog opterećenja. Diferencijalna jednadžba vrijedi samo u malom broju slučajnih točaka gdje se vrijednost opterećenja šljunkom skoro ili potpuno podudara s jednolikim opterećenjem. Samo na tim je mjestima rezidual blizak ili jednak nuli. Primijetite nul-točke funkcije reziduala na slici 3.

Srećom, šljunak je poravnan, pa takva funkcija ispunjava i puno blaži, ali dovoljan uvjet: integral reziduala (rezultanta) po bilo kojem komadu ploče vrlo je mali. Pri tome područja moraju nositi dovoljno velik broj valutica da težina šljunka bude bliska rezultanti jednolikoga opterećenja. Osim toga, tada utjecaj slučajnog uklanjanja ili dodavanja nekoliko oblutaka zanemarivo mijenja iznos rezultante. Ako je riječ o vrlo malom komadu, na njega djeluje pritisak samo jednoga ili nijednog oblutka, pa je razlika prema rezultanti konstantnog opterećenja na tako malom odsječku najčešće golema. Tada i promjena broja valutica može bitno utjecati na iznos rezultante. Ipak, komad mora biti dovoljno malen, jer lokalna razdioba opterećenja ne smije bitno utjecati na cijelu ploču. Znači, oblik područja nije važan, ali međuovisnost veličine područja i dimenzije oblutka jest.

Utjecaj nepravilnoga opterećenja odsječka na udaljena područja ploče možemo prema Saint - Venantovu načelu zamijeniti utjecajem jednolikog opterećenja po odsječku. Kada bismo ponovili pokus i ponovo rasprostrli sloj šljunka, kontakti bi se pojavili u posve drugim točkama, a opterećenje bi u smislu jake formulacije bilo različito od staroga. Postoji beskonačno mnogo takvih, ekvivalentnih opterećenja, ali progibi i naprezanja praktično se ne razlikuju. Ako se ponavljaju pokusi sa sve sitnijim šljunkom (a zatim pijeskom i prašinom), broj koncentriranih sila i momenata raste, a međusobni razmaci postaju sve manji. Raste nazubljenost funkcije reziduala, ali joj ekstremne vrijednosti padaju. Pomaci, unutarnje sile i ostale veličine teže prema točnima.

Nakon razmatranja možemo zaključiti: rješenje čija funkcija reziduala ispunjava ove uvjete nazivamo slabim. Riječ "slabo" možda asocira da je takvo rješenje lošije od "jakoga". Vidimo da ipak nije. Čak i ako diferencijalna jednadžba nije niti približno ispunjena, pomaci, unutarnje sile i naprezanja dobiveni slabim pristupom dobro aproksimiraju egzaktne vrijednosti. Naime, slabo rješenje dobivamo integracijom funkcije zamjenjujućega opterećenja, a takvom operacijom "hrapave" funkcije "izglađujemo". Što više puta integriramo funkciju, postaje glatkija, a aproksimacija bolja. Tako, unatoč lošoj aproksimaciji djelovanja, već poprečne sile koje dobivamo integriranjem opterećenja, mnogo bolje aproksimiraju egzaktne vrijednosti. Momente savijanja bolje aproksimiramo od poprečnih sila, kutove zaokreta još bolje, a pomake najbolje. Promotrimo jednostavne primjere.

6.2.2. Snaga slabe formulacije

Osim prostornoga primjera sa šljunkom, odlučili smo moć slabe formulacije pokazati na dvama jednostavnim modelima u ravnini, koje možemo egzaktno riješiti za zadano i zamjenjujuće opterećenje. Promotrimo prvo jednostavno oslonjenu gredu raspona $\ell = 1$, opterećenu jediničnim kontinuiranim opterećenjem $\vec{q}(x) = \vec{k}$. Zamjenjujuće opterećenje biramo u obliku

$$\vec{q}_p(x) = \left[1 + \sin(n\pi x)\right]\vec{k} \tag{15}$$

gdje je n broj poluvalova. Možemo ga smatrati opterećenjem idealiziranim valuticama šljunka. Definirajmo funkciju reziduala izrazom

$$\vec{r}(x) = \vec{q}_p(x) - \vec{q}(x) = \sin(n\pi x)\vec{k} \tag{16}$$

Kao da je šljunak zadano, a jednoliko djelovanje zamjenjujuće opterećenje. Maksimumi reziduala iznose ±1 i ne ovise o broju valova. Integral rezidualnog opterećenja uzduž raspona za parni je n jednak nul-vektoru, a za neparni rezultanti poluvala:

$$\int_0^\ell \vec{r}(x)\,dx = \int_0^\ell \sin(n\pi x)\,dx\vec{k} = \begin{cases} \vec{0} & \text{za parni } n, \\ \pm 2/(n\pi)\vec{k} & \text{za neparni } n. \end{cases} \tag{17}$$

S porastom broja n vrijednost integrala opada. U graničnom slučaju, kada $n \to \infty$, valutice postaju sve sitnije, a iznos integrala teži prema nuli. Relativne pogreške, dobivene integracijom reziduala kao opterećenja, priložene su u tablici 1.

Tablica 1. Pogreške grednih veličina

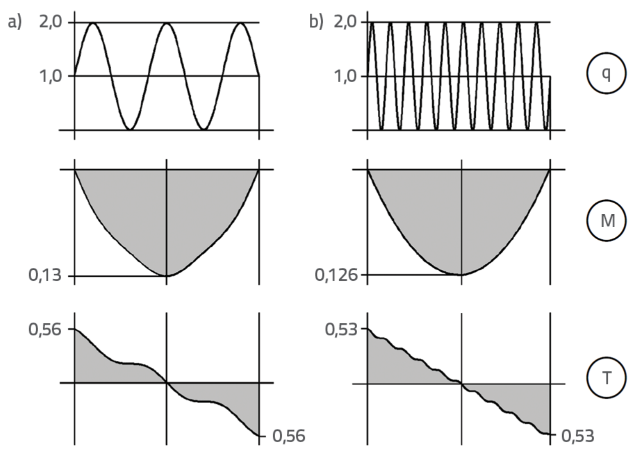
Relativne pogreške grednih veličina		
Pogreška	**Definicija pogreške**	**Iznos**
opterećenja	$\max\left(\lVert\vec{r}(x)\rVert / \lVert\vec{q}(x)\rVert\right)$	1
poprečne sile	$\max\left(\lVert\Delta\vec{T}(x)\rVert / \lVert\vec{T}(x)\rVert\right)$	$1/(2n\pi)$
momenta	$\max\left(\lVert\Delta\vec{M}(x)\rVert / \lVert\vec{M}(x)\rVert\right)$	$1/(2n\pi)^2$
kuta zaokreta	$\max\left(\lVert\Delta\vec{\varphi}(x)\rVert / \lVert\vec{\varphi}(x)\rVert\right)$	$1/(2n\pi)^3$
progiba	$\max\left(\lVert\Delta\vec{w}(x)\rVert / \lVert\vec{w}(x)\rVert\right)$	$1/(2n\pi)^4$

Brojnici s oznakom Δ označavaju rezidual gredne veličine; razliku vrijednosti u slučaju zamjenskoga i točnog opterećenja. Primjerice, za poprečnu silu imamo

$$\Delta\vec{T}(x) = \vec{T}_p(x) - \vec{T}(x) \tag{18}$$

Uočavamo konstantne maksimalne vrijednosti reziduala (pogreške u opterećenju). S porastom broja raste frekvencija

funkcije reziduala, postaje nazubljenija, ali ekstremi ostaju isti. Unutarnje sile i pomaci od takva opterećenja padaju obrnuto proporcionalno broju poluvalova; njihove pogreške različitim potencijama teže prema nuli (zadnji stupac tablice).
Istodobno, funkcija opterećenja postaje diskontinuirana u svakoj točki i u limesu teži prema funkciji koju nije moguće derivirati, jer sadrži beskonačno mnogo nul-točaka, šiljaka i skokova. Unatoč tome, gredne velične su od takva opterećenja egzaktno određene neprekinute funkcije, jer možemo točno riješiti diferencijalnu jednadžbu. I ne samo to. U limesu se rješenja podudaraju s onima za konstantno djelovanje. Očito, opterećenje postaje sve grublje, a rezultati sve bolji. Zamjenjujuće opterećenje s pet i s dvadeset poluvalova, te pripadajuće unutarnje sile prikazani su na slikama 7.a i 7.b.
Greda (može i ploča ili ljuska) kao da nije osjetljiva na sve veću nazubljenost opterećenja. Istaknuli smo: ponašanje je takvo jer integriranje, kojim određujemo unutarnje sile, izglađuje funkciju opterećenja. Zorno razmišljajući, greda se pod rezidualnim opterećenjem ponaša kao kontinuirani nosač s rasponima $1/n$. Pogreške odgovaraju razdiobi grednih veličina uzduž tih raspona. U limesu sve (rasponi, momenti i ostalo) teži prema nuli. Ako uzdužnu i poprečnu armaturu odredimo primjenom najgrubljih dijagrama unutarnjih sila, kojima pripada vrlo loše "jednoliko kontinuirano" opterećenje (slika 7.a), greda će biti dovoljno sigurna, a razliku u armaturi prema "zaista" jednoliku djelovanju možemo smatrati zanemarivom, posebice jer je broj šipaka cjelobrojan.

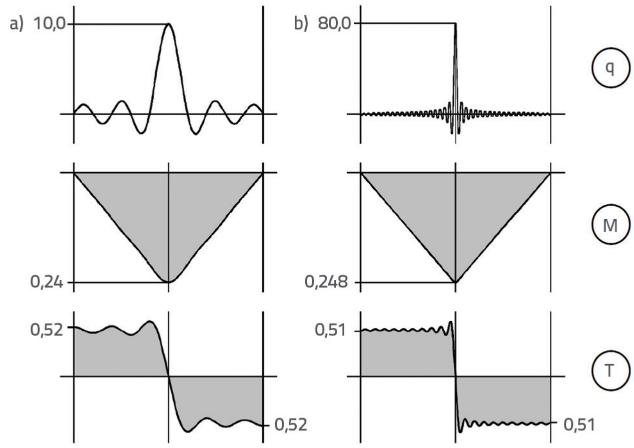


Slika 7. Unutarnje sile za grubu aproksimaciju jednolikog opterećenja

Promotrimo opet jednostavno oslonjenu gredu, sada opterećenu jediničnom silom u sredini raspona. Zamjenjujuće opterećenje možemo odrediti razvojem sile u Fourierov red (slika 8.):

$$\begin{aligned}\vec{q}_p(x) &= 2\left[\sin(\pi x) - \sin(3\pi x) + \sin(5\pi x) - \dots\right]\vec{k} \\ &= 2\left[\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\sin(2i-1)\pi x\right]\vec{k}\end{aligned} \tag{19}$$

Opterećenje je kontinuirano, red je divergentan, a suma teži prema neizmjernom. Unatoč svemu, poprečne sile i momenti od toga opterećenja dobro aproksimiraju točne vrijednosti. Na slikama 8.a i 8.b skicirana su rješenja ako je sila aproksimirana s pet i s četrdeset članova reda.



Slika 8. Unutarnje sile za grubu aproksimaciju koncentriranog opterećenja

Istaknimo, mjerilo crtanja opterećenja u ovom primjeru nije isto. U slučaju istog mjerila valovi funkcija opterećenja, izuzevši središnji šiljak, bili bi podjednaki.

7. Završna razmatranja

Navedimo još matematički izričaj slabe formulacije. Ako rezidual jakoga rješenja, vektorsku nul-funkciju, skalarno pomnožimo bilo kakvom vektorskom funkcijom $\vec{g}$, rezultat će biti skalarna nul-funkcija. A određeni integral takve funkcije jednak je nuli. Dakle,

$$\int_{\Omega} \vec{r}\,\vec{g}\,d\Omega = 0 \tag{20}$$

gdje je $\vec{g}$ funkcija provjere (procjene ili vrednovanja). Tradicijski, uvriježeni naziv jest test funkcija [9]. Integral predstavlja skalarni produkt vektorskih funkcija, a možemo ga promatrati slično skalarnom produktu vektora. Skalarni je produkt za proizvoljnu vrijednost i smjer jednoga vektora (u ovom slučaju $\vec{g}$) jednak nuli, samo ako je drugi (dakle $\vec{r}$) jednak nul-vektoru. Ovaj način postavljanja rubnoga problema nazivamo slabom formulacijom, a rješenje koje ga ispunjava smatramo slabim.
Lako je uočiti: ako znamo rješenje diferencijalne jednadžbe, tada je $\vec{r} = \vec{0}$, a time i vrijednost integrala. Znači, jako rješenje ispunjava slabu formulaciju. Iz prethodnih primjera znamo da obrat ne vrijedi. Slabo rješenje ne ispunjava diferencijalnu jednadžbu. Ako bismo ga i mogli uvrstiti, dobili bismo velike reziduale. U smislu obratnoga postupka riječ je o točnom rješenju za zamjenjujuće opterećenje (šljunkom), a ono se prilično razlikuje od rješenja za zadano jednoliko opterećenje (vodu). Budući da je rezidual vrlo neglatka funkcija, mogu se pojaviti teškoće s intergriranjem u izrazu (20). Tada se umjesto Riemmanova upotrebljava Lebesgueov integral [17].

U praksi ćemo rijetko ispuniti jaku formulaciju. No za skup odabranih test funkcija gotovo uvijek možemo ispuniti slabu. Ističemo ponovo: time ne možemo jamčiti ispunjenje uvjeta ravnoteže u svakoj točki tijela, nego samo na svakom bilo kako odrezanom komadu. Pripadajući rezidual uvijek možemo predočiti nepravilnom, "hrapavom" funkcijom, koja sadrži lomove i skokove. Unatoč svemu, riječ je o fizički korektnom rješenju.

Ne treba davati prednost jakoj formulaciji iz još jednog razloga. Postoje brojni uzroci pada preciznosti matematičkoga modela u odnosu na stvarni problem [18]. Znači, ni egzaktno rješenje modela nije rješenje fizičkoga problema [19]. Mi to rješenje ne znamo i nećemo ga nikada znati. U nekoj zgradi svaki kat može imati različitu namjenu i opterećenja: zamislite kiparski atelijer, plesnu školu ili tečaj borilačkih vještina, a ploče su uvijek jednake, dimenzionirane na isto djelovanje. Čemu ustrajavati na preciznosti? Zgodno je istaknuti: čestična srž materijala više naginje slaboj nego jakoj formulaciji. To je analogno zamjeni diskontinuuma kontinuumom i obratno.

Iz svih razmatranja naslućujemo da je jednostavnije ispuniti slabu formulaciju, odnosno pronaći jedno rješenje iz većega skupa dovoljno dobrih rješenja, nego li tražiti točno, često vrlo složeno i jedino jako rješenje. I matematički gledano, integralnu je formulaciju lakše riješiti od diferencijalne, ali i u smislu primjene računala, skalarne su veličine pogodnije od vektorskih. Poznato je: izraz (20) omogućava primjenu parcijalne integracije koja, u odnosu na diferencijalnu formulaciju (1), snižava red derivacije i glatkoću rješenja [15]. Za kraj, u teoriji konstrukcija slaba je formulacija ekvivalentna načelu virtualnoga rada [20, 21].

LITERATURA

[1] Leipholz, H.: Einführung in die Elastizitätstheorie, G. Braun -.3mmVerlag, Karlsruhe, 1968.

[2] Ciarlet, P.G.: Mathematical Elasticity, Volume 1: Three Dimensional Elasticity, North - Holland, Amsterdam, 1988.

[3] Dvornik, J.: Razvoj matematičkih modela inženjerskih problema, Građevinar, 42 (1990) 12, pp. 227-236.

[4] Dvornik, J.: Numeričke, simboličke i heurističke metode, Građevinar, 55 (2003) 10, pp. 575-582.

[5] Hjelmstad, K.D.: Fundamentals of Structural Mechanics, Springer Science, 8mm+ Business Media, Inc., New York, 2005.

[6] Herman, K.T.: Teorija elastičnosti i plastičnosti, Element, Zagreb, 2008.

[7] Ilanko, S., Monterrubio, L.E.: The Rayleigh - Ritz Method for Structural Analysis, ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc., London, Hoboken, 2014, https://doi.org/10.1002/9781118984444

[8] LeVeque, R.J.: Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2014.

[9] Zienkiewicz, O.C., Morgan, K.: Finite Elements and Approximation, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983.

[10] Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E.: Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[11] Clough, R.W., Penzien, J.: Dynamics of Structures, Computers and Structures, Inc., Berkeley, 2003.

[12] Chopra, A.K.: Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2012.

[13] Dvornik, J., Lazarević, D.: Uloga kreativnosti i inženjerske prosudbe u konstruktorskom radu, Građevinar, 59 (2007) 3, pp. 197-207.

[14] Mikhlin, S.G.: Variational Methods in Mathematical Physics, Pergamon Press, Oxford, 1964.

[15] Žubrinić, D.: Uvod u varijacione metode za diferencijalne jednadžbe, Elektrotehnički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1991.

[16] Jović, V.: Uvod u inženjersko numeričko modeliranje, Aquarius Engineering, d. o. o., Split, 1993.

[17] Mitrović, D., Žubrinić, D.: Fundamentals of Applied Functional Analysis, Addison Wesley Longman, Essex, 1998.

[18] Dvornik, J., Lazarević, D.: Manjkavosti proračunskih modela inženjerskih konstrukcija, Građevinar, 57 (2005) 4, pp. 227-236.

[19] Perelmuter, A.V., Slivker, V.I.: Numerical Structural Analysis. Methods, Models and Pitfalls, Springer, Berlin, 2003, https://doi.org/10.1007/978-3-540-36500-6

[20] Lanczos, C.: The Variational Principles of Mechanics, 4th edition, University of Toronto Press, Toronto, 1970.

[21] Wunderlich, W., Pilkey, W.D.: Mechanics of Structures. Variational and Computational Methods, CRC Press, Boca Raton, 2003.