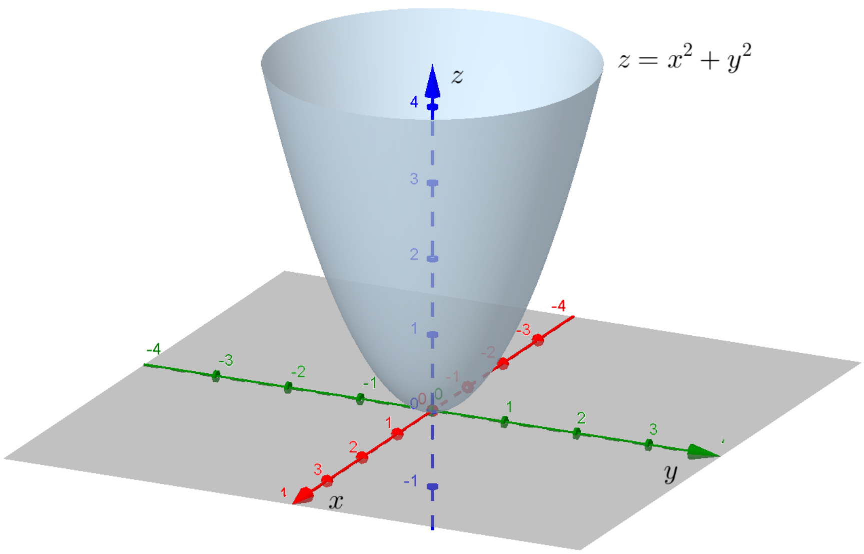
Rajna Rajić

MATEMATIKA 2



Sveučilište u Zagrebu

RUDARSKO-GEOLOŠKO-NAFTNI FAKULTET
ZAGREB, 2018.

UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS

Sveučilište u Zagrebu

Izdavač:
Sveučilište u Zagrebu
Rudarsko-geološko-naftni fakultet

Urednica:
doc. dr. sc. Vesnica Garašić

Recenzenti:
prof. dr. sc. Ljiljana Arambašić
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš
doc. dr. sc. Anja Vrbaški

Lektorica:
Ljiljana Buljan

Računalna obrada teksta:
Rajna Rajić

Grafičko uređenje, prijelom i e-tisak:
Rajna Rajić

Naklada:
e-izdanje

ISBN: 978-953-6923-38-0

CIP zapis je dostupan u računalnome katalogu Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 000990095.

Odlukom Senata Sveučilišta u Zagrebu, Klasa: 032-01/17-01/8, Urbroj: 380-061/117-17-6 od 17. listopada 2017. godine odobrava se rukopisu pod naslovom *Matematika 2* autorice prof. dr. sc. Rajne Rajić korištenje naziva **sveučilišni udžbenik (*Manualia Universitatis studiorum Zagrabiensis*)**.

Predgovor

Ova knjiga pisana je prema nastavnom programu predmeta *Matematika 2*, koji se izvodi na prvoj godini preddiplomskih studija rudarstva, naftnog rudarstva i geološkog inženjerstva na Rudarsko-geološko-naftnom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, i namijenjena je prije svega studentima tog fakulteta. Primjena matematike u tehničkim i prirodoslovnim strukama zahtijeva poznavanje temeljnih matematičkih koncepata te razumijevanje matematičkih načela. Svrha ove knjige je upoznati studente s osnovnim rezultatima matematičke analize i linearne algebre, nužnima za nastavak daljnje izobrazbe i buduće djelatnosti. Za uspješno praćenje sadržaja ove knjige potrebno je poznavanje osnova matričnog računa te diferencijalnog računa i neodređenog integrala funkcija jedne realne varijable, koji se na Rudarsko-geološko-naftnom fakultetu izlažu u okviru predmeta *Matematika 1.* Pristup izlaganju gradiva prilagođen je studentima s takvim matematičkim predznanjem, pri čemu je naglasak stavljen na samo značenje rezultata i njihovu interpretaciju, bez izvođenja matematičkih dokaza. Tekst sadrži veliki broj riješenih raznovrsnih primjera koji pridonose boljem razumijevanju i utvrđivanju izloženog gradiva.

Gradivo obuhvaćeno ovom knjigom izloženo je u osam poglavlja. U prva dva poglavlja obrađuju se određeni i nepravi integrali, kao prirodni nastavak na teoriju neodređenih integrala s kojima se studenti upoznaju u *Matematici 1.* Osnove vektorske algebre i analitičke geometrije prostora predmet su proučavanja trećeg i četvrtog poglavlja. U sljedećim se poglavljima uvode realne funkcije više realnih varijabli, a zatim vektorske funkcije jedne odnosno više realnih varijabli. U vezi s tim obrađuju se osnovni pojmovi kao što su limes, neprekidnost, derivacija te integral, kao prirodne generalizacije odgovarajućih pojmova u slučaju realnih funkcija jedne varijable. U posljednjem poglavlju opisuju se osnovne metode rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi.

Zahvaljujem kolegi dr. sc. Dragi Špoljariću na pomoći pri pisanju sedmog i osmog poglavlja. Također zahvaljujem recenzentima dr. sc. Ljiljani Arambašić, dr. sc. Željki Milin Šipuš i dr. sc. Anji Vrbaški na pažljivom čitanju rukopisa te korisnim primjedbama i sugestijama koji su pridonijeli poboljšanju teksta.

Zagreb, ožujak 2018.

Rajna Rajić

Grčki alfabet

A	α	alfa	N	ν	ni
B	β	beta	Ξ	ξ	ksi
Γ	γ	gama	O	o	omikron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ϵ, ε	epsilon	P	ρ, ϱ	ro
Z	ζ	zeta	Σ	σ	sigma
H	η	eta	T	τ	tau
Θ	θ, ϑ	theta	Υ	υ	ipsilon
I	ι	jota	Φ	ϕ, φ	fi
K	κ	kapa	X	χ	hi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	mi	Ω	ω	omega

Sadržaj

1 Određeni integral **1**

1.1 Pojam određenog integrala 1

1.2 Metoda supstitucije 5

1.3 Metoda parcijalne integracije 8

1.4 Primjena određenog integrala 10

1.4.1 Površina ravninskog lika omeđenog krivuljama zadanim u pravokutnim koordinatama 10

1.4.2 Površina ravninskog lika omeđenog krivuljama zadanim parametarskim jednadžbama 27

1.4.3 Polarni koordinatni sustav 32

1.4.4 Površina ravninskog lika omeđenog krivuljama zadanim u polarnim koordinatama 36

1.4.5 Duljina luka krivulje zadane u pravokutnim koordinatama 43

1.4.6 Duljina luka krivulje zadane parametarskim jednadžbama 46

1.4.7 Duljina luka krivulje zadane u polarnim koordinatama 50

1.4.8 Volumen rotacijskog tijela 53

2 Nepravi integral **64**

2.1 Integrali s beskonačnim granicama 64

2.2 Integrali neomeđene funkcije 68

3 Vektori **76**

3.1 Pojam vektora 76

3.2 Zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom 78

3.3 Koordinatizacija prostora V^3 83

3.4 Skalarni produkt 88

3.5 Vektorski produkt 92

3.6 Mješoviti produkt 96

4 Analitička geometrija prostora **99**

4.1 Ravnina u prostoru 99

4.2 Pravac u prostoru 109

5 Funkcije više varijabli **133**

5.1 Pojam funkcije više varijabli 133

5.2 Limes i neprekidnost 154

5.3 Parcijalne derivacije 160
5.4 Parcijalne derivacije drugog reda 167
5.5 Diferencijabilnost funkcije i totalni diferencijal 170
5.6 Ekstremi funkcije dviju varijabli 174

6 Dvostruki integral 183
6.1 Pojam dvostrukog integrala 183
6.2 Računanje dvostrukog integrala 188
6.3 Dvostruki integral u polarnom koordinatnom sustavu 209
6.4 Primjena dvostrukog integrala na izračunavanje volumena tijela i površine lika 218

7 Elementi teorije polja 248
7.1 Vektorska funkcija 248
7.2 Skalarno i vektorsko polje 263
7.3 Derivacija u smjeru i gradijent skalarnog polja 268

8 Obične diferencijalne jednadžbe 282
8.1 Uvod i motivacija 282
8.2 Obične diferencijalne jednadžbe prvog reda 284
8.2.1 Diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama . 285
8.2.2 Homogena diferencijalna jednadžba 290
8.2.3 Linearna diferencijalna jednadžba 293
8.2.4 Bernoullijeva diferencijalna jednadžba 298
8.2.5 Egzaktna diferencijalna jednadžba 301
8.3 Obične diferencijalne jednadžbe višeg reda 306
8.3.1 Neposredno integriranje 306
8.3.2 Obične diferencijalne jednadžbe drugog reda kojima se može sniziti red 307

Literatura 314

Kazalo pojmova 315

1 Određeni integral

Pojam određenog integrala povijesno je povezan s računanjem površine ravninskih likova. Arhimed[1] je uočio da se površina lika može aproksimirati zbrojem površina pravokutnika koje tom liku opisujemo, odnosno upisujemo. Na toj ideji Riemann[2] u 19. stoljeću zasniva pojam određenog integrala.

1.1 Pojam određenog integrala

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *omeđena* funkcija na segmentu $[a, b]$, tj. neka postoje $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b].$$

Segment $[a, b]$ podijelimo na $n \in \mathbb{N}$ dijelova točkama

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Skup $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ nazivamo *razdiobom* segmenta $[a, b]$.

Stavimo

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Na svakom segmentu $[x_{i-1}, x_i]$ izaberemo proizvoljnu točku $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Zatim definiramo sljedeće zbrojeve:

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad \sigma_\Delta = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}), \quad S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

pri čemu s_Δ nazivamo *donjim integralnim zbrojem*, S_Δ *gornjim integralnim zbrojem*, a σ_Δ *integralnim zbrojem* funkcije f.

Budući da je

$$m \leq m_i \leq f(t_i) \leq M_i \leq M, \quad i = 1, \ldots, n,$$

to vrijedi

$$\begin{aligned} m \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}), \end{aligned}$$

[1] Arhimed, 287?-212 B.C., grčki matematičar, fizičar i izumitelj
[2] G.F.B. Riemann, 1826-1866, njemački matematičar

odnosno
$$m(b-a) \leq s_\Delta \leq \sigma_\Delta \leq S_\Delta \leq M(b-a), \tag{1}$$
i to za svaku razdiobu Δ segmenta $[a,b]$. Stoga su dobro definirani brojevi

$$\mathcal{I}_* := \sup\{s_\Delta : \Delta \text{ razdioba segmenta } [a,b]\},$$

$$\mathcal{I}^* := \inf\{S_\Delta : \Delta \text{ razdioba segmenta } [a,b]\}.$$

Broj $\mathcal{I}_*$ nazivano *donjim Riemannovim integralom*, a broj $\mathcal{I}^*$ *gornjim Riemannovim integralom* funkcije f.

Za razdiobu Δ' segmenta $[a,b]$ kažemo da *profinjuje* razdiobu Δ segmenta $[a,b]$ ako je $\Delta \subseteq \Delta'$. Lako se može provjeriti da profinjenjem razdiobe donji integralni zbroj raste, dok se gornji integralni zbroj smanjuje; dakle

$$s_\Delta \leq s_{\Delta'} \leq S_{\Delta'} \leq S_\Delta.$$

Odavde slijedi da ukoliko su Δ' i Δ'' dvije proizvoljne razdiobe segmenta $[a,b]$, uvijek vrijedi
$$s_{\Delta'} \leq S_{\Delta''}, \tag{2}$$
tj. svaki je donji integralni zbroj manji od svakog gornjeg integralnog zbroja. (Naime, kako razdioba $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ profinjuje razdiobe Δ' i Δ'', imamo

$$s_{\Delta'} \leq s_\Delta, \quad S_\Delta \leq S_{\Delta''},$$

odakle zbog $s_\Delta \leq S_\Delta$ slijedi (2).)

Kao posljedicu relacije (2) imamo vezu između donjeg i gornjeg Riemannovog integrala
$$\mathcal{I}_* \leq \mathcal{I}^*.$$

Kažemo da je omeđena funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabilna* (u Riemannovom smislu) na segmentu $[a,b]$ ako je

$$\mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*.$$

Tada broj $\mathcal{I} := \mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$ zovemo *određenim integralom* funkcije f na segmentu $[a,b]$, te pišemo
$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x)dx.$$

Pritom f nazivamo *podintegralnom funkcijom*, segment $[a,b]$ *područjem integracije*, a x je varijabla po kojoj se integrira.

Jasno je da za integrabilnu funkciju f vrijedi

$$s_\Delta \leq \int_a^b f(x)dx \leq S_\Delta, \tag{3}$$

gdje je Δ proizvoljna razdioba segmenta $[a, b]$.

Kriterij integrabilnosti funkcije f možemo iskazati na sljedeći način.

Omeđena funkcija f je integrabilna na segmentu $[a, b]$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razdioba Δ segmenta $[a, b]$ takva da je

$$S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon. \tag{4}$$

Važno je napomenuti da se određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ integrabilne funkcije f može po volji točno aproksimirati integralnim zbrojem. Preciznije, iz (1), (3) i (4) zaključujemo da za integrabilnu funkciju f na $[a, b]$ postoji razdioba $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$, te točke $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, takve da vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Bitnu klasu integrabilnih funkcija čine neprekidne funkcije; *dakle svaka neprekidna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na segmentu $[a, b]$ je integrabilna na $[a, b]$. Nadalje, ako omeđena funkcija f na segmentu $[a, b]$ ima konačan broj prekida, onda je f integrabilna na $[a, b]$. Također, monotona funkcija f na segmentu $[a, b]$ je integrabilna na $[a, b]$.*

Određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ definirali smo u slučaju $a < b$. Po definiciji stavljamo

$$\int_a^a f(x)dx := 0.$$

Nadalje, ako je $a > b$, tada definiramo

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx.$$

Osnovna svojstva određenog integrala

(a) *Ako je $c \in [a, b]$ i $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija na $[a, b]$, onda je f integrabilna na $[a, c]$ i $[c, b]$, te vrijedi*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(b) *Ako je* $c \in [a,b]$ *i* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabilna funkcija na* $[a,c]$ *i* $[c,b]$, *onda je* f *integrabilna na* $[a,b]$, *te vrijedi*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(c) *Ako su* $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$ *i* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabilna funkcija na* $[a,b]$, *onda je*

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx$$

(*bez obzira na poredak točaka* x_1, x_2, x_3).

(d) *Ako je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabilna funkcija na* $[a,b]$, *onda je*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

(e) *Ako je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabilna funkcija na* $[a,b]$ *i* $k \in \mathbb{R}$ *konstanta, onda je*

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

(f) *Ako su* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabilne funkcije na* $[a,b]$, *onda je*

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(g) *Ako su* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabilne funkcije na* $[a,b]$, *te ako je* $f(x) \leq g(x)$ *za svaki* $x \in [a,b]$, *onda je*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Teorem o srednjoj vrijednosti integralnog računa

Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija na* $[a,b]$. *Tada postoji* $c \in [a,b]$ *tako da je*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Računanje određenog integrala pomoću njegove definicije je općenito teško. Međutim, u slučaju neprekidnih funkcija, to se računanje svodi na poznavanje primitivne funkcije zadane funkcije. Vezu između određenog integrala funkcije f i njezine primitivne funkcije opisuje Osnovni teorem infinitezimalnog računa, a jedan njegov mogući izričaj je putem Newton–Leibnizove formule.

Newton–Leibnizova formula

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$. Ako je F bilo koja primitivna funkcija od f na $[a, b]$, onda je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Napomenimo da umjesto $F(b) - F(a)$ obično pišemo $F(x)\Big|_a^b$.

Primjer 1.1.1. Izračunati sljedeće integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$,

(b) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$,

(c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$,

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$.

1.2 Metoda supstitucije

Kod izračunavanja integrala $\int_a^b f(x)dx$ neprekidne funkcije f ne možemo uvijek neposredno naći primitivnu funkciju od f. Stoga se u složenijim slučajevima koriste različite metode za pronalaženje primitivne funkcije od f. S metodom supstitucije kod neodređenog integrala upoznali smo se u Matematici 1. Ovdje ju provodimo na isti način, s tim da je pri svakom uvođenju nove varijable potrebno promijeniti granice integracije. Preciznije, metoda supstitucije provodi se ovako.

Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Neka je funkcija $g : J \to \mathbb{R}$ derivabilna na otvorenom intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ i funkcija g' neprekidna na J, te neka vrijedi $g(J) \subseteq I$. Tada za svaki par $\alpha, \beta \in J$, uz supstituciju $x = g(t)$ vrijedi

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

Ako je g strogo monotona funkcija na J, te $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$, onda je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt.$$

Primjer 1.2.1. Izračunati sljedeće integrale:

$$1.)\int_1^{e^3}\frac{dx}{x(3+\ln x)} = \left|\begin{array}{ll} t=3+\ln x & x=1\Rightarrow t=3+\ln 1=3\\ dt=\frac{1}{x}dx & x=e^3\Rightarrow t=3+\ln e^3=6\end{array}\right| = \int_3^6\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_3^6=\ln 6-\ln 3=\ln\frac{6}{3}=\ln 2,$$

$$2.)\int_1^{e}\frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \left|\begin{array}{ll} t=\ln x & x=1\Rightarrow t=\ln 1=0\\ dt=\frac{1}{x}dx & x=e\Rightarrow t=\ln e=1\end{array}\right| = \int_0^1\cos t dt=\sin t\Big|_0^1=\sin 1-\sin 0=\sin 1,$$

$$3.)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin x dx}{\sqrt{1-2\cos x}} = \left|\begin{array}{l} t=\sqrt{1-2\cos x}\\ dt=\frac{1}{2\sqrt{1-2\cos x}}\cdot(-2)(-\sin x)dx=\frac{\sin x dx}{\sqrt{1-2\cos x}}\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\sqrt{1-2\cos\frac{\pi}{2}}=1\\ x=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow t=\sqrt{1-2\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{2}\end{array}\right| = \int_1^{\sqrt{2}}dt=t\Big|_1^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1,$$

$$4.)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x dx = \left|\begin{array}{ll} t=\sin x & x=0\Rightarrow t=\sin 0=0\\ dt=\cos x dx & x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\sin\frac{\pi}{2}=1\end{array}\right| = \int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}(1^3-0^3)=\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}5.)\int_1^3 x\sin^2(x^2-1)dx &= \left|\begin{array}{ll} t=x^2-1 & x=1\Rightarrow t=1^2-1=0\\ dt=2xdx & x=3\Rightarrow t=3^2-1=8\\ xdx=\frac{1}{2}dt & \end{array}\right|\\ &= \frac{1}{2}\int_0^8\sin^2 t dt=\frac{1}{2}\int_0^8\frac{1}{2}\big(1-\cos(2t)\big)dt\\ &= \frac{1}{4}\int_0^8 dt-\frac{1}{4}\int_0^8\cos(2t)dt=\frac{1}{4}t\Big|_0^8-\frac{1}{8}\sin(2t)\Big|_0^8\\ &= \frac{1}{4}(8-0)-\frac{1}{8}(\sin 16-\sin 0)=2-\frac{1}{8}\sin 16,\end{aligned}$$

$$6.)\int_0^1 x^2e^{x^3}dx = \left|\begin{array}{ll} t=x^3 & x=0\Rightarrow t=0^3=0\\ dt=3x^2dx & x=1\Rightarrow t=1^3=1\\ x^2dx=\frac{1}{3}dt & \end{array}\right|$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{3}e^t\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^1-e^0) = \frac{1}{3}(e-1),$$

$$7.)\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1} = \left|\begin{array}{ll} t=\sqrt[3]{x}+1 & x=1\Rightarrow t=\sqrt[3]{1}+1=2\\ \sqrt[3]{x}=t-1 & x=8\Rightarrow t=\sqrt[3]{8}+1=3\\ x=(t-1)^3 & \\ dx=3(t-1)^2dt & \end{array}\right|$$
$$= \int_2^3 \frac{3(t-1)^2}{t}\,dt = 3\int_2^3 \frac{t^2-2t+1}{t}\,dt$$
$$= 3\int_2^3\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt = 3\left(\frac{1}{2}t^2-2t+\ln|t|\right)\Big|_2^3$$
$$= 3\left(\frac{9}{2}-6+\ln 3\right)-3\,(2-4+\ln 2) = \frac{3}{2}+3\ln\frac{3}{2},$$

$$8.)\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx = \left|\begin{array}{ll} t=x^3+1 & x=0\Rightarrow t=0^3+1=1\\ dt=3x^2dx & x=2\Rightarrow t=2^3+1=9\\ x^2dx=\frac{1}{3}dt & \end{array}\right|$$
$$= \frac{1}{3}\int_1^9\sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{2}{9}(9^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}) = \frac{52}{9},$$

$$9.)\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \left|\begin{array}{ll} t=\sqrt{x^2-1} & x=1\Rightarrow t=\sqrt{1^2-1}=0\\ t^2=x^2-1 & x=2\Rightarrow t=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}\\ x^2=1+t^2 & \\ x=\sqrt{1+t^2} & \\ dx=\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} & \end{array}\right|$$
$$= \int_0^{\sqrt{3}}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2}{1+t^2}\,dt$$
$$= \int_0^{\sqrt{3}}\frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}dt = \int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$
$$= \int_0^{\sqrt{3}}dt-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2} = t\Big|_0^{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} t\Big|_0^{\sqrt{3}}$$
$$= (\sqrt{3}-0)-(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg} 0) = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3},$$

$$
\begin{aligned}
10.)\ \int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx &= \left| \begin{array}{ll} x = 2\sin t & \frac{x}{2} = \sin t \\ dx = 2\cos t dt & t = \arcsin\frac{x}{2} \\ & x = 0 \Rightarrow t = \arcsin 0 = 0 \\ & x = 2 \Rightarrow t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\big(1+\cos(2t)\big)dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)dt \\
&= 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + (\sin\pi - \sin 0) = \pi.
\end{aligned}
$$

1.3 Metoda parcijalne integracije

Neka su $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabilne funkcije na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, te neka su f', g' neprekidne na I. Tada za svaki par $a, b \in I$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g'(x)dx &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx \\
&= \big[f(x)g(x)\big]\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.
\end{aligned}
$$

Primjer 1.3.1. Izračunati sljedeće integrale:

$$
\begin{aligned}
1.)\ \int_1^e \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{array} \right| = (x\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} \\
&= (x\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e dx = e\ln e - 1\ln 1 - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1. \\
2.)\ \int_{-2}^1 xe^x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = (xe^x)\Big|_{-2}^1 - \int_{-2}^1 e^x dx \\
&= 1e^1 - (-2)e^{-2} - e^x\Big|_{-2}^1 = e + 2e^{-2} - (e^1 - e^{-2}) = 3e^{-2}.
\end{aligned}
$$

$$3.)\quad (*)\quad \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \sin x dx & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right|$$
$$= (-x^2 \cos x)\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x \cos x dx$$
$$= (-\pi^2 \cos \pi + 0^2 \cos 0) + 2\int_0^{\pi} x \cos x dx$$
$$= \pi^2 + 2\int_0^{\pi} x \cos x dx.$$

Integral $\int_0^{\pi} x \cos x dx$ riješit ćemo tako da ponovo primijenimo metodu parcijalne integracije.

$$(**)\quad \int_0^{\pi} x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right|$$
$$= (x \sin x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx$$
$$= (\pi \sin \pi - 0 \sin 0) + \cos x\Big|_0^{\pi}$$
$$= \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2.$$

Sada je

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = (*) = \pi^2 + 2\int_0^{\pi} x \cos x dx = (**) = \pi^2 + 2(-2) = \pi^2 - 4.$$

$$4.)\quad (*)\quad \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{array} \right|$$
$$= x \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2} - 0 \arcsin 0 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integral $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ riješit ćemo metodom supstitucije.

$$(**)\quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{ll} t = \sqrt{1-x^2} & x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{1-0^2} = 1 \\ dt = -\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} & x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right|$$
$$= -\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 dt = t\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dakle,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = (*) = \frac{\pi}{12} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = (**) = \frac{\pi}{12} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1.4 Primjena određenog integrala

1.4.1 Površina ravninskog lika omeđenog krivuljama zadanim u pravokutnim koordinatama

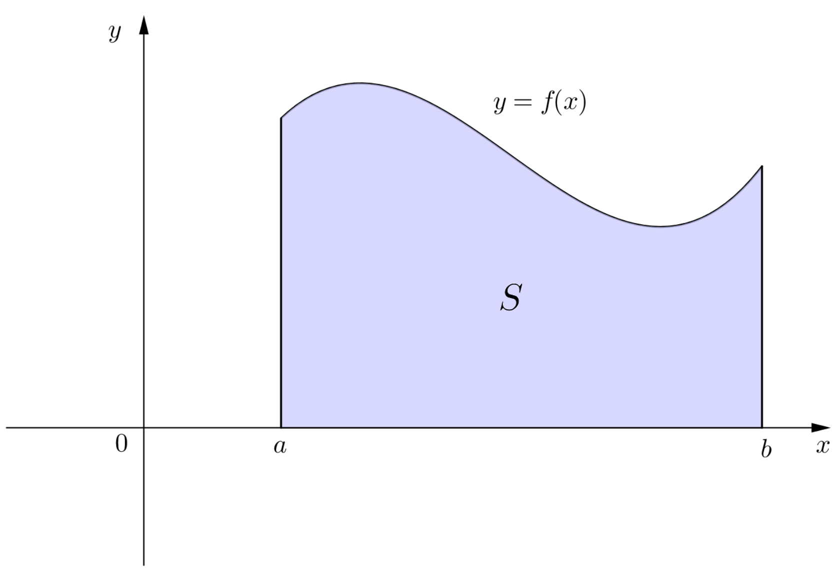
Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *omeđena* i *nenegativna* funkcija na segmentu $[a,b]$, tj. neka postoje $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$0 \leq m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a,b].$$

Želimo izračunati površinu skupa

$$S = \{(x,y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

omeđenog grafom funkcije f, x-osi, te pravcima $x = a$ i $x = b$. Skup S nazivamo *krivolinijskim trapezom*, odnosno *pseudotrapezom* (slika 1).



Slika 1: Pseudotrapez S

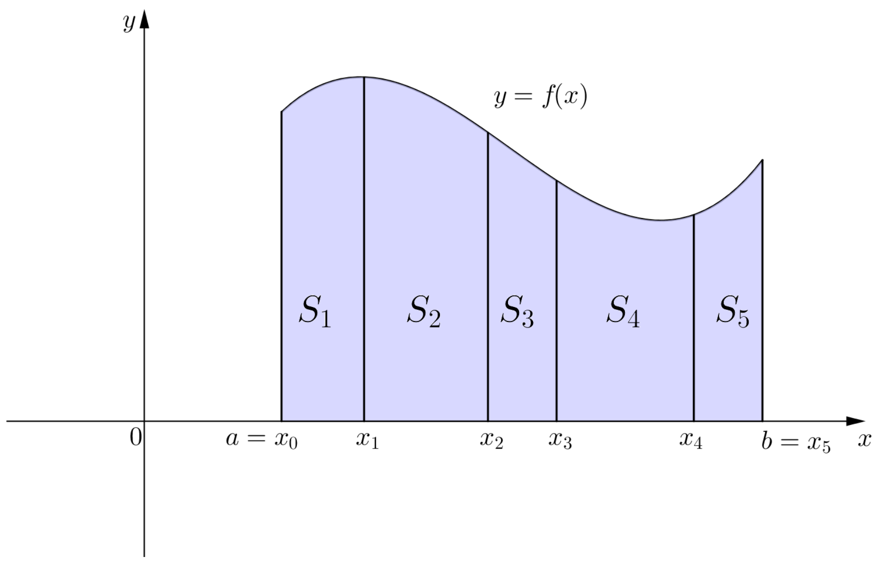
Da bismo odredili površinu pseudotrapeza S, podijelit ćemo segment $[a, b]$ na $n \in \mathbb{N}$ dijelova točkama

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Označimo s S_i, $i = 1, \ldots, n$, pseudotrapez omeđen grafom funkcije f, x-osi, te pravcima $x = x_{i-1}$ i $x = x_i$. Tada je

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n,$$

pa je površina pseudotrapeza S jednaka zbroju površina pseudotrapeza S_i, $i = 1, \ldots, n$.

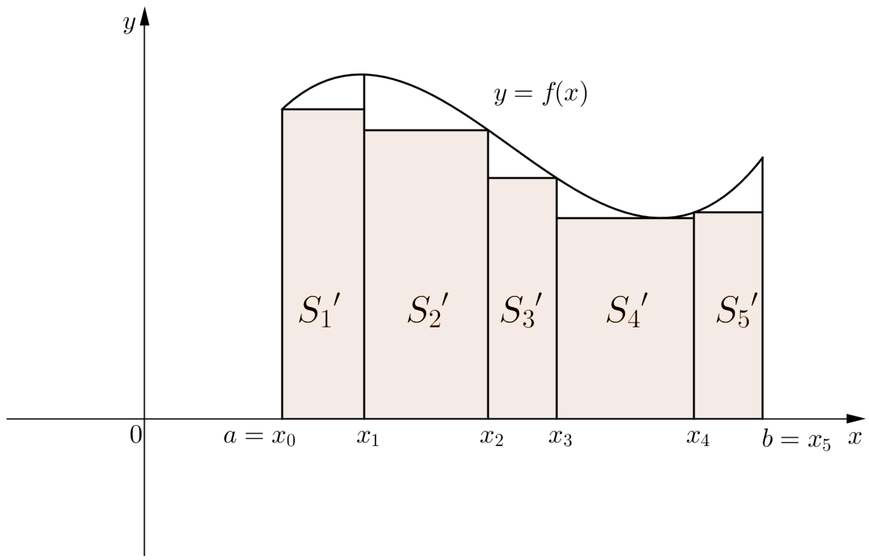


Slika 2: Pseudotrapez S podijeljen na $n = 5$ pseudotrapeza S_i

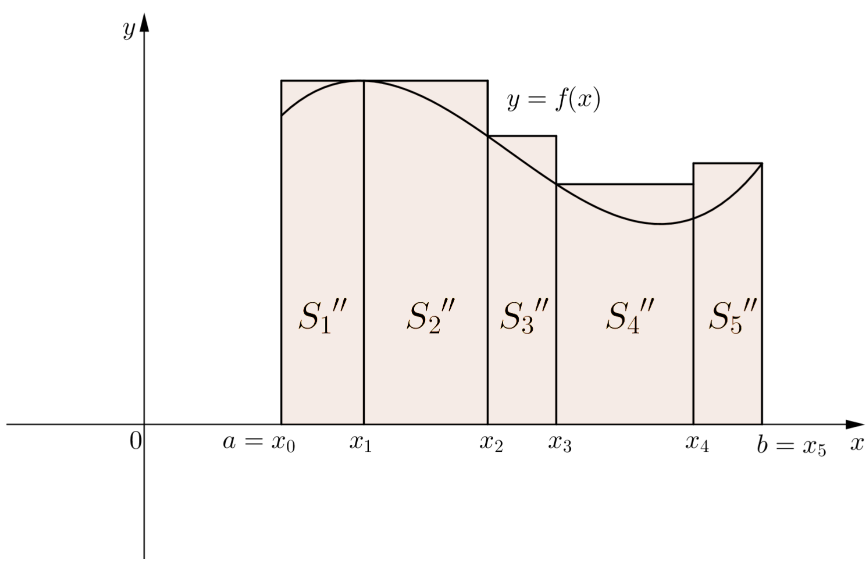
Stavimo

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad i = 1, \ldots, n,$$

te nad svakim segmentom $[x_{i-1}, x_i]$ konstruiramo pravokutnik S_i' visine m_i, te pravokutnik S_i'' visine M_i, $i = 1, \ldots, n$.



Slika 3: Pravokutnici S_i' upisani pseudotrapezu S



Slika 4: Pravokutnici S_i'' opisani pseudotrapezu S

Površina $P(S_i')$ pravokutnika S_i' upisanog pseudotrapezu S_i, te površina $P(S_i'')$ pravokutnika S_i'' opisanog pseudotrapezu S_i iznose redom

$$P(S_i') = m_i(x_i - x_{i-1}), \quad P(S_i'') = M_i(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Zbroj površina svih upisanih pravokutnika jednak je donjem integralnom zbroju funkcije f, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} P(S_i') = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = s_\Delta,$$

dok je zbroj površina svih opisanih pravokutnika jednak gornjem integralnom zbroju funkcije f, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} P(S_i'') = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S_\Delta$$

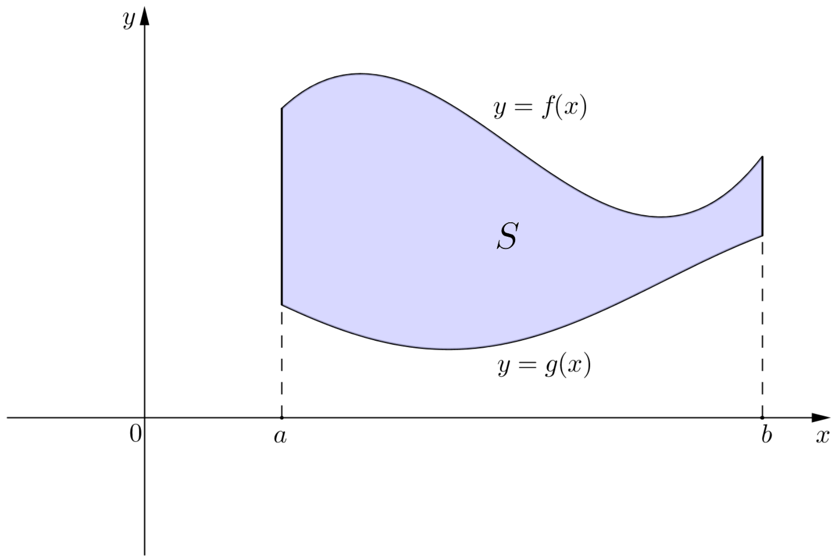
(gdje je $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ razdioba našeg segmenta $[a, b]$).

O površini pseudotrapeza S ima smisla govoriti samo u slučaju da postoji razdioba Δ segmenta $[a, b]$, takva da je razlika $S_\Delta - s_\Delta$ zbroja površina svih opisanih pravokutnika i zbroja površina svih upisanih pravokutnika proizvoljno mala. Drugim riječima, smisleno je govoriti o površini pseudotrapeza S samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razdioba Δ segmenta $[a, b]$ takva da je $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$, odnosno ako je funkcija f integrabilna na segmentu $[a, b]$ (v. točka 1.1, (4)). Tada je, prema (3), $s_\Delta \leq \int_a^b f(x)dx \leq S_\Delta$, pa površinu $P(S)$ pseudotrapeza S definiramo kao

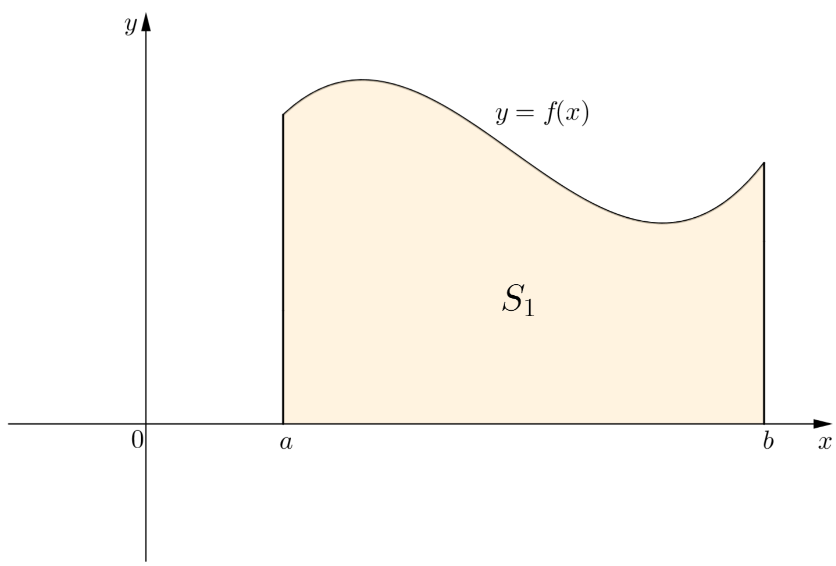
$$P(S) = \int_a^b f(x)dx. \tag{5}$$

Pomoću formule (5) mogu se računati površine složenijih likova u ravnini.

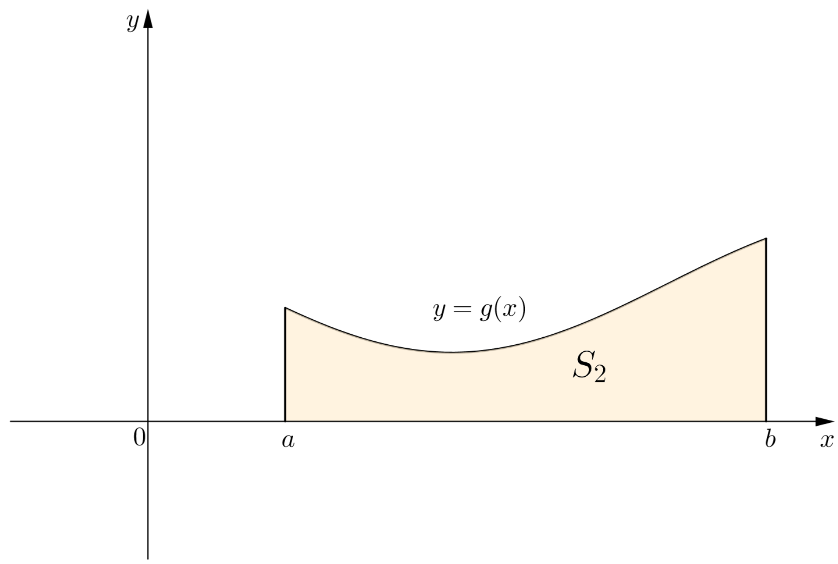
(a) Neka su dane integrabilne funkcije $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, takve da je $0 \leq g(x) \leq f(x)$ za svaki $x \in [a, b]$. Tada se površina $P(S)$ lika S omeđenog grafom funkcije f, grafom funkcije g, te pravcima $x = a$ i $x = b$ računa tako da od površine $P(S_1)$ pseudotrapeza S_1 omeđenog grafom funkcije f, x-osi, te pravcima $x = a$ i $x = b$ oduzmemo površinu $P(S_2)$ pseudotrapeza S_2 omeđenog grafom funkcije g, x-osi i pravcima $x = a$ i $x = b$ (slike 5, 6 i 7).



Slika 5: Površina $P(S)$ lika S



Slika 6: Površina $P(S_1)$ pseudotrapeza S_1

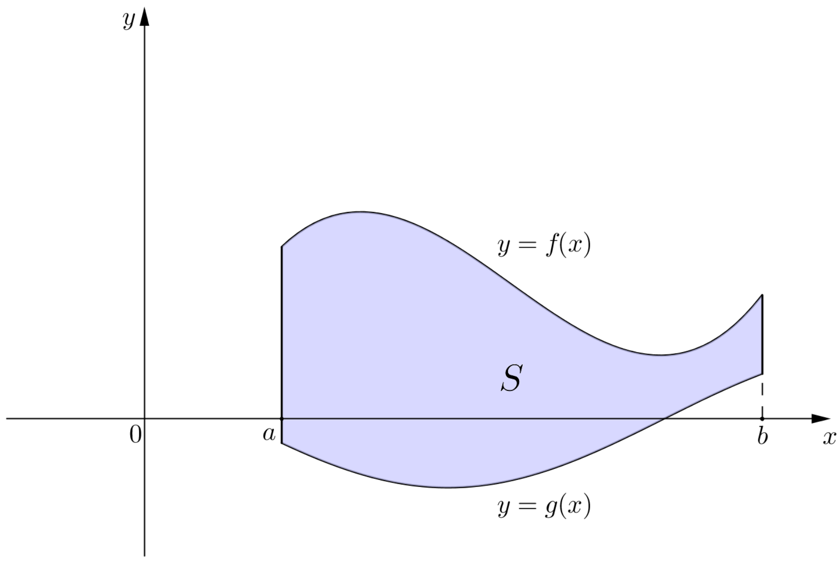


Slika 7: Površina $P(S_2)$ pseudotrapeza S_2

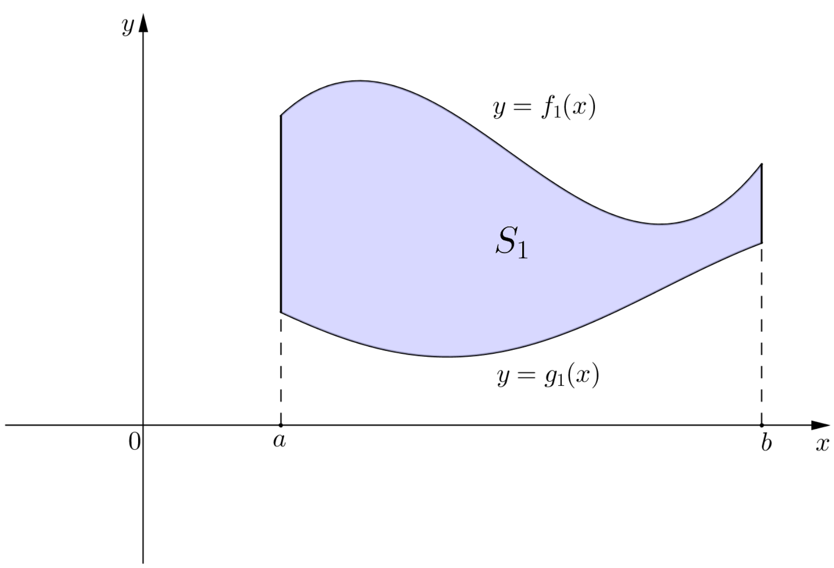
Prema (5) imamo

$$P(S) = P(S_1) - P(S_2) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx. \quad (6)$$

(b) Formula (6) može se primijeniti i na integrabilne funkcije $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, takve da je $g(x) \leq f(x)$ za svaki $x \in [a, b]$ (bez da zahtijevamo nenegativnost funkcije g). Naime, kako je funkcija g omeđena na $[a, b]$, to postoji konstanta $k \geq 0$ tako da vrijedi $0 \leq g(x) + k$ za svaki $x \in [a, b]$. Translatiramo li grafove funkcija f i g za konstantu k u pozitivnom smjeru y-osi, površina $P(S)$ lika S omeđenog grafovima funkcija f i g te pravcima $x = a$ i $x = b$ bit će jednaka površini lika S_1 omeđenog grafom funkcije $f_1(x) = f(x) + k$, grafom funkcije $g_1(x) = g(x) + k$ i pravcima $x = a$ i $x = b$ (slike 8 i 9).



Slika 8: Površina $P(S)$ lika S



Slika 9: Površina $P(S_1)$ lika S_1

Nadalje, kako je $0 \leq g(x) + k \leq f(x) + k$ za svaki $x \in [a, b]$, odnosno

$$0 \leq g_1(x) \leq f_1(x), \quad x \in [a, b],$$

za računanje površine lika S_1 može se primijeniti formula (6). Prema tome,

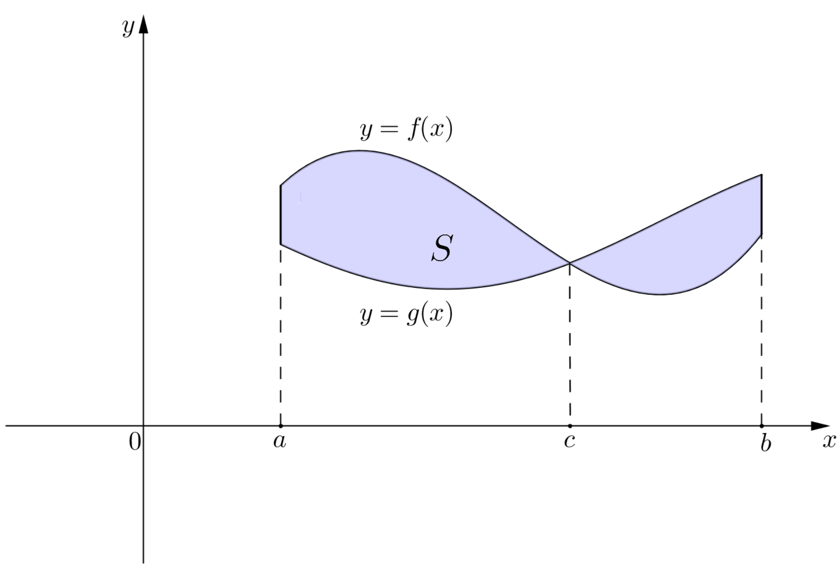
$$P(S_1) = \int_a^b \big(f_1(x) - g_1(x)\big)dx.$$

Kako je $f_1(x)-g_1(x) = \big(f(x)+k\big)-\big(g(x)+k\big) = f(x)-g(x)$ i $P(S) = P(S_1)$, slijedi

$$P(S) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx. \tag{7}$$

(c) Ako se integrabilne funkcije $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sijeku u točki s apscisom $c \in [a, b]$ i ako je $g(x) \leq f(x)$ za svaki $x \in [a, c]$, te $f(x) \leq g(x)$ za svaki $x \in [c, b]$, onda je površina $P(S)$ lika S omeđenog grafovima funkcija f i g, te pravcima $x = a$ i $x = b$ jednaka

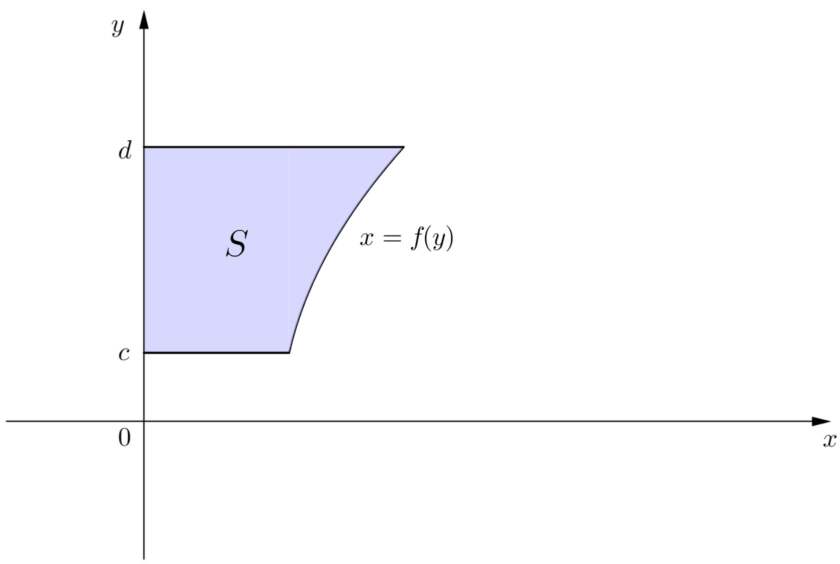
$$P(S) = \int_a^c \big(f(x) - g(x)\big)dx + \int_c^b \big(g(x) - f(x)\big)dx.$$



Slika 10: Površina $P(S)$ lika S

Ako je $x = f(y)$, tj. f je funkcija varijable y, za koju pretpostavljamo da je integrabilna i nenegativna na segmentu $[c, d]$, onda se površina $P(S)$ pseudotrapeza S omeđenog grafom funkcije f, y-osi, te pravcima $y = c$ i $y = d$ računa po formuli

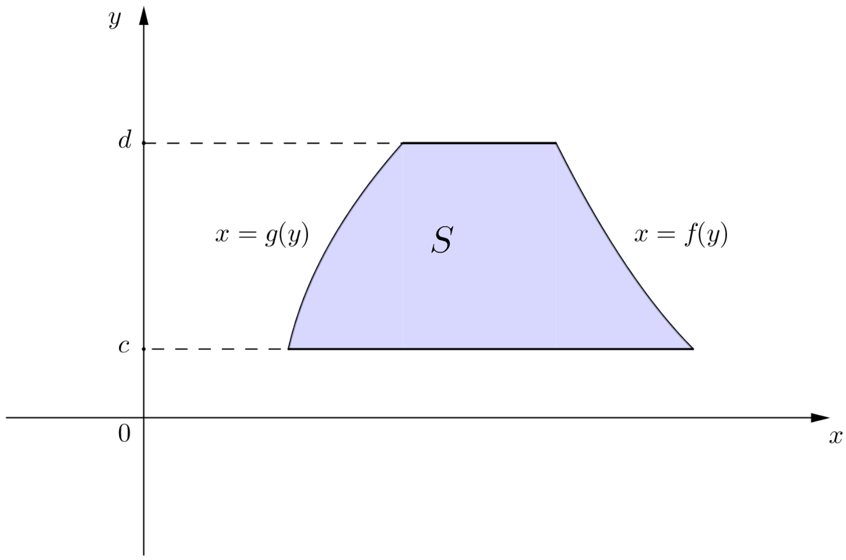
$$P(S) = \int_c^d f(y)dy. \tag{8}$$



Slika 11: Površina $P(S)$ lika S

Općenitije, ako su dane funkcije $x = f(y)$ i $x = g(y)$, integrabilne na segmentu $[c, d]$, te za koje vrijedi $g(y) \leq f(y)$ za svaki $y \in [c, d]$, tada površina $P(S)$ lika S omeđenog grafovima funkcija f i g, te pravcima $y = c$ i $y = d$ iznosi

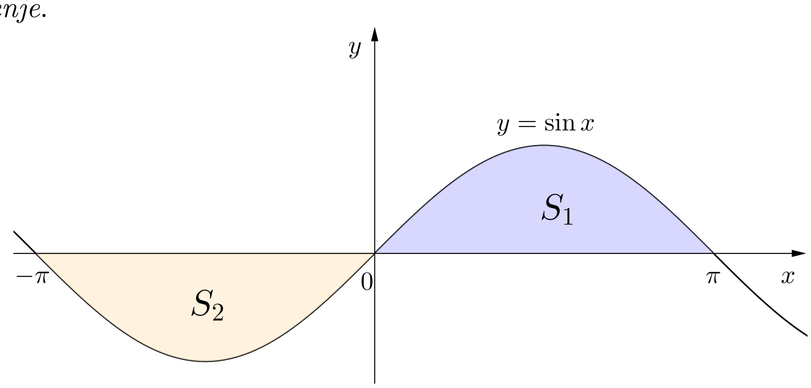
$$P(S) = \int_c^d \big(f(y) - g(y)\big)dy. \tag{9}$$



Slika 12: Površina $P(S)$ lika S

Primjer 1.4.1. Izračunati površinu lika omeđenog jednim valom sinusoide $y = \sin x$ i osi apscisa.

Rješenje.



Slika 13: Područje integracije $S_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$

Svaki od likova S_1 i S_2 omeđen je jednim poluvalom sinusoide $y = \sin x$ i osi x (v. sliku 13). Tražena površina P lika $S = S_1 \cup S_2$ omeđenog jednim valom sinusoide $y = \sin x$ i osi x jednaka je dvostrukoj površini lika S_1. Površinu P_1 lika S_1 izračunat ćemo tako da funkciju $f(x) = \sin x$ integriramo na segmentu $[0, \pi]$. Prema (5), površina iznosi

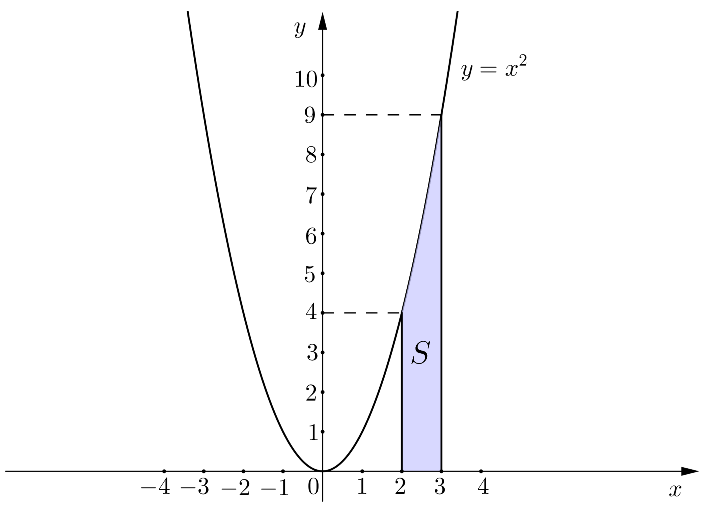
$$P_1 = \int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2.$$

Stoga površina P lika S iznosi $P = 2P_1 = 4$.

Napomenimo da je površinu lika S pogrešno računati kao $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$. Naime, tada bismo dobili $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$, a jasno je da površina ne iznosi nula. Nastala greška je posljedica toga što graf funkcije $y = \sin x$ na segmentu $[-\pi, 0]$ leži ispod osi x pa stoga $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$ nema smisao površine.

Primjer 1.4.2. Izračunati površinu lika omeđenog parabolom $y = x^2$, pravcima $x = 2$, $x = 3$ i osi apscisa.

Rješenje. Traženu površinu izračunat ćemo tako da funkciju $f(x) = x^2$ integriramo na segmentu $[2, 3]$ (v. sliku 14).



Slika 14: Područje integracije $S = \{(x, y) : 2 \le x \le 3,\ 0 \le y \le x^2\}$

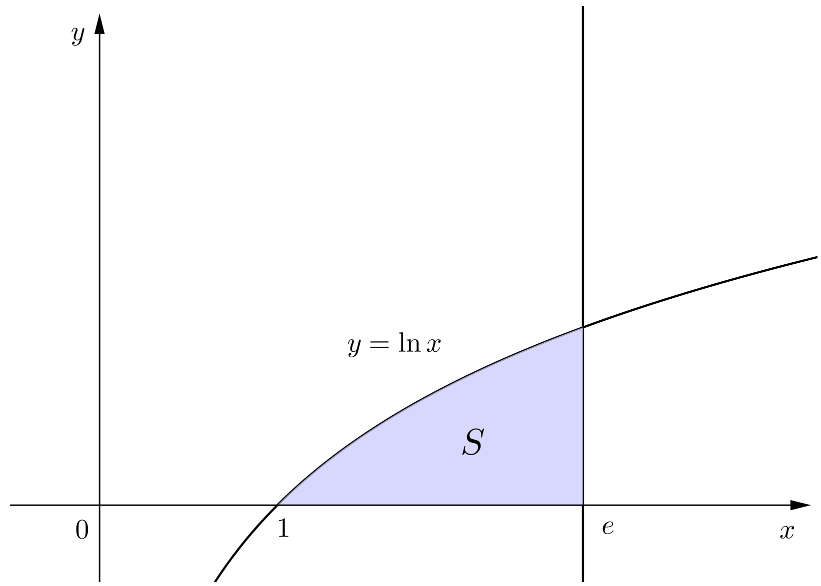
Prema (5), površina iznosi

$$P = \int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_2^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 2^3) = \frac{19}{3}.$$

Primjer 1.4.3. Izračunati površinu lika omeđenog krivuljom $y = \ln x$, pravcem $x = e$ i osi apscisa.

Rješenje.

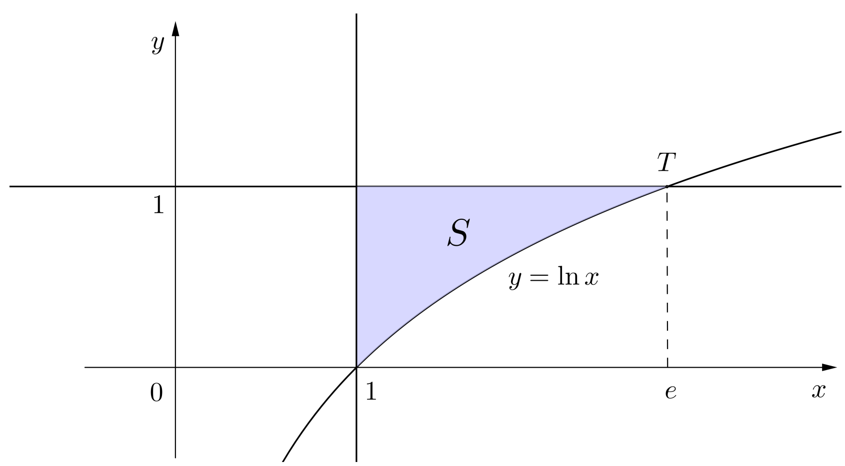
$$P = \int_1^e \ln x dx = (\text{v. primjer 1.3.1 (1.)}) = 1.$$



Slika 15: Područje integracije $S = \big\{(x, y) : 1 \le x \le e,\, 0 \le y \le \ln x\big\}$

Primjer 1.4.4. Izračunati površinu lika omeđenog krivuljom $y = \ln x$, te pravcima $x = 1$ i $y = 1$.

Rješenje. Pravac $y = 1$ siječe krivulju $y = \ln x$ u točki $T(e, 1)$.



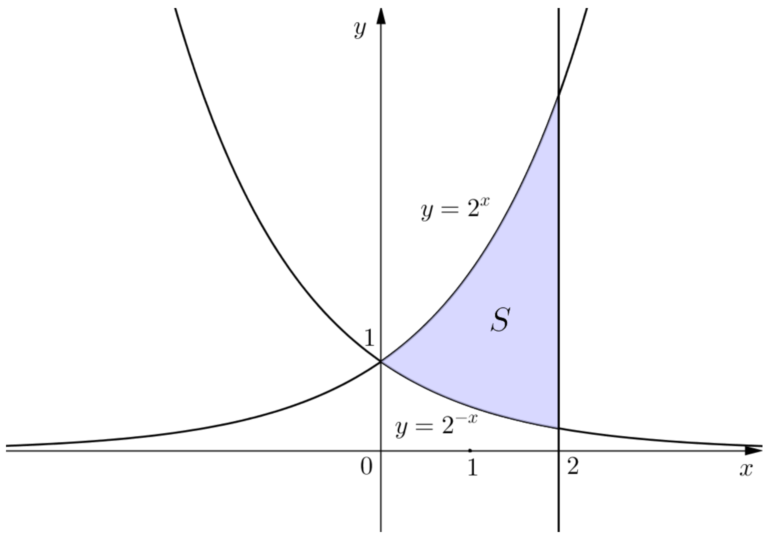
Slika 16: Područje integracije $S = \big\{(x, y) : 1 \le x \le e,\, \ln x \le y \le 1\big\}$

Prema (6), tražena površina iznosi

$$\begin{aligned} P &= \int_1^e (1-\ln x)dx = \int_1^e dx - \int_1^e \ln x dx = (\text{v. primjer 1.3.1 (1.)}) \\ &= x\Big|_1^e - 1 = (e-1) - 1 = e-2. \end{aligned}$$

Primjer 1.4.5. Izračunati površinu lika omeđenog krivuljama $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$ i pravcem $x = 2$.

Rješenje. Krivulje $y = 2^x$ i $y = 2^{-x}$ sijeku se u točki $T(0,1)$ (slika 17).



Slika 17: Područje integracije $S = \left\{(x,y):\, 0 \leq x \leq 2,\, 2^{-x} \leq y \leq 2^x\right\}$

Prema (6), tražena površina iznosi

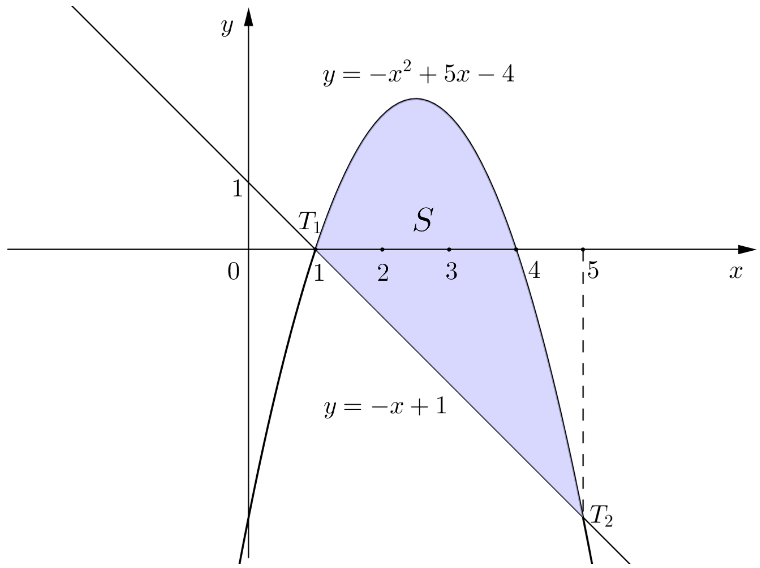
$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 (2^x - 2^{-x})dx = \int_0^2 2^x dx - \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln \frac{1}{2}}\Big|_0^2 \\ &= \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln 2}\Big|_0^2 = \frac{2^2}{\ln 2} - \frac{2^0}{\ln 2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\ln 2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0}{\ln 2} = \frac{9}{4\ln 2}. \end{aligned}$$

Primjer 1.4.6. Izračunati površinu lika omeđenog pravcem $y = -x+1$ i parabolom $y = -x^2 + 5x - 4$.

Rješenje. Nađimo točke presjeka danih krivulja. Vrijedi

$$-x+1 = -x^2+5x-4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0,$$

pa su apscise točaka presjeka rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 6x + 5 = 0$, a to su $x_1 = 1$ i $x_2 = 5$. Odavde je $y_1 = -1 + 1 = 0$ i $y_2 = -5 + 1 = -4$, pa su $T_1(1,0)$ i $T_2(5,-4)$ točke presjeka.



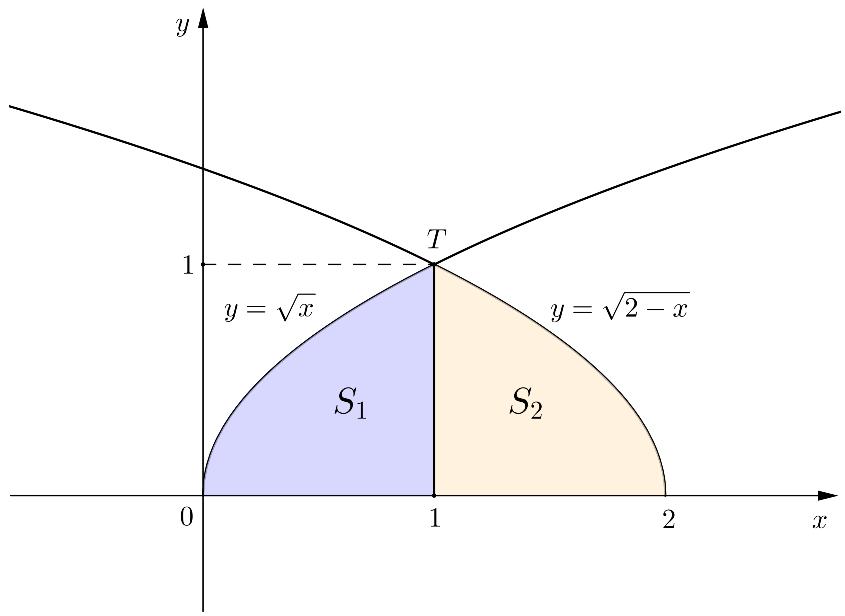
Slika 18: Područje integracije $S = \{(x, y) : -x + 1 \leq y \leq -x^2 + 5x - 4\}$

Uočimo da se za $1 \leq x \leq 5$ parabola $y = -x^2 + 5x - 4$ nalazi iznad pravca $y = -x + 1$ (slika 18), pa je prema formuli (7) tražena površina

$$
\begin{aligned}
P &= \int_1^5 (-x^2 + 5x - 4)dx - \int_1^5 (-x + 1)dx \\
&= \int_1^5 (-x^2 + 5x - 4 + x - 1)dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)dx \\
&= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x\right)\Big|_1^5 = \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25\right) - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right) \\
&= \frac{32}{3}.
\end{aligned}
$$

Primjer 1.4.7. Izračunati površinu lika omeđenog krivuljama $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2 - x}$ i osi apscisa.

Rješenje. Nađimo najprije presjek krivulja $y = \sqrt{x}$ i $y = \sqrt{2 - x}$. Iz $\sqrt{x} = \sqrt{2 - x}$ kvadriranjem slijedi $x = 2 - x$, pa je $x = 1$. Uočimo da je $x = 1$ zaista rješenje jednadžbe $\sqrt{x} = \sqrt{2 - x}$, jer zadovoljava uvjete $x \geq 0$ i $2 - x \geq 0$. Tada je $y = \sqrt{1} = 1$. Dakle, krivulje se sijeku u točki $T(1, 1)$ (slika 19).



Slika 19: Područje integracije $S = S_1 \cup S_2$

Traženu površinu računamo kao zbroj dviju površina P_1 i P_2, pri čemu je P_1 površina lika S_1 omeđenog krivuljom $y = \sqrt{x}$, pravcem $x = 1$ i osi x, a P_2 površina lika S_2 omeđenog krivuljom $y = \sqrt{2-x}$, pravcem $x = 1$ i osi x. Prema tome,

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}, \\ P_2 &= \int_1^2 \sqrt{2-x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = 2-x & x = 1 \Rightarrow t = 2-1 = 1 \\ dt = -dx & x = 2 \Rightarrow t = 2-2 = 0 \end{array} \right| \\ &= -\int_1^0 \sqrt{t}dt = \int_0^1 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Stoga je

$$P = P_1 + P_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Primjer 1.4.8. Izračunati površinu lika omeđenog parabolama $y = 2x^2$, $y = x^2$ i pravcem $y = 2x$.

Rješenje. Nađimo točke presjeka danih krivulja. Parabole $y = 2x^2$ i $y = x^2$ sijeku se u točki $T_1(0,0)$. Nadalje,

$$2x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0,$$

pa se parabola $y = 2x^2$ i pravac $y = 2x$ sijeku u točkama $T_1(0,0)$ i $T_2(1,2)$.

Kako je

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0,$$

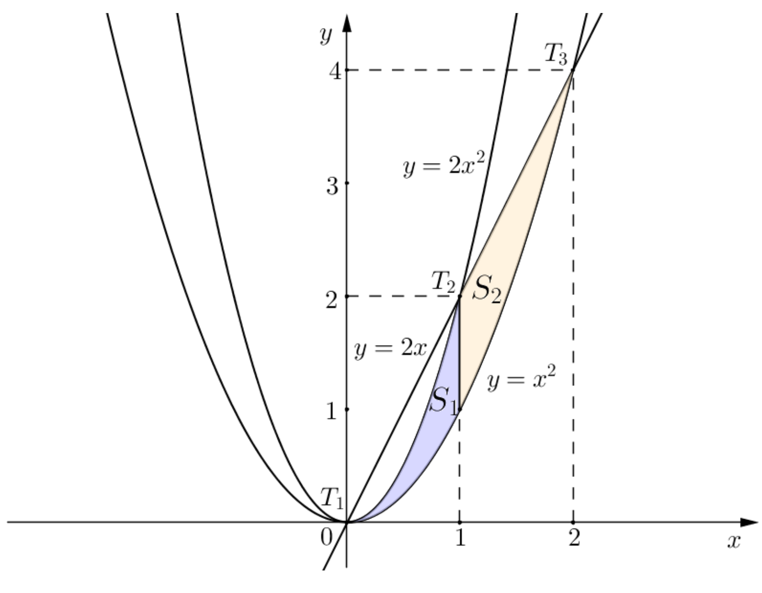
zaključujemo da se parabola $y = x^2$ i pravac $y = 2x$ sijeku u točkama $T_1(0,0)$ i $T_3(2,4)$.

Tražena površina je zbroj površine P_1 lika S_1 omeđenog parabolama $y = 2x^2$ i $y = x^2$ i pravcem $x = 1$, te površine P_2 lika S_2 omeđenog parabolom $y = x^2$ i pravcima $x = 1$ i $y = 2x$ (slika 20).

$$\begin{aligned}
P_1 &= \int_0^1 (2x^2 - x^2)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}, \\
P_2 &= \int_1^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},
\end{aligned}$$

pa je površina lika

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

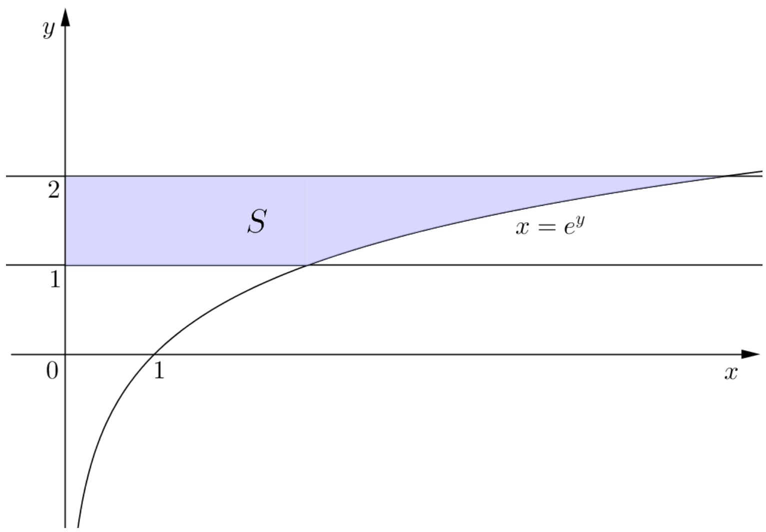


Slika 20: Područje integracije $S = S_1 \cup S_2$

Primjer 1.4.9. Izračunati površinu lika omeđenog krivuljom $y = \ln x$, pravcima $y = 1$ i $y = 2$ i osi y.

Rješenje. Površinu lika izračunat ćemo tako da za varijablu integracije uzmemo y (slika 21). Iz $y = \ln x$ slijedi $x = e^y$. Prema (8), tražena površina iznosi

$$P = \int_1^2 e^y dy = e^y \Big|_1^2 = e^2 - e.$$



Slika 21: Područje integracije $S = \{(x,y) : 1 \le y \le 2,\ 0 \le x \le e^y\}$

Primjer 1.4.10. Izračunati površinu lika omeđenog parabolom $y^2 = 4 - x$ i pravcem $y = -x + 2$.

Rješenje. Nađimo točke presjeka ovih dviju krivulja. Zamjenom $y = -x+2$ u jednadžbi $y^2 = 4 - x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $(-x+2)^2 = 4 - x$, tj. $x^2 - 3x = 0$ čija rješenja su $x_1 = 0$ i $x_2 = 3$. Tada je $y_1 = -x_1 + 2 = 2$ i $y_2 = -x_2 + 2 = -1$. Prema tome, točke presjeka su $T_1(0,2)$ i $T_2(3,-1)$ (slika 22).

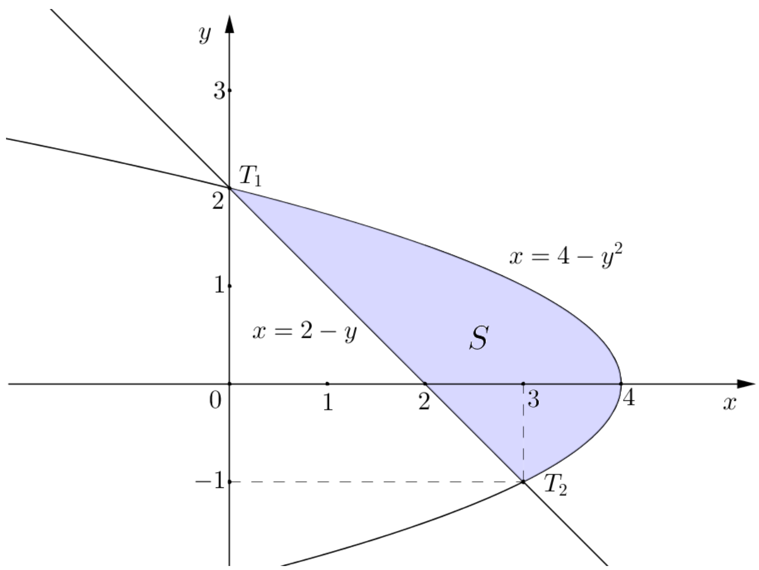
Traženu površinu jednostavnije je izračunati ako za varijablu integracije uzmemo y. Prema (9), tu površinu dobivamo tako da od površine P_1 lika omeđenog parabolom $y^2 = 4-x$, pravcem $y = -1$ i y-osi oduzmemo površinu P_2 trokuta omeđenog pravcima $y = -x+2$, $y = -1$ i y-osi. Potrebno je još izraziti x pomoću y u jednadžbama parabole $y^2 = 4-x$ i pravca $y = -x+2$. Dakle, iz $y^2 = 4 - x$ slijedi $x = 4 - y^2$, dok iz $y = -x + 2$ slijedi $x = 2 - y$. Sada je

$$P_1 = \int_{-1}^2 (4 - y^2) dy,$$

$$P_2 = \int_{-1}^{2} (2-y)dy,$$

pa je

$$\begin{aligned} P &= P_1 - P_2 = \int_{-1}^{2} \big((4-y^2)-(2-y)\big)dy = \int_{-1}^{2} (-y^2+y+2)dy \\ &= \left(-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+2y\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(-\frac{8}{3}+2+4\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



Slika 22: Područje integracije $S = \{(x,y) : -1 \le y \le 2,\ 2-y \le x \le 4-y^2\}$

1.4.2 Površina ravninskog lika omeđenog krivuljama zadanim parametarskim jednadžbama

Neka je funkcija $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, zadana parametarskim jednadžbama

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I,$$

gdje granice intervala I odredimo iz jednadžbi $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$. Pretpostavimo da je $y \ge 0$ za svaki $x \in [a,b]$. Za računanje površine $P(S)$ pseudotrapeza S omeđenog grafom funkcije y, x-osi, te pravcima $x = a$ i $x = b$ koristimo formulu (5). Dakle,

$$P(S) = \int_a^b y(x)dx.$$

Kako je funkcija zadana parametarskim jednadžbama, prelazimo na integraciju po varijabli t, tj. provodimo supstituciju

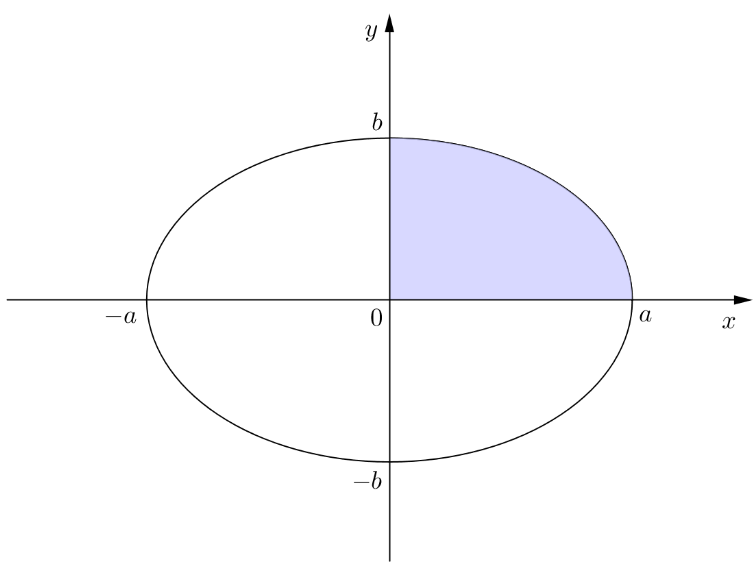
$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ dx &= \dot{x}(t)dt, \end{aligned}$$

gdje $\dot{x}(t)$ označava derivaciju funkcije $t \mapsto x(t)$ po varijabli t. Prema tome,

$$P(S) = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Primjer 1.4.11. Izračunati površinu lika omeđenog elipsom zadanom parametarskim jednadžbama $x(t) = a \sin t$, $y(t) = b \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Rješenje. Površina lika omeđenog elipsom jednaka je četverostrukoj površini lika koji elipsa zatvara s pozitivnim smjerovima koordinatnih osi x i y (slika 23).



Slika 23: Lik omeđen elipsom

Prema formuli (5)

$$P = 4 \int_0^a y(x)dx.$$

Budući da je elipsa zadana parametarskim jednadžbama, moramo prijeći na integraciju po varijabli t. Dakle,

$$x = x(t_1) = 0 \Rightarrow a\sin t_1 = 0 \Rightarrow \sin t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0,$$
$$x = x(t_2) = a \Rightarrow a\sin t_2 = a \Rightarrow \sin t_2 = 1 \Rightarrow t_2 = \tfrac{\pi}{2}.$$

Stoga je

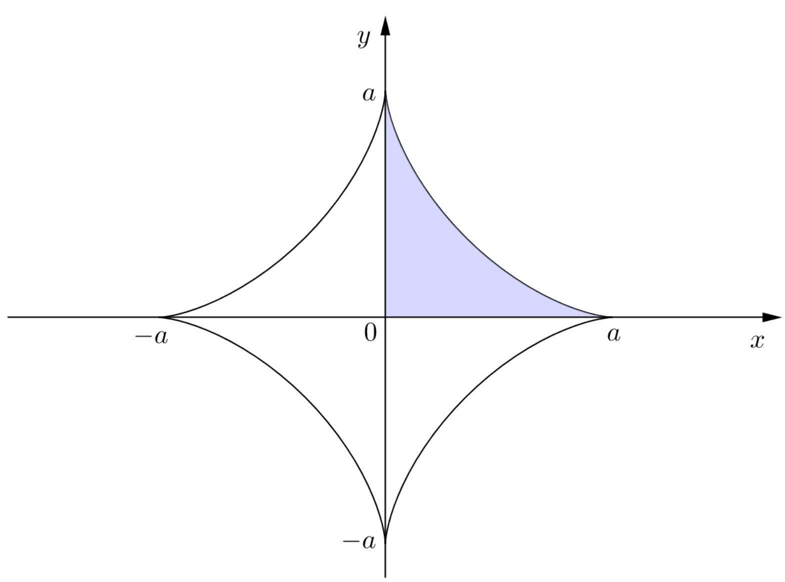
$$P = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Kako je $\dot{x}(t) = a\cos t$, imamo

$$\begin{aligned} P &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\dot{x}(t)dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\cos t\, a\cos t dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\big(1+\cos(2t)\big) = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1+\cos(2t)\big)dt \\ &= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)dt = 2abt\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + ab\sin(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2ab\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + ab(\sin\pi - \sin 0) = ab\pi. \end{aligned}$$

Primjer 1.4.12. Izračunati površinu lika koji omeđuje astroida $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Rješenje. Površina lika omeđenog astroidom jednaka je četverostrukoj površini lika koji astroida zatvara s pozitivnim smjerovima koordinatnih osi x i y (slika 24).



Slika 24: Lik omeđen astroidom

Stoga je tražena površina jednaka

$$P = 4\int_0^a y(x)dx.$$

Prijeđimo na integraciju po varijabli t:

$$x = x(t_1) = 0 \Rightarrow a\cos^3 t_1 = 0 \Rightarrow \cos^3 t_1 = 0 \Rightarrow \cos t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \tfrac{\pi}{2},$$
$$x = x(t_2) = a \Rightarrow a\cos^3 t_2 = a \Rightarrow \cos^3 t_2 = 1 \Rightarrow \cos t_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 0.$$

Dakle,

$$P = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Kako je $\dot{x}(t) = -3a\cos^2 t\sin t$, slijedi

$$\begin{aligned}
(*)\quad P &= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y(t)\dot{x}(t)dt = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)dt\\
&= -12a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 t\cos^2 tdt = 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 tdt\\
&= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t(1-\sin^2 t)dt\\
&= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 tdt - 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 tdt.
\end{aligned}$$

Za izračunavanje integrala $\int \sin^n tdt$, $n \geq 2$, koristimo rekurzivnu formulu

$$\int \sin^n tdt = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} t\cos t + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} tdt.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
(**)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n tdt &= -\frac{1}{n}\sin^{n-1} t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} tdt\\
&= \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} tdt.
\end{aligned}$$

Uvrstimo li $n = 6$ u formulu $(**)$ dobivamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 tdt = \frac{5}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 tdt.$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned}
P &= (*) = 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t dt - 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t dt\\
&= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t dt - 12a^2\cdot\frac{5}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t dt = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t dt\\
&= \big((**) \text{ za } n=4\big) = 2a^2\cdot\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt = \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt\\
&= \big((**) \text{ za } n=2\big) = \frac{3}{2}a^2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 t dt = \frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\\
&= \frac{3}{4}a^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}a^2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{3}{8}a^2\pi.
\end{aligned}$$

Primjer 1.4.13. Izračunati površinu lika omeđenog jednim svodom cikloide $x(t) = a(t-\sin t)$, $y(t) = a(1-\cos t)$ i osi apscisa.

Rješenje. Tražena površina lika (v. sliku 25) jednaka je

$$P = \int_0^{2a\pi} y(x)dx.$$

Prijeđimo na integraciju po varijabli t :

$$x = x(t_1) = 0 \Rightarrow a(t_1 - \sin t_1) = 0 \Rightarrow t_1 - \sin t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0,$$
$$x = x(t_2) = 2a\pi \Rightarrow a(t_2 - \sin t_2) = 2a\pi \Rightarrow t_2 - \sin t_2 = 2\pi \Rightarrow t_2 = 2\pi.$$

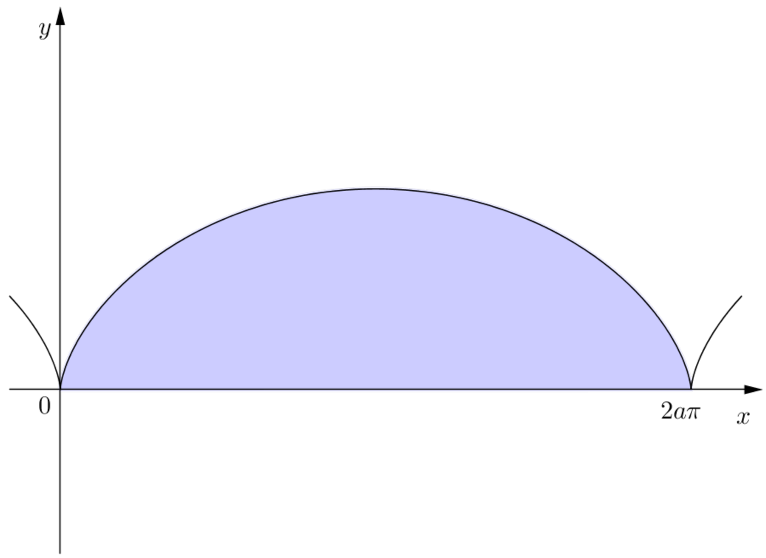
Prema tome,

$$P = \int_0^{2\pi} y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Kako je $\dot{x}(t) = a(1-\cos t)$, slijedi

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{2\pi} y(t)\dot{x}(t)dt = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt\\
&= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt\\
&= a^2\int_0^{2\pi} dt - 2a^2\int_0^{2\pi}\cos t dt + a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt\\
&= a^2 t\Big|_0^{2\pi} - 2a^2\sin t\Big|_0^{2\pi} + a^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\big(1+\cos(2t)\big)dt\\
&= a^2(2\pi-0) - 2a^2\big(\sin(2\pi)-\sin 0\big) + a^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\big(1+\cos(2t)\big)dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2a^2\pi + \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos(2t)dt \\
&= 2a^2\pi + \frac{1}{2}a^2 t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}a^2\sin(2t)\Big|_0^{2\pi} \\
&= 2a^2\pi + \frac{1}{2}a^2(2\pi - 0) + \frac{1}{4}a^2\big(\sin(4\pi) - \sin 0\big) = 3a^2\pi.
\end{aligned}
$$

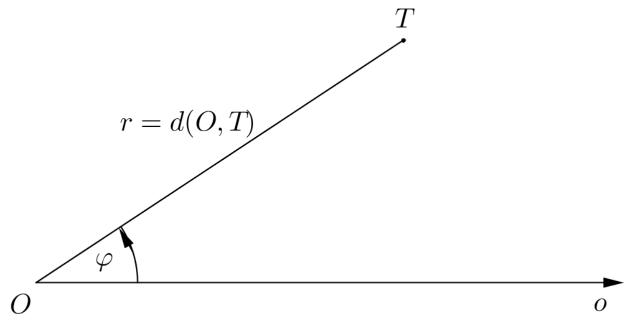


Slika 25: Lik omeđen jednim svodom cikloide i osi apscisa

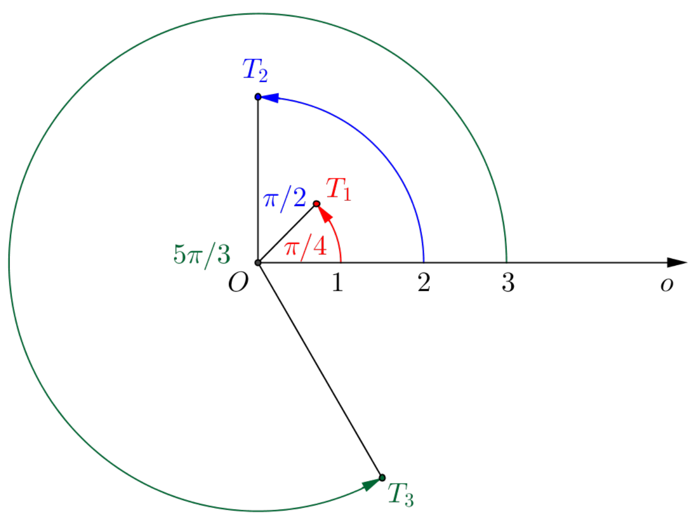
1.4.3 Polarni koordinatni sustav

Osim Kartezijevog koordinatnog sustava, u ravnini se može uvesti i polarni koordinatni sustav.

Neka je O čvrsta točka ravnine i o polupravac s početkom u točki O. Tada je svaka točka T koja pripada ravnini, osim točke O, jednoznačno određena s dva podatka. To su udaljenost $r = d(O,T)$ točke T od točke O, te kut $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$ što ga polupravac OT zatvara s polupravcem o (v. sliku 26). Za točku O je $r = 0$, a kut nije definiran. Točku O zovemo *polom*, a polupravac o *polarnom osi*. Uređeni par (r, φ) zovemo *polarnim koordinatama* točke T. Ovako uveden koordinatni sustav u ravnini nazivamo *polarnim koordinatnim sustavom*.



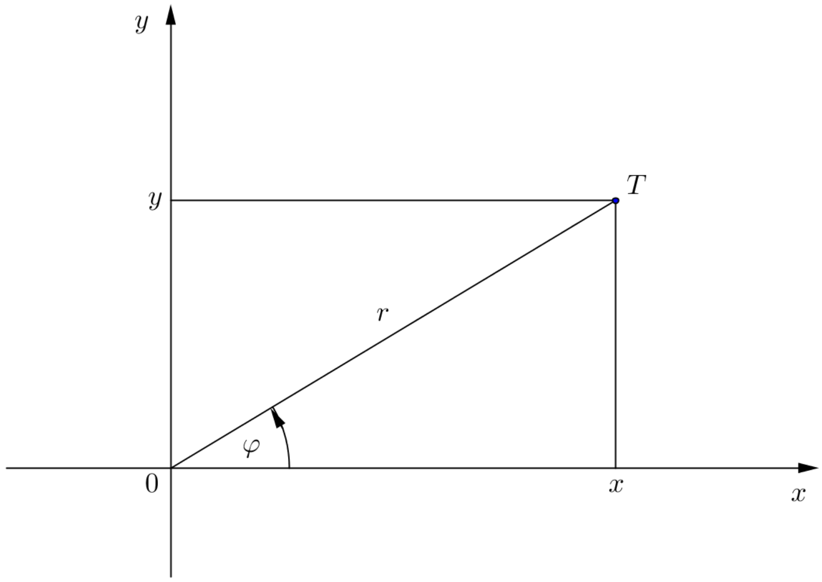
Slika 26: Polarni koordinatni sustav



Slika 27: Točke $T_1(1, \frac{\pi}{4})$, $T_2(2, \frac{\pi}{2})$ i $T_3(3, \frac{5\pi}{3})$ u polarnom koordinatnom sustavu

Veza između pravokutnih i polarnih koordinata točke

Pravokutni i polarni koordinatni sustav izaberemo tako da je pol O polarnog sustava u ishodištu pravokutnog sustava, te da se polarna os o podudara s pozitivnim dijelom osi apscisa.



Slika 28: Veza između pravokutnih i polarnih koordinata točke T

Neka su (x, y) pravokutne, a (r, φ) polarne koordinate točke T u ravnini. Tada je veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana jednadžbama

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

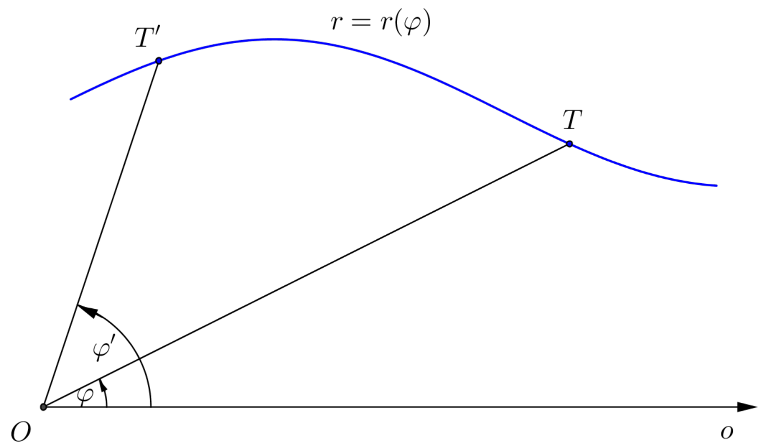
odnosno

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Uočimo da jednadžba $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ ima dva rješenja u intervalu $[0, 2\pi\rangle$, pa je pri određivanju kuta φ potrebno voditi računa o kvadrantu u kojem se nalazi točka T.

Jednadžba krivulje u polarnom koordinatnom sustavu

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcijom $r = r(\varphi)$, $\varphi \in I$, zadaje se krivulja u ravnini u polarnom koordinatnom sustavu. Kako se točka giba po krivulji, tako se mijenja kut φ i u ovisnosti o njemu mijenja se udaljenost točke od pola.



Slika 29: Krivulja $r = r(\varphi)$ u polarnom koordinatnom sustavu

Primjer 1.4.14. Naći jednadžbu pravca $y = 1$ u polarnom koordinatnom sustavu.

Rješenje. Veza između pravokutne koordinate y i polarnih koordinata r i φ dana je jednadžbom $y = r \sin \varphi$, pa jednadžba pravca $y = 1$ u polarnom koordinatnom sustavu glasi $r \sin \varphi = 1$, tj.

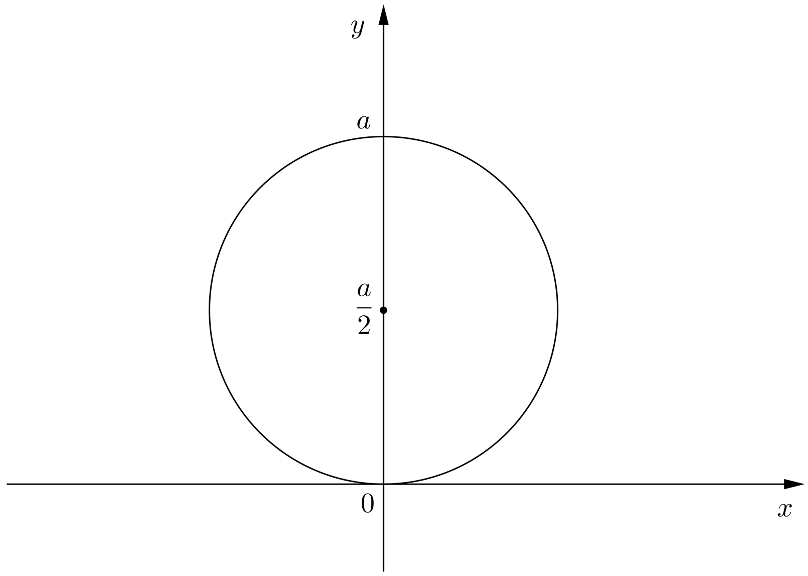
$$r = \frac{1}{\sin \varphi}, \quad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Primjer 1.4.15. Naći jednadžbu kružnice $x^2 + y^2 = 9$ u polarnom koordinatnom sustavu.

Rješenje. Udaljenost r točke od pola izražena pomoću pravokutnih koordinata točke je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, pa je za točke koje leže na zadanoj kružnici $r = 3$. Uočimo da u ovom primjeru r ne ovisi o varijabli φ.

Primjer 1.4.16. Naći jednadžbu kružnice $x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$ $(a > 0)$ u polarnom sustavu.

Rješenje. Ovdje se radi o kružnici polumjera $\frac{a}{2}$ sa središtem u točki $S(0, \frac{a}{2})$.



Slika 30: Kružnica $x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$

Polarnu jednadžbu dobit ćemo koristeći veze $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$ između pravokutnih i polarnih koordinata. Dakle, uvrstimo li x i y izražene pomoću r i φ u jednadžbu kružnice $x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$ dobijemo

$$(r\cos\varphi)^2 + \left(r\sin\varphi - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

odakle slijedi

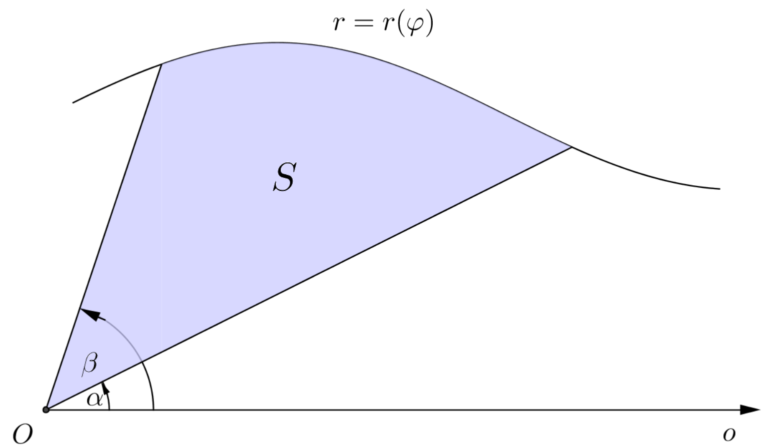
$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - ar\sin\varphi + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4},$$

odnosno $r^2 - ar\sin\varphi = 0$. Podijelimo li ovu jednadžbu s r dobije se jednadžba kružnice u polarnim koordinatama

$$r = a\sin\varphi, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

1.4.4 Površina ravninskog lika omeđenog krivuljama zadanim u polarnim koordinatama

Neka je $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, jednadžba krivulje zadane u polarnim koordinatama, pri čemu je r integrabilna funkcija na segmentu $[\alpha, \beta]$. Zanima nas površina $P(S)$ lika S omeđenog lukom krivulje $r = r(\varphi)$ i polupravcima $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$.



Slika 31: Lik S omeđen s $r = r(\varphi)$, $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$

Da bismo odredili površinu lika S, podijelit ćemo segment $[\alpha, \beta]$ na $n \in \mathbb{N}$ dijelova točkama

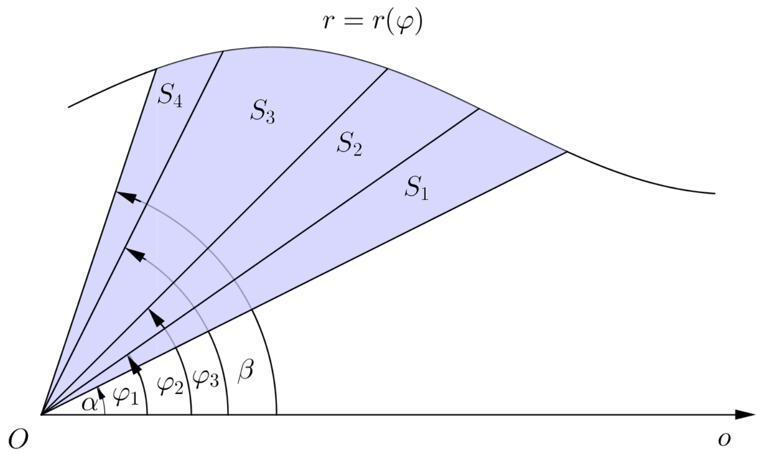
$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta.$$

Označimo s S_i, $i = 1, \ldots, n$, lik omeđen lukom krivulje $r = r(\varphi)$ i polupravcima $\varphi = \varphi_{i-1}$ i $\varphi = \varphi_i$. Tada je površina lika S jednaka zbroju površina likova S_i, $i = 1, \ldots, n$ (slika 32).

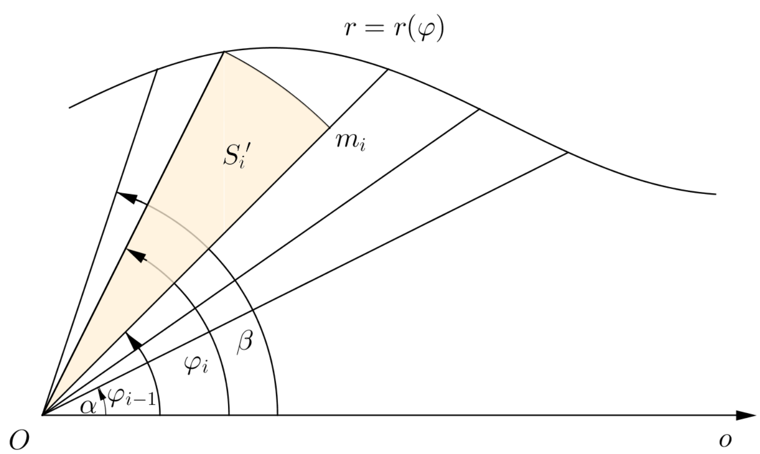
Stavimo

$$m_i = \inf_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} r(\varphi), \quad M_i = \sup_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} r(\varphi), \quad i = 1, \ldots, n.$$

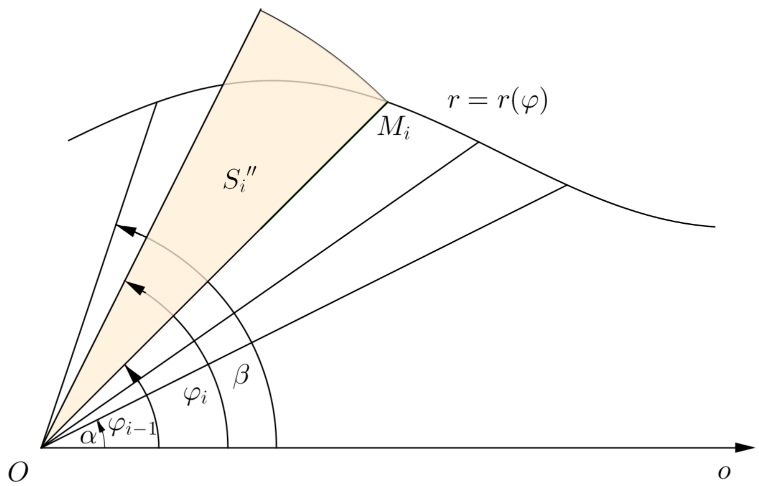
Zatim za svaki $i = 1, \ldots, n$ konstruiramo kružni isječak S_i' polumjera m_i i kuta $\varphi_i - \varphi_{i-1}$ (slika 33), te kružni isječak S_i'' polumjera M_i i kuta $\varphi_i - \varphi_{i-1}$ (slika 34).



Slika 32: Lik S podijeljen na $n = 4$ lika S_i



Slika 33: Kružni isječak S_i' upisan liku S_i



Slika 34: Kružni isječak S_i'' opisan liku S_i

Površina $P(S_i')$ kružnog isječka S_i' upisanog liku S_i iznosi

$$P(S_i') = \frac{1}{2} m_i^2 (\varphi_i - \varphi_{i-1}),$$

dok površina $P(S_i'')$ kružnog isječka S_i'' opisanog liku S_i iznosi

$$P(S_i') = \frac{1}{2} M_i^2 (\varphi_i - \varphi_{i-1}).$$

Zbroj površina svih upisanih kružnih isječaka jednak je

$$\sum_{i=1}^{n} P(S_i') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i^2 (\varphi_i - \varphi_{i-1}),$$

a to je donji integralni zbroj s_Δ funkcije $\varphi \mapsto \frac{1}{2} r^2(\varphi)$ koji odgovara razdiobi $\Delta = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n\}$. Zbroj površina svih opisanih kružnih isječaka jednak je

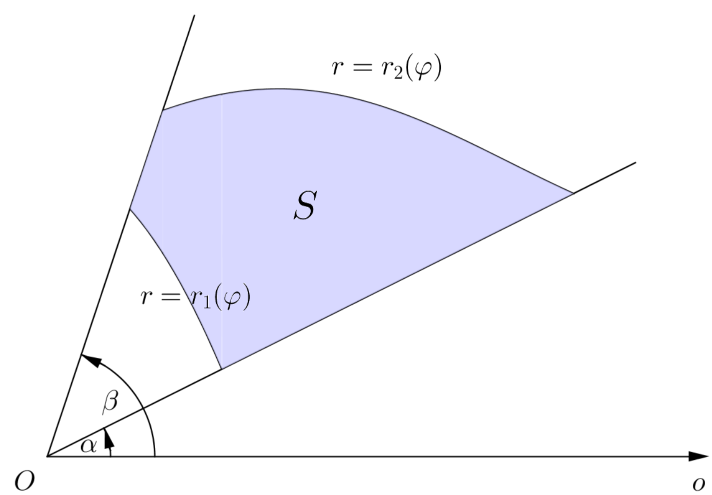
$$\sum_{i=1}^{n} P(S_i'') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} M_i^2 (\varphi_i - \varphi_{i-1}),$$

a to je gornji integralni zbroj S_Δ funkcije $\varphi \mapsto \frac{1}{2} r^2(\varphi)$ koji odgovara istoj razdiobi Δ.

O površini lika S ima smisla govoriti samo u slučaju da postoji razdioba Δ segmenta $[\alpha, \beta]$, takva da je razlika $S_\Delta - s_\Delta$ zbroja površina svih opisanih kružnih isječaka i zbroja površina svih upisanih kružnih isječaka proizvoljno mala, odnosno ako je $\varphi \mapsto \frac{1}{2}r^2(\varphi)$ integrabilna funkcija na $[\alpha, \beta]$. Kako je tada, prema (3), $s_\Delta \leq \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi \leq S_\Delta$, to površinu $P(S)$ lika S definiramo kao

$$P(S) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi. \tag{10}$$

Općenitije, neka su dane dvije krivulje $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$ koje su integrabilne na segmentu $[\alpha, \beta]$, te takve da je $r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$ za svaki $\varphi \in [\alpha, \beta]$ (slika 35).



Slika 35: Lik S omeđen s $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$

Tada se površina $P(S)$ lika S omeđenog krivuljama $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, te polupravcima $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$ dobije tako da od površine $P(S_2)$ lika S_2 omeđenog krivuljom $r = r_2(\varphi)$ i polupravcima $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$ oduzmemo površinu $P(S_1)$ lika S_1 omeđenog krivuljom $r = r_1(\varphi)$ i polupravcima $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$. Prema (10) vrijedi

$$P(S) = P(S_2) - P(S_1) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r_2^2(\varphi)d\varphi - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r_1^2(\varphi)d\varphi,$$

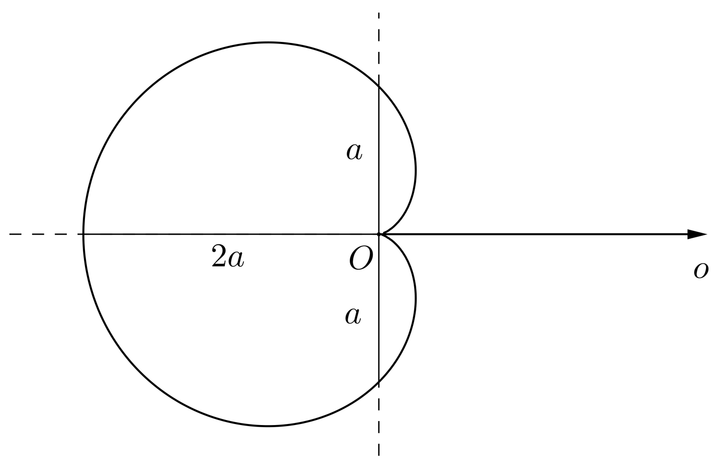
odnosno

$$P(S) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\big(r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)\big)d\varphi.$$

Primjer 1.4.17. Izračunati površinu lika omeđenog kardioidom $r(\varphi) = a(1 - \cos\varphi)$.

Rješenje. Tražena površina lika jednaka je

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\varphi)^2 d\varphi \\ &= \text{(v. primjer 1.4.13)} = \frac{3}{2}\,a^2\pi. \end{aligned}$$

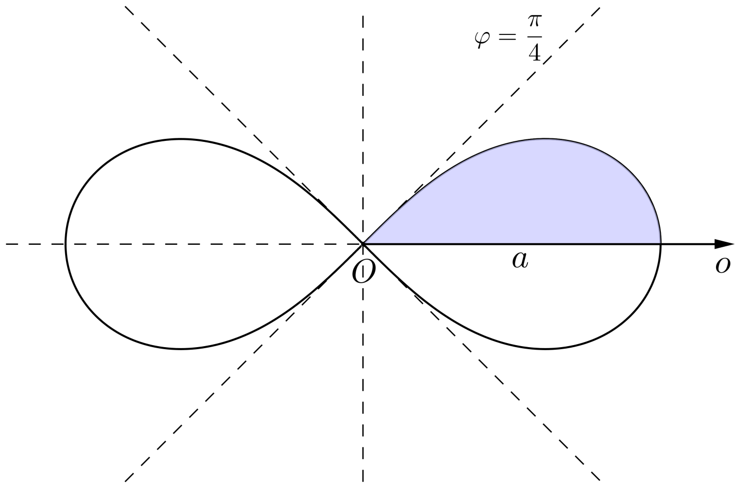


Slika 36: Kardioida $r(\varphi) = a(1 - \cos\varphi)$

Primjer 1.4.18. Izračunati površinu lika omeđenog Bernoullijevom lemniskatom $r^2(\varphi) = a^2\cos(2\varphi)$.

Rješenje. Tražena površina jednaka je četverostrukoj površini dijela lika koji leži u prvom kvadrantu (slika 37).

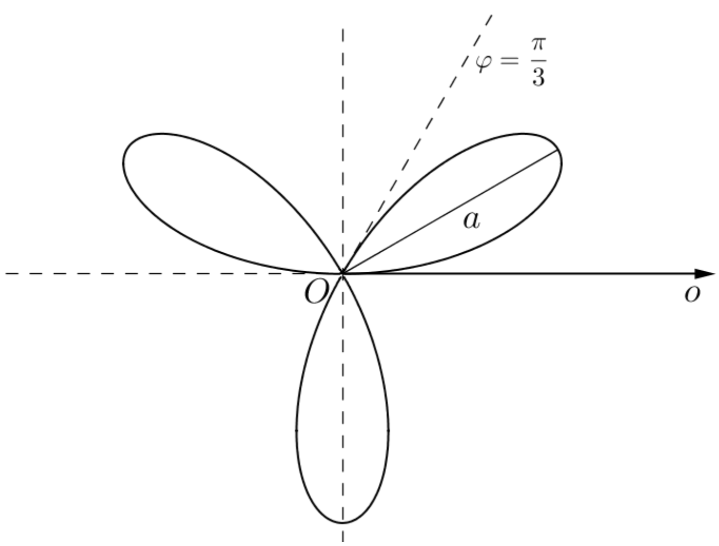
$$\begin{aligned} P &= 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2(\varphi)d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos(2\varphi)d\varphi = 2a^2\cdot\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= a^2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = a^2. \end{aligned}$$



Slika 37: Bernoullijeva lemniskata $r^2(\varphi) = a^2 \cos(2\varphi)$

Primjer 1.4.19. Izračunati površinu lika koji je omeđen krivuljom $r(\varphi) = a\sin(3\varphi)$.

Rješenje. Tražena površina jednaka je trostrukoj površini dijela lika koji leži u prvom kvadrantu (slika 38).



Slika 38: Ruža s tri latice $r(\varphi) = a\sin(3\varphi)$

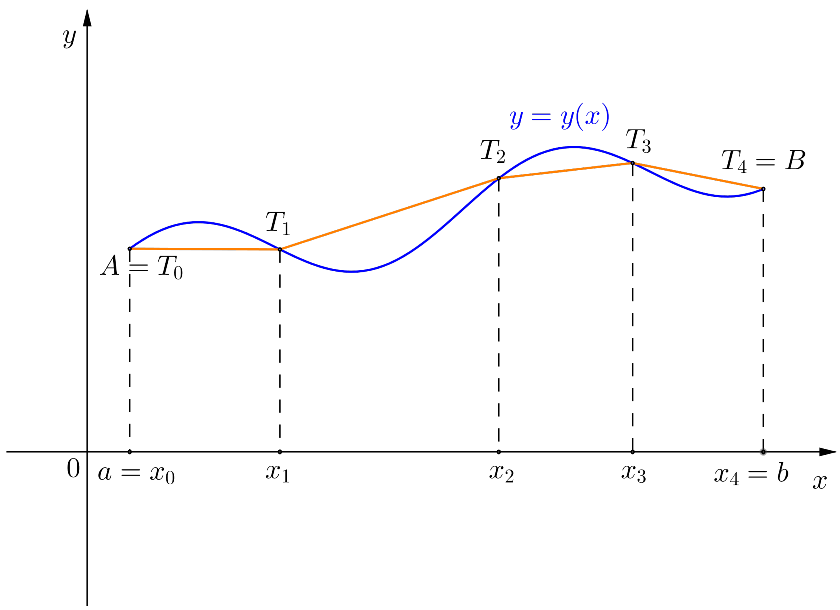
$$\begin{aligned}
P &= 3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2\sin^2(3\varphi)d\varphi \\
&= \frac{3}{2}\,a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\big(1-\cos(6\varphi)\big)d\varphi = \frac{3}{4}\,a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi - \frac{3}{4}\,a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(6\varphi)d\varphi \\
&= \frac{3}{4}\,a^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{3}{4}\,a^2\cdot\frac{1}{6}\sin(6\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{3}{4}\,a^2\left(\frac{\pi}{3}-0\right) - \frac{1}{8}\,a^2\big(\sin(2\pi)-\sin 0\big) = \frac{1}{4}\,a^2\pi.
\end{aligned}$$

1.4.5 Duljina luka krivulje zadane u pravokutnim koordinatama

Neka je dana funkcija $y = y(x)$ koja ima neprekidnu prvu derivaciju na $[a, b]$. Želimo izračunati duljinu l luka krivulje koji spaja točke $A(a, y(a))$ i $B(b, y(b))$. Segment $[a, b]$ podijelimo na $n \in \mathbb{N}$ dijelova točkama

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Zatim povučemo poligonalnu liniju koja spaja točke $T_i(x_i, y(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$, koje leže na našoj krivulji (slika 39).



Slika 39: Poligonalna linija koja spaja točke $T_0, \ldots, T_4$ na krivulji $y = y(x)$

Za svaki $i = 1, \dots, n$ udaljenost točaka T_{i-1} i T_i jednaka je

$$\begin{aligned} d(T_{i-1}, T_i) &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \big(y(x_i) - y(x_{i-1})\big)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Prema Lagrangeovom teoremu o srednjoj vrijednosti, za svaki $i = 1, \dots, n$ postoji $t_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ tako da je

$$\frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = y'(t_i).$$

Stoga je

$$d(T_{i-1}, T_i) = \sqrt{1 + y'(t_i)^2}(x_i - x_{i-1}), \quad 1 = 1, \dots, n.$$

Ako je razdioba $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ dovoljno fina, onda se duljina l luka krivulje može dobro aproksimirati duljinom poligonalne linije kroz točke $A = T_0, T_1, \dots, T_{n-1}, T_n = B$ koja iznosi

$$\sum_{i=1}^{n} d(T_{i-1}, T_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + y'(t_i)^2}(x_i - x_{i-1}). \tag{11}$$

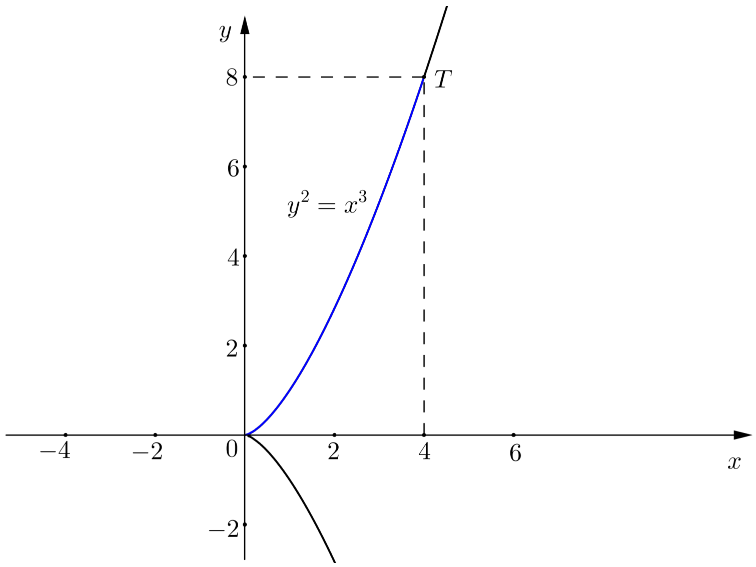
Uočimo da je (11) integralni zbroj σ_Δ (integrabilne) funkcije $x \mapsto \sqrt{1 + y'(x)^2}$ koji odgovara razdiobi Δ. Stoga je duljinu l luka krivulje smisleno definirati kao

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx. \tag{12}$$

Primjer 1.4.20. Izračunati duljinu luka semikubne parabole $y^2 = x^3$ od ishodišta koordinatnog sustava do točke $T(4, 8)$.

Rješenje. Budući da se traži duljina luka dijela krivulje koji leži u prvom kvadrantu, iz $y^2 = x^3$ slijedi $y = x^{\frac{3}{2}}$. Odavde je $y'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Duljina luka iznosi

$$\begin{aligned} l &= \int_0^4 \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx \\ &= \left| \begin{array}{ll} t = 1 + \frac{9}{4}x & x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ dt = \frac{9}{4}dx & x = 4 \Rightarrow t = 10 \\ dx = \frac{4}{9}dt & \end{array} \right| = \frac{4}{9}\int_1^{10} \sqrt{t} dt = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{10} \\ &= \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$



Slika 40: Semikubna parabola $y^2 = x^3$

Primjer 1.4.21. Izračunati duljinu luka krivulje $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ od točke s apscisom $x = 1$ do točke s apscisom $x = e$.

Rješenje. Derivacija dane funkcije iznosi $y'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$, odakle je

$$1 + y'(x)^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) = \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2.$$

Duljina luka je

$$\begin{aligned} l &= \int_1^e \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_1^e \sqrt{\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} dx = \frac{1}{2}\int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x|\right)\Big|_1^e = \left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}\ln e\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 1\right) = \frac{1}{4}(e^2 + 1). \end{aligned}$$

Primjer 1.4.22. Izračunati duljinu luka krivulje $y = \ln x$ od točke s apscisom $x = \sqrt{3}$ do točke s apscisom $x = \sqrt{8}$.

Rješenje. $y'(x) = \frac{1}{x}$, pa duljina luka krivulje iznosi

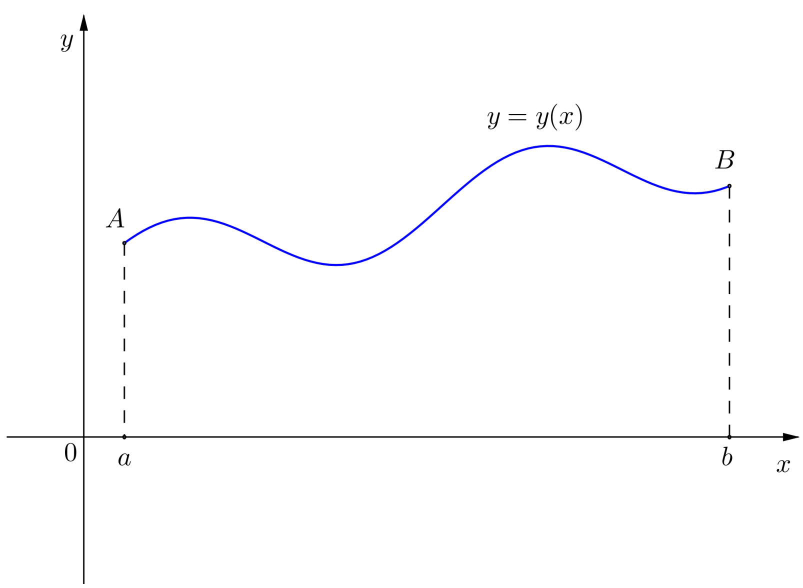
$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{ll} t=\sqrt{x^2+1} & x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2 \\ t^2=x^2+1 & x=\sqrt{8}\Rightarrow t=3 \\ x^2=t^2-1 & \\ xdx=tdt & \\ \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}xdx=\frac{t}{t^2-1}tdt=\frac{t^2}{t^2-1}dt & \end{array} \right| \\
&= \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}dt=\int_2^3 \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt=\int_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt \\
&= \int_2^3 dt+\int_2^3\frac{dt}{t^2-1}=t\Big|_2^3+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^3 \\
&= (3-2)+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

1.4.6 Duljina luka krivulje zadane parametarskim jednadžbama

Neka je funkcija $y=y(x)$, $x\in[a,b]$, zadana parametarskim jednadžbama

$$
\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \quad t\in I.
$$



Slika 41: Krivulja $y=y(x)$ koja spaja točke A i B

Neka je $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$, tj. neka su t_1 i t_2 vrijednosti parametara koje pripadaju krajnjim točkama A i B luka. Pretpostavimo da funkcije $x=x(t)$

i $y = y(t)$ imaju neprekidne prve derivacije na segmentu I koji spaja točke t_1 i t_2, te neka je $t \mapsto x(t)$ strogo rastuća funkcija na I. (Uočimo da je tada $t_1 < t_2$.) Duljinu l luka krivulje $y = y(x)$ računamo pomoću formule (12). Dakle,

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Budući da je funkcija zadana parametarskim jednadžbama, prelazimo na integraciju po varijabli t, tj. provodimo supstituciju

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ dx &= \dot{x}(t)dt. \end{aligned}$$

Nadalje, kako je

$$y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)},$$

dobije se

$$\sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)^2}\, \dot{x}(t)dt = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt.$$

Prema tome, duljina luka krivulje jednaka je

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt. \tag{13}$$

Lako se pokaže da je formula (13) valjana i bez pretpostavke o strogoj monotonosti funkcije $t \mapsto x(t)$, s tim da granice integracije biramo tako da je $t_1 < t_2$.

Primjer 1.4.23. Izračunati duljinu luka krivulje $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$, $y(t) = t^2 + 2$, $t \in [0, 3]$.

Rješenje. Iz

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= t^2 - 1, \\ \dot{y}(t) &= 2t, \end{aligned}$$

slijedi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 &= (t^2 - 1)^2 + (2t)^2 = t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2 = t^4 + 2t^2 + 1 \\ &= (t^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

Duljina luka krivulje je

$$\begin{aligned} l &= \int_0^3 \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = \int_0^3 (t^2 + 1)dt = \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Bigg|_0^3 \\ &= \frac{3^3}{3} + 3 = 12. \end{aligned}$$

Primjer 1.4.24. Izračunati duljinu luka krivulje $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$, $t \in [0, \ln \pi]$.

Rješenje. Iz

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t), \\ \dot{y}(t) &= e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t), \end{aligned}$$

slijedi

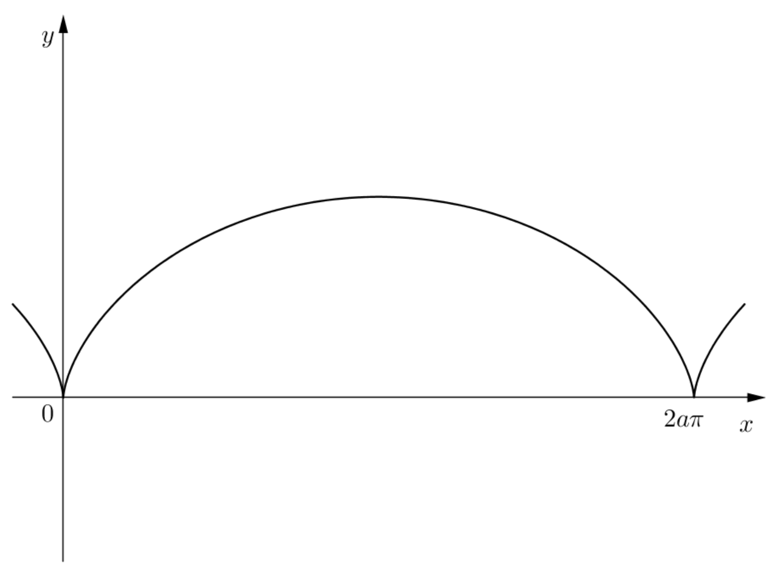
$$\begin{aligned} \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 &= e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 \\ &= e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t) = 2e^{2t}. \end{aligned}$$

Duljina luka krivulje je

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\ln \pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = \int_0^{\ln \pi} \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^{\ln \pi} e^t dt \\ &= \sqrt{2} e^t \Big|_0^{\ln \pi} = \sqrt{2}(e^{\ln \pi} - e^0) = \sqrt{2}(\pi - 1). \end{aligned}$$

Primjer 1.4.25. Izračunati duljinu luka prvog svoda cikloide $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Rješenje.



Slika 42: Cikloida

Iz

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(1 - \cos t), \\ \dot{y}(t) &= a \sin t, \end{aligned}$$

slijedi

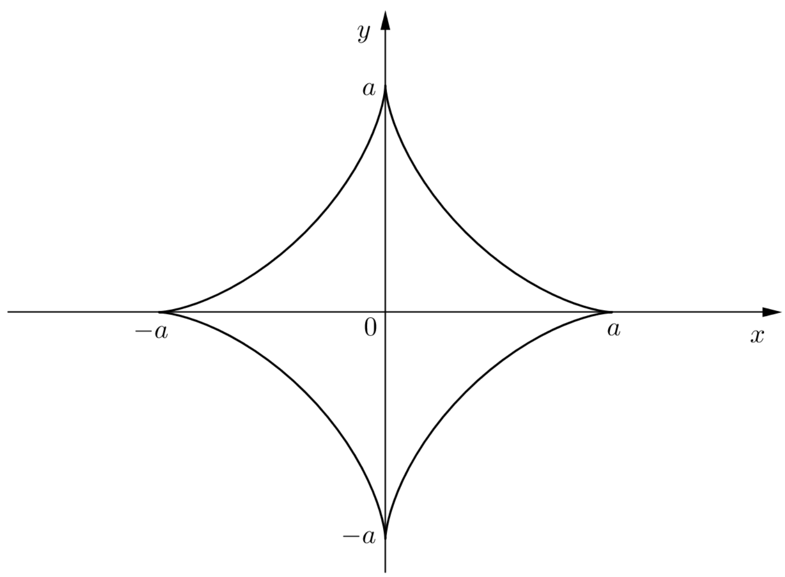
$$\begin{aligned}
\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 &= a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t \\
&= a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2 \sin^2 t \\
&= a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = a^2(2 - 2\cos t) \\
&= 2a^2(1-\cos t) = 2a^2 \cdot 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 4a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right).
\end{aligned}$$

Duljina luka prvog svoda cikloide iznosi

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a.
\end{aligned}$$

Primjer 1.4.26. Izračunati duljinu luka astroide $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Rješenje.



Slika 43: Astroida

Iz

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -3a\cos^2 t \sin t, \\
\dot{y}(t) &= 3a \sin^2 t \cos t,
\end{aligned}$$

slijedi

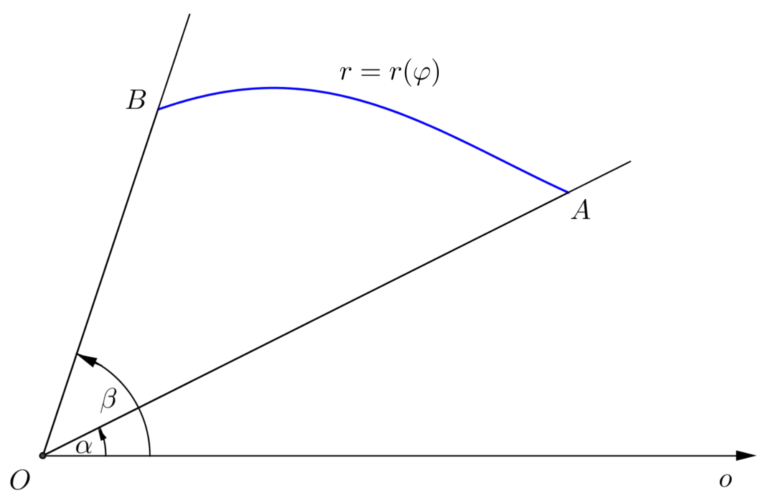
$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 &= 9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t \\
&= 9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) \\
&= 9a^2\cos^2 t\sin^2 t.
\end{aligned}
$$

Duljina luka astroide jednaka je četverostrukoj duljini luka dijela krivulje koji se nalazi u prvom kvadrantu. Dakle,

$$
\begin{aligned}
l &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}\,dt \\
&= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t dt = \left|\begin{array}{cc} s = \sin t & t = 0 \Rightarrow s = 0 \\ ds = \cos t dt & t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow s = 1 \end{array}\right| \\
&= 12a\int_0^1 s ds = 6as^2\Big|_0^1 = 6a.
\end{aligned}
$$

1.4.7 Duljina luka krivulje zadane u polarnim koordinatama

Neka je $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, jednadžba krivulje zadane u polarnim koordinatama, pri čemu funkcija r ima neprekidnu prvu derivaciju na segmentu $[\alpha, \beta]$.



Slika 44: Krivulja $r = r(\varphi)$ koja spaja točke A i B

Veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana je jednadžbama

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi.$$

Za računanje duljine l luka krivulje $r = r(\varphi)$ od točke A na krivulji kojoj odgovara polarni kut α do točke B na krivulji kojoj odgovara polarni kut β koristimo formulu (13), pri čemu ulogu parametra t preuzima varijabla φ. Dakle,

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{y}(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

Računamo

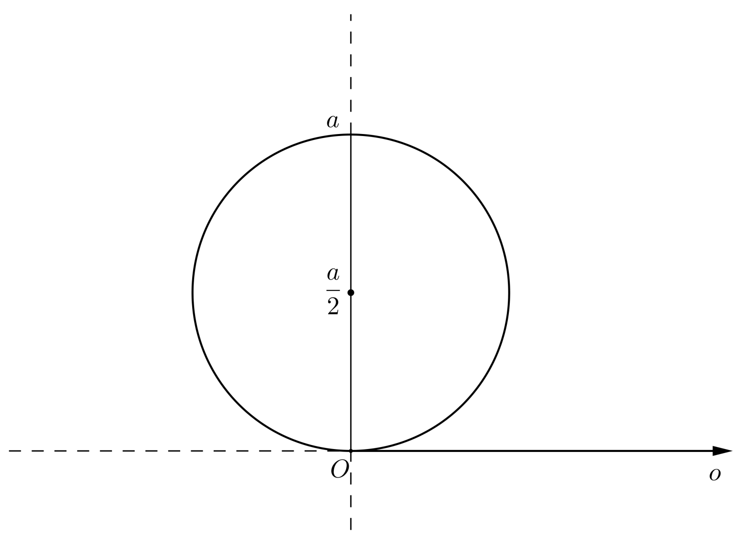
$$\begin{aligned}\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{y}(\varphi)^2 &= \left[\left(r(\varphi)\cos\varphi\right)'\right]^2 + \left[\left(r(\varphi)\sin\varphi\right)'\right]^2 \\ &= \left(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi\right)^2 + \left(r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi\right)^2 \\ &= r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2.\end{aligned}$$

Stoga je duljina l luka krivulje jednaka

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi. \tag{14}$$

Primjer 1.4.27. Izračunati duljinu luka krivulje $r(\varphi) = a\sin\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$.

Rješenje. Uočimo da se ovdje radi o kružnici polumjera $\frac{a}{2}$ sa središtem u točki $S(0, \frac{a}{2})$ (v. primjer 1.4.16). Znamo da je opseg ove kružnice jednak $a\pi$, a sada ćemo ga izračunati pomoću formule (14).



Slika 45: Kružnica $r(\varphi) = a\sin\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$

Vrijedi $r'(\varphi) = a\cos\varphi$ pa je

$$r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2 = a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi = a^2.$$

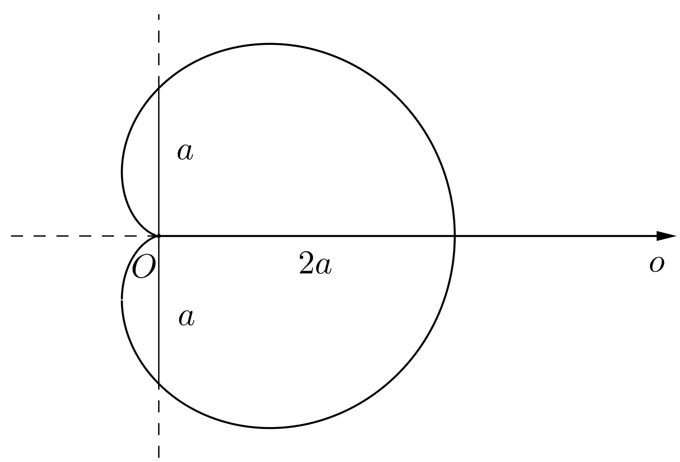
Duljina luka iznosi

$$l = \int_0^\pi \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi = \int_0^\pi \sqrt{a^2}\, d\varphi = a\varphi\Big|_0^\pi = a\pi.$$

Primjer 1.4.28. Izračunati duljinu luka kardioide $r(\varphi) = a(1+\cos\varphi)$.

Rješenje. Kako je $r'(\varphi) = -a\sin\varphi$, slijedi

$$\begin{aligned} r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2 &= a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi \\ &= a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi) + a^2\sin^2\varphi \\ &= a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = a^2(2+2\cos\varphi) \\ &= 2a^2(1+\cos\varphi) = 2a^2\cdot 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 4a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$



Slika 46: Kardioida $r(\varphi) = a(1+\cos\varphi)$

Duljina luka kardioide jednaka je dvostrukoj duljini luka dijela krivulje iznad x-osi. Dakle,

$$\begin{aligned} l &= 2\int_0^\pi \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi = 2\int_0^\pi \sqrt{4a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\, d\varphi \\ &= 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 8a\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 8a. \end{aligned}$$

Primjer 1.4.29. Izračunati duljinu luka krivulje $r(\varphi) = a\sin^3(\frac{\varphi}{3})$, $\varphi \in [0, 3\pi]$.

Rješenje. Kako je $r'(\varphi) = a\sin^2(\frac{\varphi}{3})\cos(\frac{\varphi}{3})$, imamo

$$\begin{aligned} r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2 &= a^2\sin^6\left(\frac{\varphi}{3}\right) + a^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{3}\right)\cos^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) \\ &= a^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{3}\right)\left(\sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right) \\ &= a^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{3}\right). \end{aligned}$$

Duljina luka krivulje iznosi

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{3\pi} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{3}\right)} d\varphi \\ &= a\int_0^{3\pi} \sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) d\varphi = a\int_0^{3\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi \\ &= \frac{a}{2}\int_0^{3\pi} d\varphi - \frac{a}{2}\int_0^{3\pi} \cos\frac{2\varphi}{3} d\varphi = \frac{a}{2}\varphi\Big|_0^{3\pi} - \frac{a}{2}\cdot\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\Big|_0^{3\pi} \\ &= \frac{a}{2}(3\pi - 0) - \frac{3a}{4}\big(\sin(2\pi) - \sin 0\big) = \frac{3}{2}a\pi. \end{aligned}$$

1.4.8 Volumen rotacijskog tijela

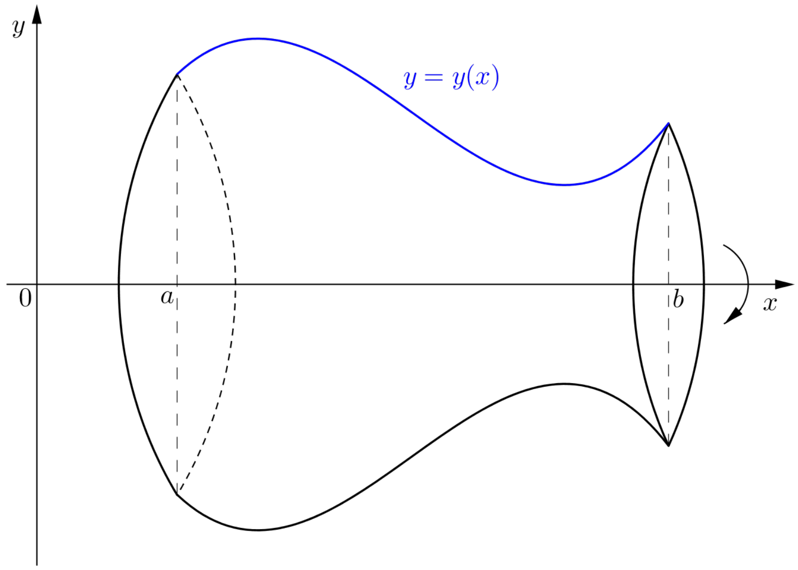
Neka je $y = y(x)$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$. Želimo izračunati volumen $V(S)$ *rotacijskog* tijela S nastalog rotacijom oko osi x lika omeđenog grafom funkcije $y = y(x)$ te pravcima $x = a$ i $x = b$ i osi x.

U tu svrhu podijelit ćemo segment $[a, b]$ na $n \in \mathbb{N}$ dijelova točkama

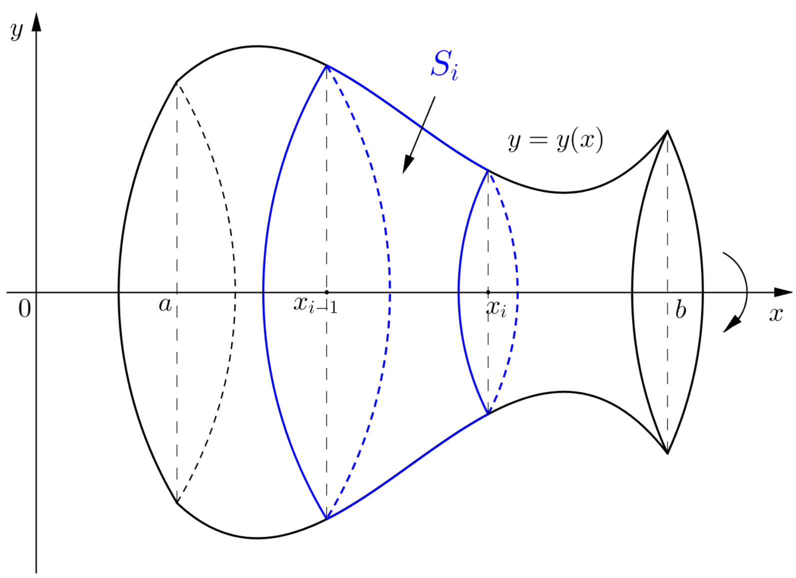
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Zatim rotacijsko tijelo presiječemo ravninama $x = x_i$, $i = 0, \ldots, n$, koje su okomite na os x. Primijetimo da su presjeci krugovi polumjera $|y(x_i)|$, $i = 0, \ldots, n$. Ovim smo ravninama podijelili rotacijsko tijelo na n dijelova S_i volumena $V(S_i)$, $i = 1, \ldots, n$, pa je

$$V(S) = V(S_1) + \cdots + V(S_n).$$



Slika 47: Rotacijsko tijelo S



Slika 48: Rotacijsko tijelo S podijeljeno na dijelove S_i

Stavimo

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} |y(x)|, \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |y(x)|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sada svakom tijelu S_i upišemo valjak S_i' čija je baza krug polumjera m_i, a visina iznosi $x_i - x_{i-1}$, te oko svakog tijela S_i opišemo valjak S_i'' s bazom polumjera M_i i visinom $x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$.
Volumeni $V(S_i')$ upisanih valjaka, te volumeni $V(S_i'')$ opisanih valjaka iznose

$$V(S_i') = m_i^2 \pi (x_i - x_{i-1}), \quad V(S_i'') = M_i^2 \pi (x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n.$$

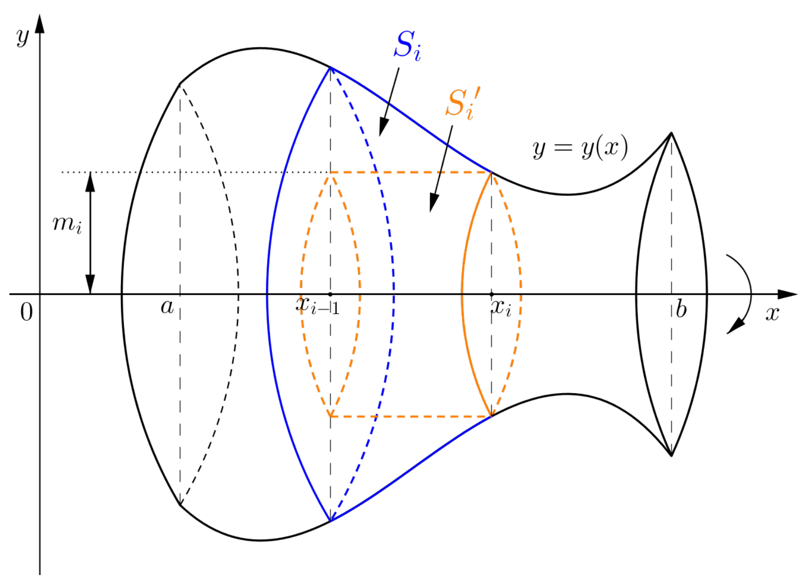
Zbroj volumena svih upisanih valjaka jednak je

$$\sum_{i=1}^{n} V(S_i') = \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \pi (x_i - x_{i-1}) = s_\Delta,$$

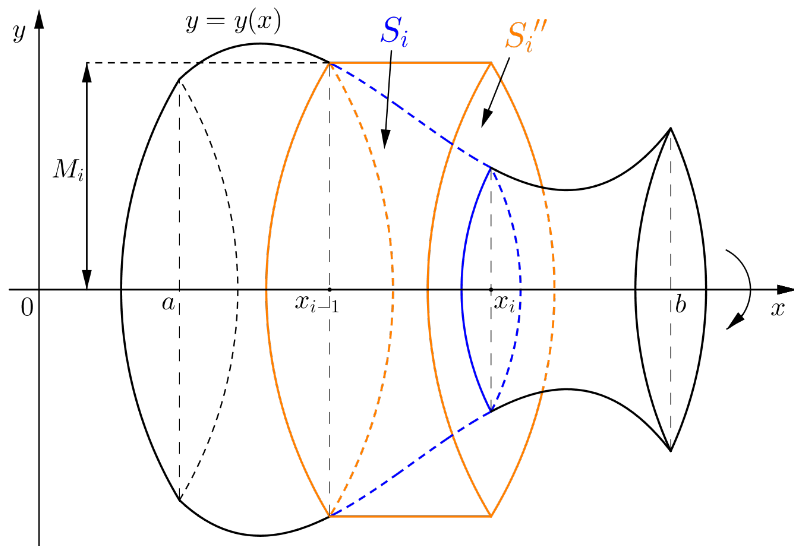
a to je donji integralni zbroj funkcije $x \mapsto y^2(x)\pi$ koji odgovara razdiobi $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$. Zbroj volumena svih opisanih valjaka iznosi

$$\sum_{i=1}^{n} V(S_i'') = \sum_{i=1}^{n} M_i^2 \pi (x_i - x_{i-1}) = S_\Delta,$$

a to je gornji integralni zbroj funkcije $x \mapsto y^2(x)\pi$ koji odgovara razdiobi Δ.



Slika 49: Valjak S_i' upisan tijelu S_i



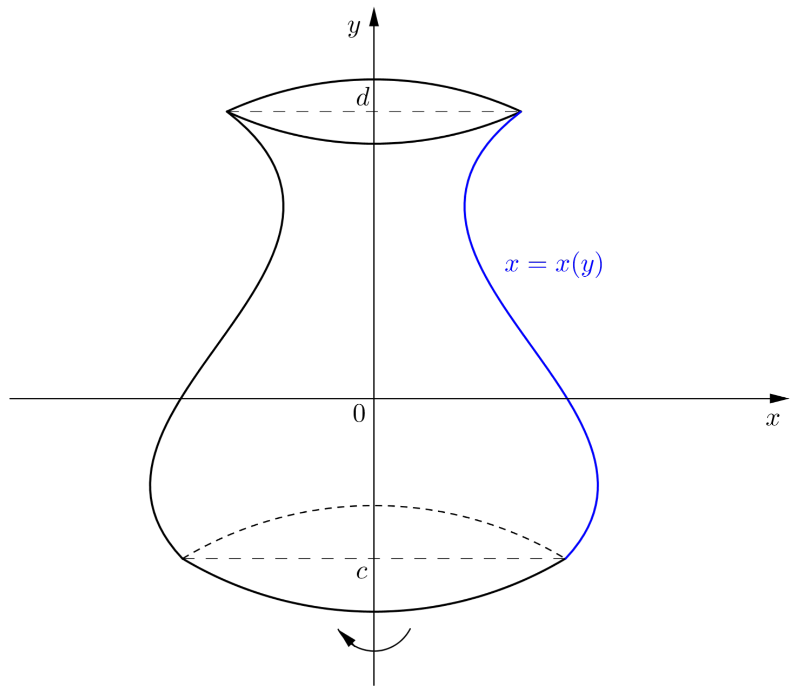
Slika 50: Valjak S_i'' opisan tijelu S_i

O volumenu rotacijskog tijela S ima smisla govoriti samo u slučaju da postoji razdioba Δ segmenta $[a, b]$, takva da je razlika $S_\Delta - s_\Delta$ zbroja volumena svih opisanih valjaka i zbroja volumena svih upisanih valjaka proizvoljno mala, a to je onda ako je funkcija $x \mapsto y^2(x)\pi$ integrabilna na segmentu $[a, b]$. Tada je, prema (3), $s_\Delta \leq \int_a^b y^2(x)\pi dx \leq S_\Delta$, pa volumen $V(S)$ rotacijskog tijela S definiramo kao

$$V(S) = \pi \int_a^b y^2(x)dx. \tag{15}$$

Ako je $x = x(y)$ neprekidna funkcija varijable y na segmentu $[c, d]$, onda volumen $V(S)$ rotacijskog tijela S nastalog rotacijom oko osi y lika omeđenog grafom funkcije $x = x(y)$ te pravcima $y = c$ i $y = d$ i osi y iznosi

$$V(S) = \pi \int_c^d x^2(y)dy. \tag{16}$$

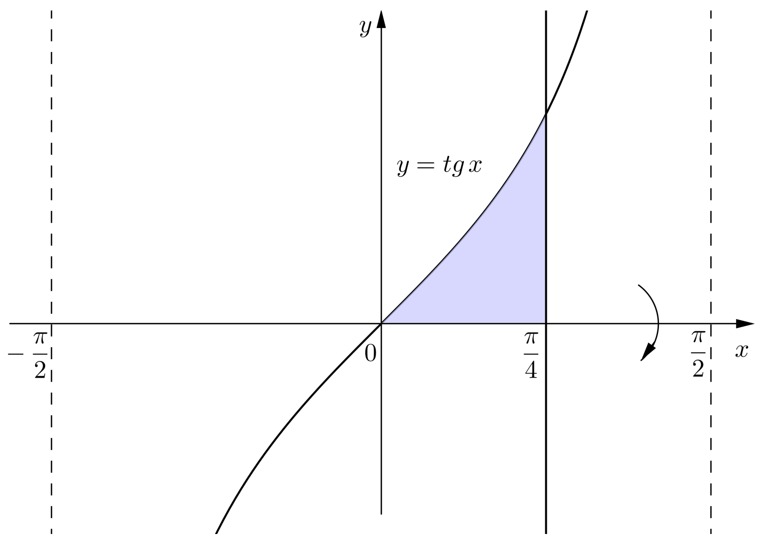


Slika 51: Rotacijsko tijelo S

Primjer 1.4.30. Izračunati volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi x lika omeđenog krivuljom $y = \operatorname{tg} x$, pravcem $x = \frac{\pi}{4}$ i osi x.

Rješenje. Prema formuli (15), volumen rotacijskog tijela je

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} y^2(x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \pi \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \pi x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \pi \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 \right) - \pi \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \pi - \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$



Slika 52: Rotacija lika oko osi x

Primjer 1.4.31. Izračunati volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog elipsom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(a) oko osi x,

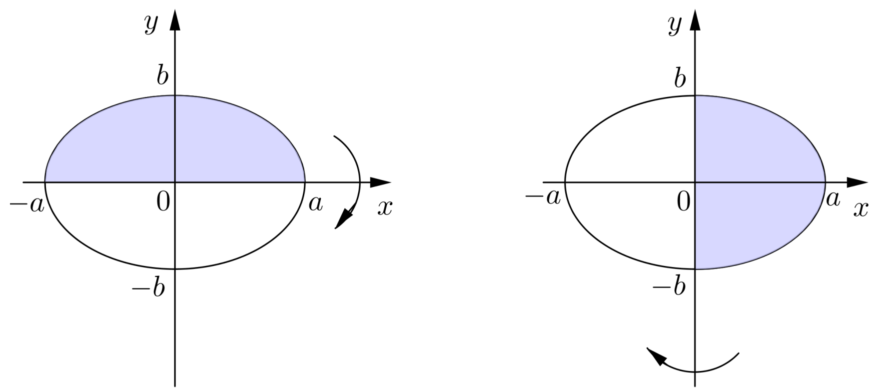
(b) oko osi y.

Rješenje. (a) Izrazimo li u jednadžbi elipse y^2 pomoću x dobijemo $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$, pa prema formuli (15) volumen rotacijskog tijela iznosi

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^{a} y^2(x)dx = \pi \int_{-a}^{a} \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right) dx = \pi \left(b^2x - \frac{b^2}{3a^2}x^3\right)\Big|_{-a}^{a} \\ &= \pi \left(b^2a - \frac{b^2}{3a^2}a^3\right) - \pi \left(b^2(-a) - \frac{b^2}{3a^2}(-a)^3\right) = \frac{4}{3}\pi ab^2. \end{aligned}$$

(b) Ako u jednadžbi elipse x^2 izrazimo pomoću y, dobijemo $x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2$. Sada je, prema formuli (16), volumen rotacijskog tijela jednak

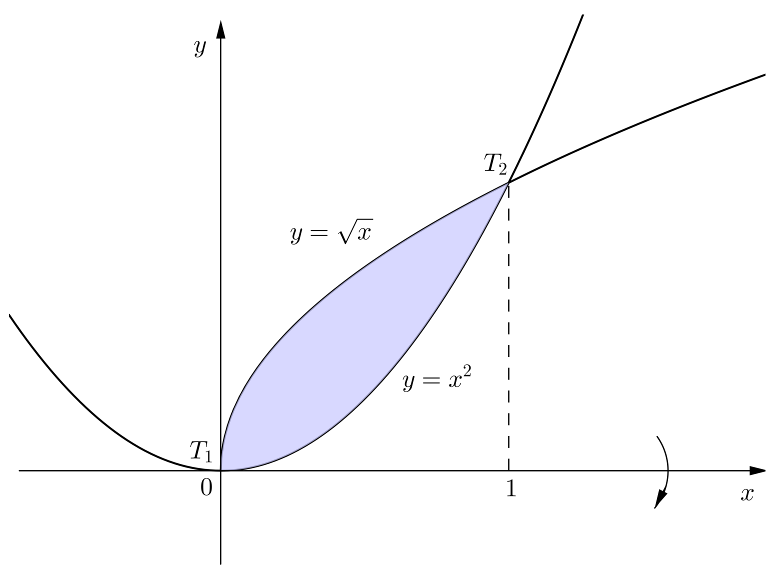
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-b}^{b} x^2(y)dy = \pi \int_{-b}^{b} \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2\right) dy = \pi \left(a^2y - \frac{a^2}{3b^2}y^3\right)\Big|_{-b}^{b} \\ &= \pi \left(a^2b - \frac{a^2}{3b^2}b^3\right) - \pi \left(a^2(-b) - \frac{a^2}{3b^2}(-b)^3\right) = \frac{4}{3}\pi a^2b. \end{aligned}$$



Slika 53: Rotacija lika omeđenog elipsom oko osi x i oko osi y

Primjer 1.4.32. Izračunati volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi x lika omeđenog krivuljama $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.

Rješenje. Nađimo točke presjeka krivulja $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$. Iz $x^2 = \sqrt{x}$ slijedi $x^4 = x$, odnosno $x(x^3 - 1) = 0$. Stoga se krivulje sijeku u točkama $T_1(0, 0)$ i $T_2(1, 1)$.



Slika 54: Rotacija lika oko osi x

Traženi volumen je razlika volumena V_1 tijela koje nastaje rotacijom oko osi x lika omeđenog krivuljom $y = \sqrt{x}$, pravcem $x = 1$ i osi x i volumena V_2 tijela koje nastaje rotacijom oko osi x lika omeđenog parabolom $y = x^2$, pravcem $x = 1$ i osi x.

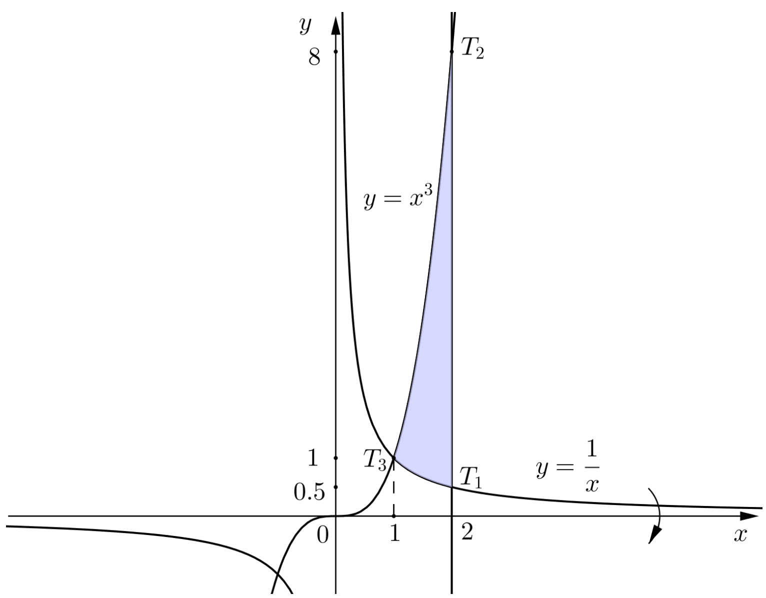
$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^1 y^2(x)dx = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}\pi x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi, \\ V_2 &= \pi \int_0^1 y^2(x)dx = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}\pi x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{5}\pi, \end{aligned}$$

pa je traženi volumen

$$V = V_1 - V_2 = \frac{3}{10}\pi.$$

Primjer 1.4.33. Izračunati volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi x lika omeđenog krivuljama $y = \frac{1}{x}$, $y = x^3$ i $x = 2$.

Rješenje. Pravac $x = 2$ siječe krivulju $y = \frac{1}{x}$ u točki $T_1(2, \frac{1}{2})$, a krivulju $y = x^3$ u točki $T_2(2, 8)$. Uočimo da se krivulje $y = \frac{1}{x}$ i $y = x^3$ sijeku u točkama $T_3(1, 1)$ i $T_4(-1, -1)$.



Slika 55: Rotacija lika oko osi x

Traženi volumen dobije se kao razlika volumena V_1 tijela koje nastaje rotacijom oko osi x lika omeđenog krivuljom $y = x^3$, pravcima $x = 1$, $x = 2$

i osi x i volumena V_2 tijela koje nastaje rotacijom oko osi x lika omeđenog krivuljom $y = \frac{1}{x}$, pravcima $x = 1$ i $x = 2$ te osi x.

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_1^2 y^2(x)dx = \pi \int_1^2 (x^3)^2 dx = \pi \int_1^2 x^6 dx = \frac{1}{7}\pi x^7 \Big|_1^2 = \frac{127}{7}\pi, \\ V_2 &= \pi \int_1^2 y^2(x)dx = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 x^{-2} dx = -\pi \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2}\pi, \end{aligned}$$

pa traženi volumen iznosi

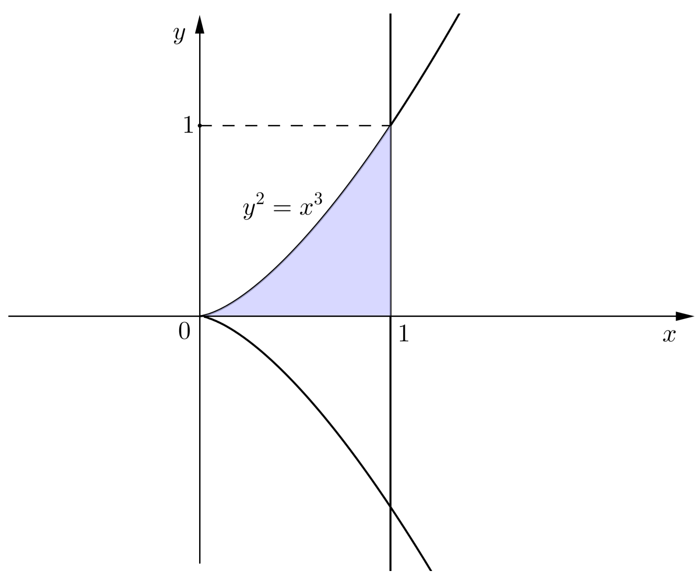
$$V = V_1 - V_2 = \frac{247}{14}\pi.$$

Primjer 1.4.34. Izračunati volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog semikubnom parabolom $y^2 = x^3$, pravcem $x = 1$ i osi x

(a) oko osi x,

(b) oko osi y.

Rješenje.



Slika 56: Rotacija lika oko osi x i oko osi y

(a) Volumen rotacijskog tijela iznosi

$$V = \pi \int_0^1 y^2(x)dx = \pi \int_0^1 x^3 dx = \pi \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}\pi.$$

(b) Volumen rotacijskog tijela je razlika volumena V_1 valjka nastalog rotacijom oko osi y kvadrata omeđenog koordinatnim osima, te pravcima $x = 1$ i $y = 1$ i volumena V_2 tijela nastalog rotacijom oko osi y lika omeđenog semikubnom parabolom $y^2 = x^3$, pravcem $y = 1$ i osi y.

$$V_1 = \pi \int_0^1 x^2(y)dy = \pi \int_0^1 1dy = \pi y\Big|_0^1 = \pi.$$

Iz $y^2 = x^3$ slijedi $x^2 = y^{\frac{4}{3}}$, pa je

$$V_2 = \pi \int_0^1 x^2(y)dy = \pi \int_0^1 y^{\frac{4}{3}}dy = \frac{3}{7}\pi y^{\frac{7}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{7}\pi.$$

Stoga traženi volumen iznosi

$$V = V_1 - V_2 = \frac{4}{7}\pi.$$

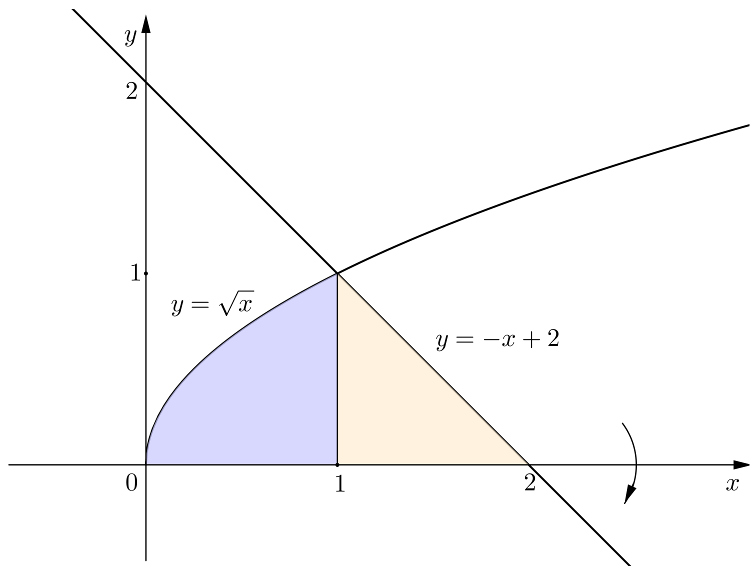
Primjer 1.4.35. Izračunati volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi x lika omeđenog krivuljama $y = \sqrt{x}$, $y = -x + 2$ i $y = 0$.

Rješenje. Nađimo presjek krivulje $y = \sqrt{x}$ i pravca $y = -x + 2$. Iz $\sqrt{x} = -x + 2$ slijedi $x = (-x + 2)^2$, tj. $x^2 - 5x + 4 = 0$. Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = 1$ i $x_2 = 4$. Međutim, uočimo da $x_2 = 4$ nije rješenje jednadžbe $\sqrt{x} = -x + 2$. Stoga se $y = \sqrt{x}$ i $y = -x + 2$ sijeku jedino u točki s apscisom $x_1 = 1$ i ordinatom $y_1 = -x_1 + 2 = 1$. Traženi volumen jednak je zbroju volumena V_1 tijela koje nastaje rotacijom oko osi x lika omeđenog krivuljom $y = \sqrt{x}$, pravcem $x = 1$ te osi x i volumena V_2 tijela koje nastaje rotacijom oko osi x lika omeđenog pravcima $y = -x + 2$ i $x = 1$ te osi x.

$$\begin{aligned}
V_1 &= \pi \int_0^1 y^2(x)dx = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}\pi x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi, \\
V_2 &= \pi \int_1^2 y^2(x)dx = \pi \int_1^2 (-x + 2)^2 dx = \pi \int_1^2 (x^2 - 4x + 4)dx \\
&= \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right)\pi\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\pi,
\end{aligned}$$

pa je traženi volumen

$$V = V_1 + V_2 = \frac{5}{6}\pi.$$



Slika 57: Rotacija lika oko osi x

2 Nepravi integral

Pri definiranju određenog integrala funkcije f na segmentu $[a,b]$ zahtijevali smo da f bude omeđena funkcija. Sada uvodimo pojam integrala funkcije f na intervalu $[a,\infty\rangle$, $\langle-\infty,b]$, $\langle-\infty,\infty\rangle$; odnosno integrala od f na $[a,b]$, $[a,b\rangle$, $\langle a,b]$ ili $\langle a,b\rangle$, pri čemu je f neomeđena funkcija u okolini neke točke $c\in\langle a,b\rangle$, ili u nekoj od rubnih točaka a i b. Takve integrale zvat ćemo *nepravim integralima*.

2.1 Integrali s beskonačnim granicama

Neka je funkcija $f:[a,\infty\rangle\to\mathbb{R}$ integrabilna na svakom segmentu $[a,b]$, $b\in\mathbb{R}$, $b>a$. Ako postoji konačni limes

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

onda se taj limes zove *nepravi integral* funkcije f na $[a,\infty\rangle$ i označava s

$$\int_a^\infty f(x)dx.$$

Tada kažemo da integral $\int_a^\infty f(x)dx$ *konvergira*.

Ako je $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx=\infty$, kažemo da integral $\int_a^\infty f(x)dx$ *divergira k* ∞, a ako je $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx=-\infty$, kažemo da integral $\int_a^\infty f(x)dx$ *divergira k* $-\infty$.

Ako $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ ne postoji, kažemo da integral $\int_a^\infty f(x)dx$ *divergira*.

Analogno se definira nepravi integral funkcije $f:\langle-\infty,b]\to\mathbb{R}$, integrabilne na svakom segmentu $[a,b]$, $a\in\mathbb{R}$, $a<b$. Naime,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx:=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

ukoliko taj limes postoji.

Također, za funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, integrabilnu na svakom segmentu $[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, definiramo nepravi integral

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx:=\int_{-\infty}^c f(x)dx+\int_c^\infty f(x)dx,$$

ukoliko oba integrala $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ i $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ konvergiraju. Pritom za c uzimamo proizvoljan realan broj. (Pokazuje se da definicija ne ovisi o izboru broja c.)

Primjer 2.1.1. Ispitati konvergenciju integrala $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

Rješenje. Primijetimo da je funkcija $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ neprekidna, pa stoga i integrabilna na svakom segmentu $[0, b]$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Računamo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Prema tome, integral konvergira.

Primjer 2.1.2. Ispitati konvergenciju integrala $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.

Rješenje. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ je neprekidna, pa stoga i integrabilna na svakom segmentu $[1, b]$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$. Računamo

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} (\ln|b| - \ln 1) = \infty.$$

Prema tome, integral divergira k ∞.

Primjer 2.1.3. Ispitati konvergenciju integrala $\int_0^\infty \sin x dx$.

Rješenje. Funkcija $f(x) = \sin x$ je neprekidna, pa stoga i integrabilna na svakom segmentu $[0, b]$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Računamo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin x dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \sin x dx = \lim_{b\to\infty} (-\cos x) \Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} (-\cos b + \cos 0) \\ &= 1 - \lim_{b\to\infty} \cos b. \end{aligned}$$

Budući da ne postoji $\lim_{b\to\infty} \cos b$, zaključujemo da integral divergira.

Primjer 2.1.4. Ispitati konvergenciju integrala $\int_{-\infty}^2 e^x dx$.

Rješenje. Funkcija $f(x) = e^x$ je neprekidna, pa stoga i integrabilna na svakom segmentu $[a, 2]$, $a \in \mathbb{R}$, $a < 2$. Računamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^2 e^x dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^2 e^x dx = \lim_{a\to-\infty} e^x \Big|_a^2 = \lim_{a\to-\infty} (e^2 - e^a) \\ &= e^2 - \lim_{a\to-\infty} e^a = e^2 - 0 = e^2. \end{aligned}$$

Dakle, integral konvergira.

Primjer 2.1.5. Ispitati konvergenciju integrala $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x} dx$.

Rješenje. Funkcija $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ je neprekidna, pa stoga i integrabilna na svakom segmentu $[1, b]$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$. Računamo

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x}\, dx = \left| \begin{array}{ll} t = \ln x & x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ dt = \frac{dx}{x} & x = b \Rightarrow t = \ln b \end{array} \right| \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^{\ln b} t dt = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{\ln b} = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} (\ln^2 b - 0) = \infty. \end{aligned}$$

Dakle, integral divergira k ∞.

Primjer 2.1.6. Ispitati konvergenciju integrala $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+9}$.

Rješenje. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2+9}$ je neprekidna, pa stoga i integrabilna na svakom segmentu $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Računamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+9} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+9} + \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+9} \\ &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2+9} + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+9} \\ &= \lim_{a\to-\infty} \left.\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right|_a^0 + \lim_{b\to\infty} \left.\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right|_0^b \\ &= \frac{1}{3} \lim_{a\to-\infty} \left(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}\frac{a}{3}\right) + \frac{1}{3} \lim_{b\to\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{b}{3} - \operatorname{arctg} 0\right) \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg}\frac{a}{3} + \frac{1}{3} \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{b}{3} \\ &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Prema tome, integral konvergira.

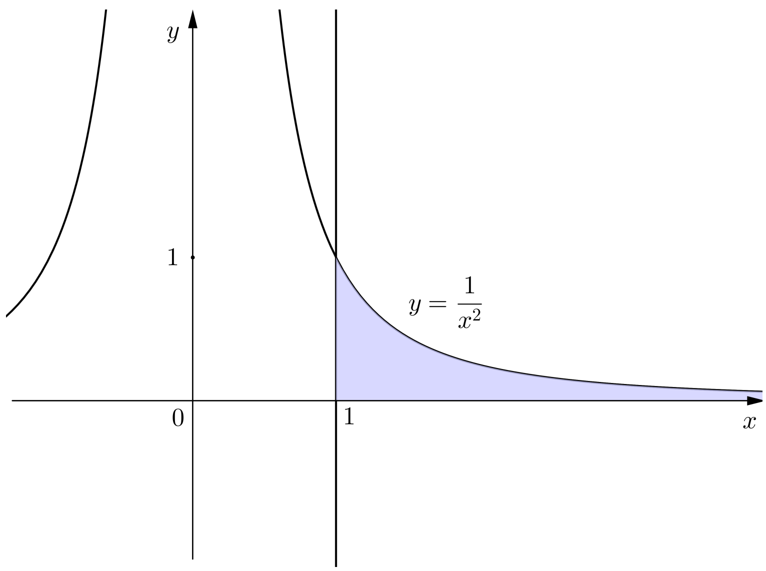
Primjer 2.1.7. Izračunati površinu lika u ravnini određenog nejednadžbama $y \le \frac{1}{x^2}$, $x \ge 1$ i $y \ge 0$.

Rješenje. Lik čiju površinu želimo izračunati skiciran je na slici 58. Neka je $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$. Označimo s P_b površinu lika omeđenog grafom funkcije $y = \frac{1}{x^2}$, pravcima $x = 1$ i $x = b$ te osi x. Tada je, prema formuli (5),

$$P_b = \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Ako postoji $\lim_{b\to\infty} P_b$, onda je prirodno površinu P zadanog lika definirati kao $P = \lim_{b\to\infty} P_b$, što je zapravo nepravi integral funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $[1, \infty\rangle$. Prema tome,

$$P = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1.$$

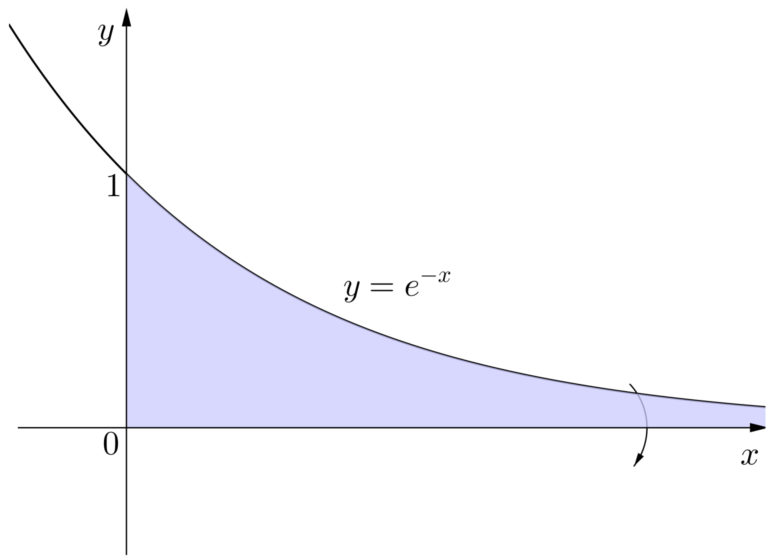


Slika 58: $S = \left\{(x, y) : y \leq \frac{1}{x^2}, x \geq 1, y \geq 0\right\}$

Primjer 2.1.8. Izračunati volumen tijela nastalog rotacijom oko osi x lika određenog nejednadžbama $y \leq e^{-x}$, $x \geq 0$ i $y \geq 0$.

Rješenje. Tijelo čiji volumen želimo izračunati nastaje rotacijom oko osi x lika skiciranog na slici 59. Budući da se radi o rotaciji neomeđenog lika, volumen V rotacijskog tijela računamo pomoću nepravog integrala, tj. kao $\lim_{b\to\infty} V_b$, gdje je $V_b = \pi \int_0^b y^2(x)dx$ volumen rotacijskog tijela nastalog rotacijom oko osi x lika omeđenog krivuljom $y(x) = e^{-x}$, pravcima $x = 0$ i $x = b$ te osi x. Prema tome,

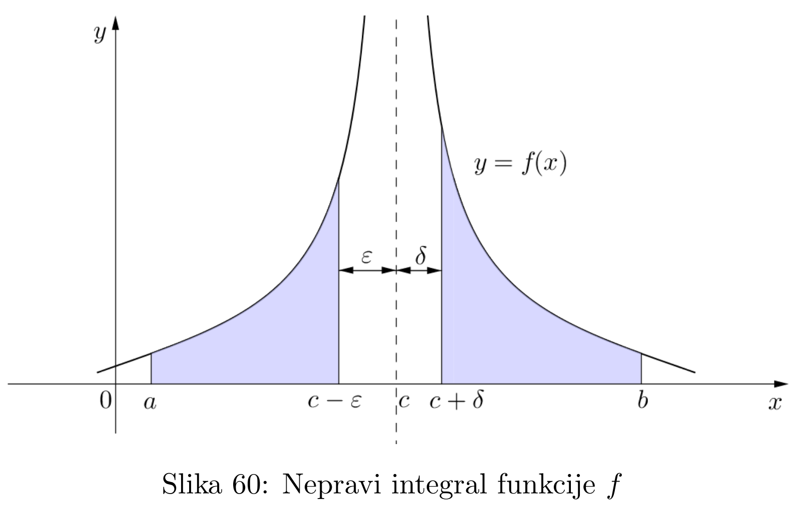
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\infty y^2(x)dx = \pi \int_0^\infty e^{-2x}dx = \pi \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-2x}dx \\ &= \pi \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{2}\, e^{-2x}\Big|_0^b = -\frac{\pi}{2} \lim_{b\to\infty} (e^{-2b} - e^0) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



Slika 59: $S = \left\{(x, y) : y \le e^{-x}, x \ge 0, y \ge 0\right\}$

2.2 Integrali neomeđene funkcije

Neka je funkcija $f : [a, c\rangle \cup \langle c, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na svakom segmentu $[a, c-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, sadržanom u intervalu $[a, c\rangle$ i integrabilna na svakom segmentu $[c+\delta, b]$, $\delta > 0$, sadržanom u intervalu $\langle c, b]$, te neomeđena u svakoj okolini točke c (slika 60).



Slika 60: Nepravi integral funkcije f

Tada se *nepravi integral* funkcije f na $[a,b]$, u oznaci $\int_a^b f(x)dx$, definira kao

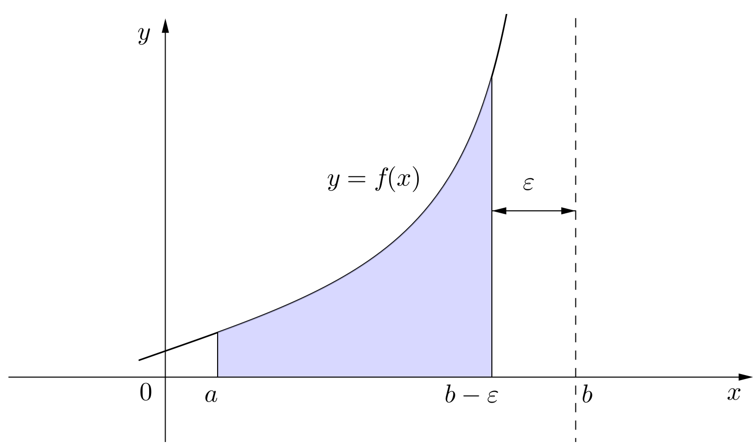
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0+}\int_{c+\delta}^b f(x)dx, \tag{17}$$

pod uvjetom da oba limesa postoje. Tada kažemo da integral $\int_a^b f(x)dx$ *konvergira.* Ako barem jedan od ovih limesa ne postoji, kažemo da integral $\int_a^b f(x)dx$ *divergira.*

Ako je funkcija $f : [a,b\rangle \to \mathbb{R}$ integrabilna na svakom segmentu $[a,b-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, sadržanom u intervalu $[a,b\rangle$, te ako je f neomeđena u svakoj okolini točke b, tada se nepravi integral od f na $[a,b\rangle$ definira kao

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \tag{18}$$

pod uvjetom da taj limes postoji (slika 61).

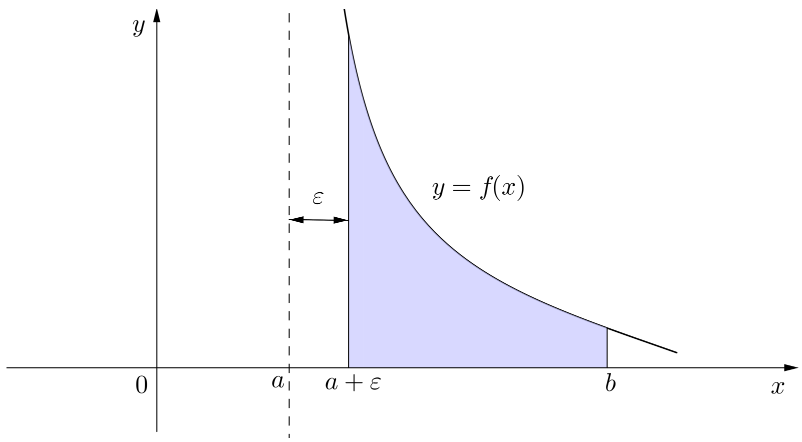


Slika 61: Nepravi integral funkcije f

Ako je funkcija $f : \langle a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na svakom segmentu $[a+\varepsilon,b]$, $\varepsilon > 0$, sadržanom u intervalu $\langle a,b]$, te ako je f neomeđena u svakoj okolini točke a, tada se nepravi integral od f na $\langle a,b]$ definira kao

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \tag{19}$$

pod uvjetom da taj limes postoji (slika 62).

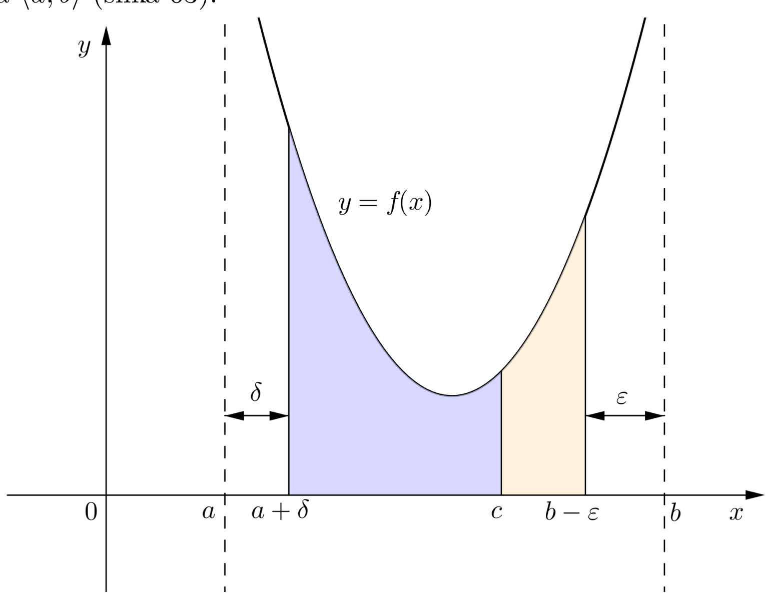


Slika 62: Nepravi integral funkcije f

Za funkciju $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, integrabilnu na svakom segmentu sadržanom u $\langle a, b\rangle$, te neomeđenu u svakoj okolini rubnih točaka a i b, nepravi integral $\int_a^b f(x)dx$ definira se kao

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\delta\to 0+}\int_{a+\delta}^{c} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

pod uvjetom da oba limesa postoje. Pritom za c uzimamo bilo koju točku intervala $\langle a, b\rangle$ (slika 63).



Slika 63: Nepravi integral funkcije f

Primjer 2.2.1. Ispitati konvergenciju integrala $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

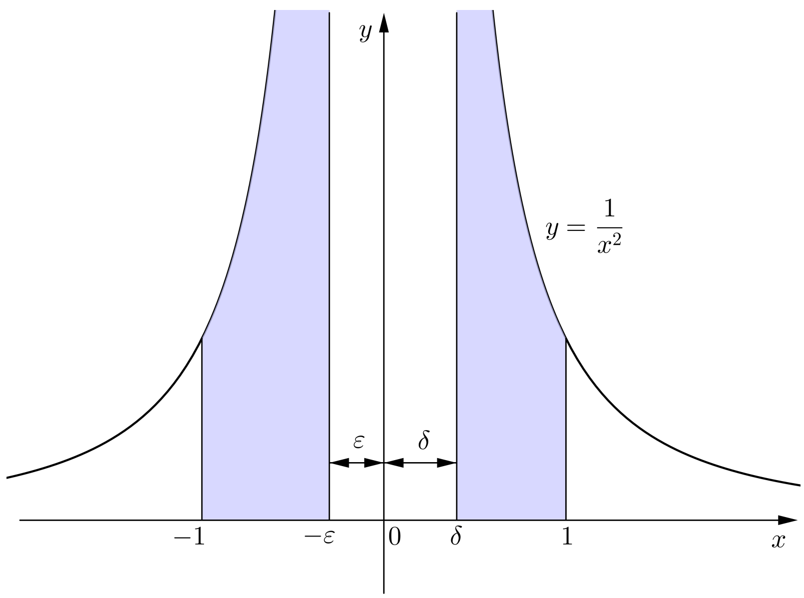
Rješenje. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2}$ je neprekidna na $[-1, 0\rangle \cup \langle 0, 1]$, pa stoga i integrabilna na svakom segmentu sadržanom u intervalu $[-1, 0\rangle$ i na svakom segmentu sadržanom u intervalu $\langle 0, 1]$. Nadalje,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

pa je f neomeđena u svakoj okolini točke $c = 0$. Prema (17) računamo

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta\to 0+} \int_{\delta}^{1} \frac{dx}{x^2} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0+} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\delta}^{1} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\delta\to 0+} \left(-1 + \frac{1}{\delta}\right) = \infty. \end{aligned}$$

Dakle, integral $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ divergira k ∞.



Slika 64: Nepravi integral funkcije $y = \frac{1}{x^2}$ na $[-1, 1]$

Kada bismo dani integral pogrešno tretirali kao pravi, tj. određeni integral, dobili bismo netočan rezultat

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^{1} = -(1+1) = -2.$$

(Budući da je podintegralna funkcija pozitivna, određeni integral bi predstavljao površinu omeđenu grafom te funkcije, pravcima $x = -1$, $x = 1$ i osi x, pa bi trebao biti pozitivan broj.)

Primjer 2.2.2. Ispitati konvergenciju integrala $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

Rješenje. Funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$ je neprekidna na $[1, 2\rangle$, pa stoga i integrabilna na svakom segmentu sadržanom u intervalu $[1, 2\rangle$. Kako je

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \infty,$$

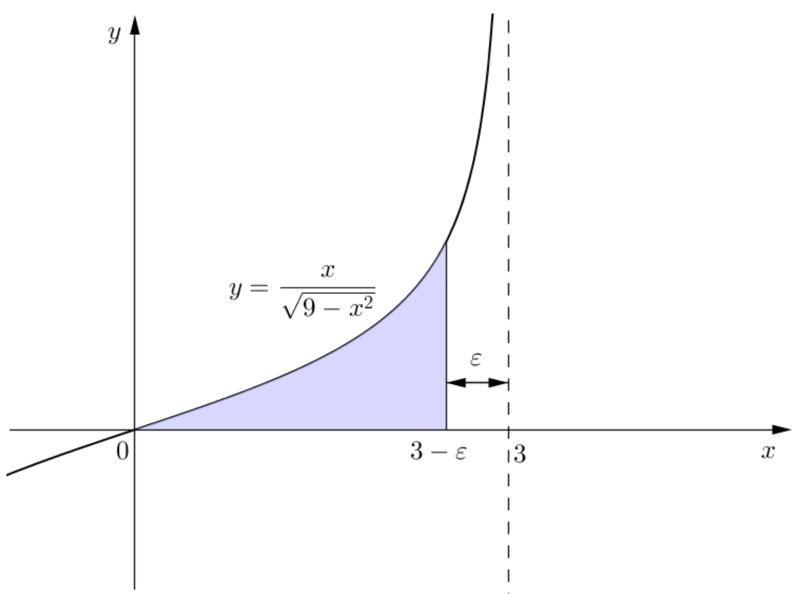
f je neomeđena u svakoj okolini točke $c = 2$. Prema (18) računamo

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_1^{2-\varepsilon} (x-2)^{-\frac{2}{3}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} 3(x-2)^{\frac{1}{3}} \Big|_1^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+} 3(\sqrt[3]{-\varepsilon} - \sqrt[3]{-1}) = 3. \end{aligned}$$

Prema tome, integral konvergira.

Primjer 2.2.3. Ispitati konvergenciju integrala $\int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Rješenje.



Slika 65: Nepravi integral funkcije $y = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ na $[0, 3\rangle$

Funkcija $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ je neprekidna na $[0,3\rangle$, pa stoga i integrabilna na svakom segmentu sadržanom u intervalu $[0,3\rangle$. Kako je

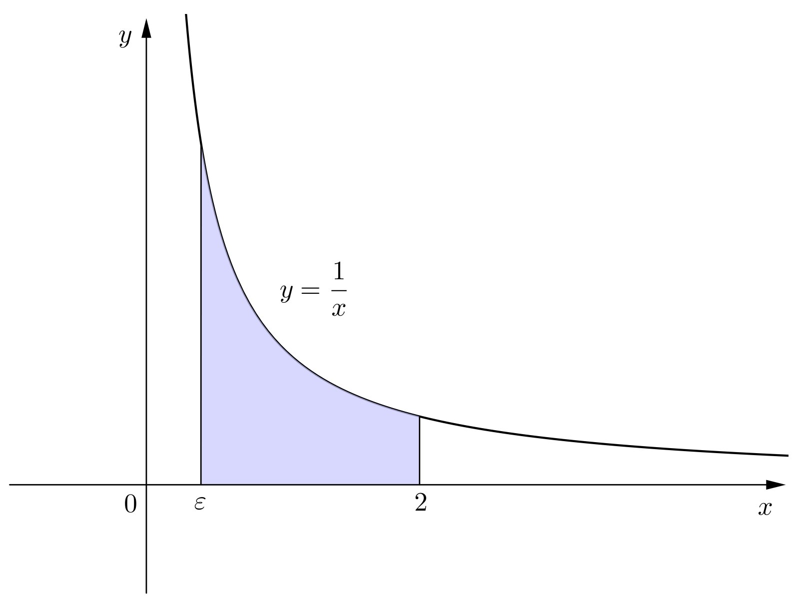
$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3-} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = \infty,$$

f je neomeđena u svakoj okolini točke $c = 3$. Prema (18) računamo

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}} \\
&= \left| \begin{array}{ll} t = \sqrt{9-x^2} & x = 0 \Rightarrow t = 3 \\ dt = -\frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}} & x = 3-\varepsilon \Rightarrow t = \sqrt{9-(3-\varepsilon)^2} \end{array} \right| \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_3^{\sqrt{9-(3-\varepsilon)^2}} dt = -\lim_{\varepsilon\to 0+} t \Big|_3^{\sqrt{9-(3-\varepsilon)^2}} \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\sqrt{9-(3-\varepsilon)^2} - 3\right) = 3.
\end{aligned}$$

Prema tome, integral konvergira.

Primjer 2.2.4. Ispitati konvergenciju integrala $\int_0^2 \frac{dx}{x}$.
Rješenje.



Slika 66: Nepravi integral funkcije $y = \frac{1}{x}$ na $\langle 0,2]$

Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ je neprekidna na $\langle 0, 2]$, pa stoga i integrabilna na svakom segmentu sadržanom u intervalu $\langle 0, 2]$. Kako je

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty,$$

f je neomeđena u svakoj okolini točke $c = 0$. Prema (19) računamo

$$\int_0^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln|x|\Big|_\varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln 2 - \ln\varepsilon) = \infty.$$

Prema tome, integral divergira k ∞.

Primjer 2.2.5. Ispitati konvergenciju integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$.

Rješenje. Funkcija $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ je neprekidna na $\langle 0, \frac{\pi}{2}]$, pa stoga i integrabilna na svakom segmentu sadržanom u intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}]$. Kako je

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = \infty,$$

f je neomeđena u svakoj okolini točke $c = 0$. Prema (19) računamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}} &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}} = \left| \begin{array}{ll} t = \sin x & x = \varepsilon \Rightarrow t = \sin\varepsilon \\ dt = \cos x dx & x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\sin\varepsilon}^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} 2\sqrt{t}\Big|_{\sin\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} 2(1 - \sqrt{\sin\varepsilon}) = 2.
\end{aligned}$$

Prema tome, integral konvergira.

Primjer 2.2.6. Ispitati konvergenciju integrala $\int_0^1 \ln x dx$.

Rješenje. Funkcija $f(x) = \ln x$ je neprekidna na $\langle 0, 1]$, pa stoga i integrabilna na svakom segmentu sadržanom u intervalu $\langle 0, 1]$. Također, f je neomeđena u svakoj okolini točke $c = 0$, jer je

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty.$$

Za $\varepsilon > 0$ računamo određeni integral

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{array} \right| = (x\ln x)\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x\frac{dx}{x} \\
&= (x\ln x)\Big|_\varepsilon^1 - x\Big|_\varepsilon^1 = 1\ln 1 - \varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon = -\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Odavde, prema (19), imamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln x dx &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}(-\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon)\\ &= -1 - \lim_{\varepsilon\to 0+}(\varepsilon\ln\varepsilon) = (0\cdot\infty) = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\ &= -1 - \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -1 + \lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon = -1.\end{aligned}$$

Dakle, integral $\int_0^1 \ln x dx$ konvergira.

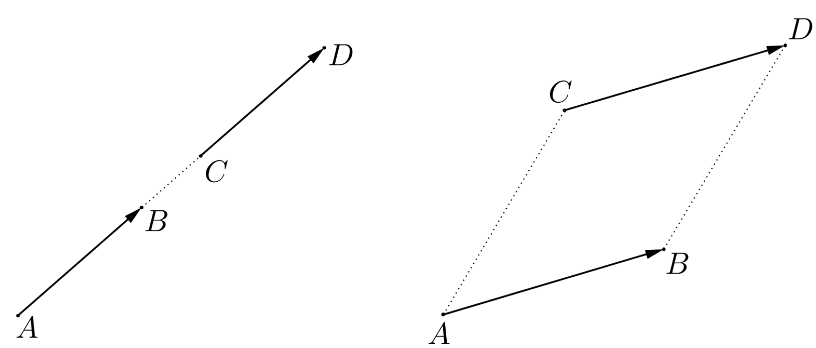
3 Vektori

3.1 Pojam vektora

Skalar ili *skalarna veličina* je veličina koju je moguće potpuno opisati mjernim brojem. Takve su veličine npr. duljina, površina, volumen, masa, vrijeme, rad, temperatura itd. Međutim, postoje veličine koje nije moguće opisati samo brojčanom vrijednošću. Tako npr. za put, silu, brzinu, akceleraciju itd., treba osim brojčane vrijednosti zadati i smjer. Takve veličine nazivamo *vektorima*. Da bismo matematički precizno objasnili što je vektor, potrebno je uvesti pojam orijentirane dužine.

Označimo s $\mathbb{R}^3$ skup svih uređenih trojki (x, y, z) realnih brojeva. Neka su dane točke $A, B \in \mathbb{R}^3$. Uređeni par (A, B) nazivamo *orijentiranom dužinom*. Točka A je početna, a točka B krajnja točka orijentirane dužine (A, B). Orijentiranu dužinu (A, B) označavat ćemo s $\overrightarrow{AB}$.

Kažemo da je orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$ *ekvivalentna* orijentiranoj dužini $\overrightarrow{CD}$, i pišemo $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, ako dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju zajedničko polovište. Ako pritom sve četiri točke A, B, C, D ne leže na istom pravcu, četverokut $ABDC$ je paralelogram.



Slika 67: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$

Ovako definirana relacija $\sim$ je *relacija ekvivalencije* na skupu svih orijentiranih dužina, budući da zadovoljava svojstva:

refleksivnosti ($\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$),
simetričnosti ($\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$),

tranzitivnosti $\big((\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}\big)$.
Klasa ekvivalencije određena orijentiranom dužinom $\overrightarrow{AB}$, u oznaci $[\overrightarrow{AB}]$, je skup svih orijentiranih dužina koje su ekvivalentne s $\overrightarrow{AB}$. Dakle,

$$[\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{CD} : \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}\}.$$

Vektor je klasa međusobno ekvivalentnih orijentiranih dužina. Vektore obično označavamo malim slovima $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \ldots$ iznad kojih pišemo strelice.

Skup svih vektora označavat ćemo s V^3 i zvati *prostorom vektora* ili trodimenzionalnim *vektorskim prostorom.*

Ako je $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$, kažemo da je orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$ *predstavnik* ili *reprezentant* vektora $\vec{a}$. Vektor $\vec{a}$ geometrijski ćemo predočavati s bilo kojim njegovim reprezentantom, primjerice $\overrightarrow{AB}$, i u daljnjem tekstu kraće zapisivati $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Bitno je napomenuti da početnu točku C orijentirane dužine $\overrightarrow{CD}$ iz klase ekvivalencije $\vec{a}$ određene reprezentantom $\overrightarrow{AB}$ uvijek možemo birati proizvoljno. Tada je krajnja točka D jedinstveno određena uvjetom da dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju zajedničko polovište.

Klasu ekvivalencije određenu reprezentantom $\overrightarrow{AA}$ nazivamo *nulvektorom* i označavamo s $\vec{0}$.

Ako je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, tada se *suprotni vektor* od $\vec{a}$, u oznaci $-\vec{a}$, definira kao $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$.

Za svaki vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ definira se njegova duljina, smjer i orijentacija.

Pod *duljinom* (*modulom*) vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, u oznaci $|\vec{a}|$, podrazumijevamo duljinu njegovog reprezentanta $\overrightarrow{AB}$, odnosno duljinu dužine $\overline{AB}$. Jasno je da duljina vektora ne ovisi o izboru njegovog reprezentanta, budući da za ekvivalentne orijentirane dužine $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju zajedničko polovište, pa su stoga duljine dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ jednake. (U slučaju da točke A, B, C, D ne leže sve na istom pravcu, $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ su paralelne stranice paralelograma $ABDC$.)

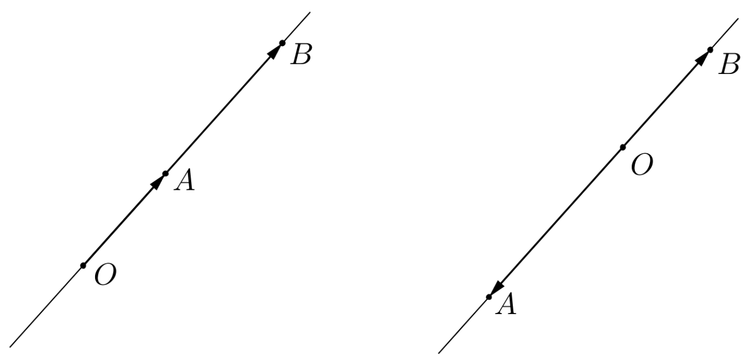
Smjer vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ je smjer pravca p_{AB} koji prolazi točkama A i B. Smjer vektora ne ovisi o izboru reprezentanta, budući da ekvivalentne orijentirane dužine leže na istom ili na međusobno paralelnim pravcima.

Neka su $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ dva vektora istog smjera, čije smo reprezentante birali tako da im je početna točka ista. Uočimo da tada sve tri točke A, B, O leže na istom pravcu p. Reći ćemo da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju *istu orijentaciju* ako točke A i B leže na pravcu p s iste strane točke O, odnosno da imaju *suprotne orijentacije* ako točka O na pravcu p leži između točaka A i B (slika 68). Pojam orijentacije vektora također ne ovisi o izboru reprezentanata.

Svaki vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ jednoznačno je određen svojom duljinom, smjerom i orijentacijom. Stoga su vektori $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ *jednaki* (pišemo $\vec{a} = \vec{b}$) ako i samo ako su istih duljina, smjera i orijentacije.

Duljina nulvektora jednaka je nuli, a smjer mu nije određen.

Jedinični vektor je vektor čija je duljina jednaka jedan.



Slika 68: Orijentacija vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$

Za vektore kažemo da su *kolinearni* ako su istog smjera. To znači da njihovi reprezentanti leže na istom ili na paralelnim pravcima. Smatramo da je nulvektor kolinearan sa svakim vektorom.

Za vektore kažemo da su *komplanarni* ako njihovi reprezentanti leže u istoj ili u paralelnim ravninama.

3.2 Zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom

Zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$ koji definiramo na sljedeći način. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, tj. za predstavnika vektora $\vec{b}$ biramo orijentiranu dužinu s početkom u krajnjoj točki predstavnika vektora $\vec{a}$. Tada definiramo

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} := \overrightarrow{AC}.$$

Kažemo da smo vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zbrojili po *pravilu trokuta* (slika 69).

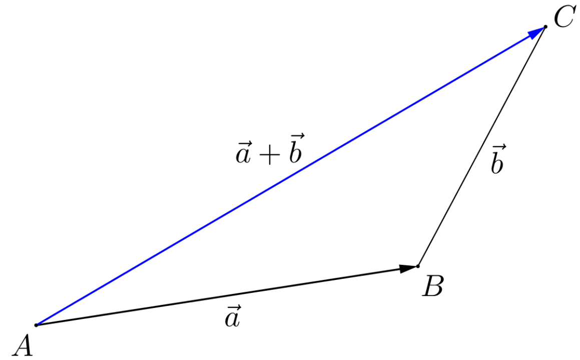
Osim po pravilu trokuta, (nekolinearni) vektori se mogu zbrajati i po *pravilu paralelograma* (slika 70). Za predstavnike vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ biramo orijentirane dužine s istim početkom. Dakle $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Nad stranicama

$\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ konstruiramo paralelogram $ABDC$, čiji smo preostali vrh označili slovom D. Tada definiramo

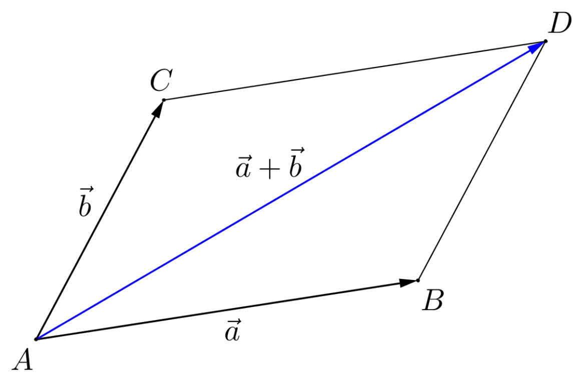
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} := \overrightarrow{AD}.$$

Dakle, zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$ čiji je predstavnik dijagonala $\overrightarrow{AD}$ paralelograma $ABDC$.

Ovako definirano zbrajanje vektora ne ovisi o izboru reprezentanata. Osim toga, jasno je da se zbrajanjem vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ po pravilu trokuta dobije isti vektor $\vec{c}$ koji bismo dobili da smo $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zbrojili po pravilu paralelograma.

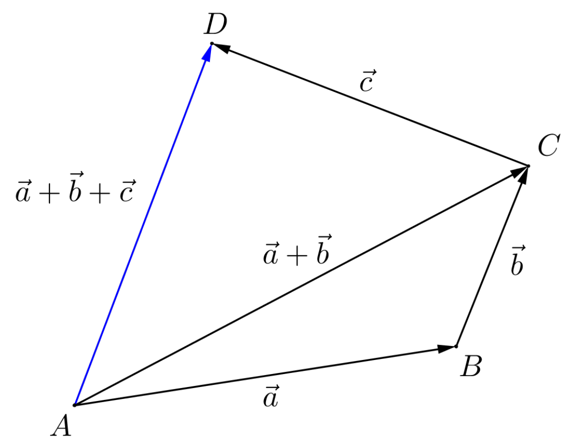


Slika 69: Zbrajanje vektora po pravilu trokuta



Slika 70: Zbrajanje vektora po pravilu paralelograma

Više vektora zbrajamo po *pravilu poligona*. Naime, zbroj $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ definira se tako da najprije vektore $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ zbrojimo po pravilu trokuta. Zatim vektoru $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ pribrojimo vektor $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ za čijeg smo predstavnika birali orijentiranu dužinu koja ima početak u krajnjoj točki C predstavnika vektora $\vec{a} + \vec{b}$. Tada je $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Analogno postupamo i u slučaju zbroja $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n$ od n vektora.

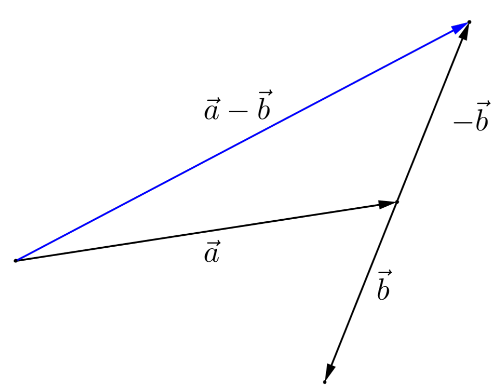


Slika 71: Zbrajanje vektora po pravilu poligona

Razlika vektora $\vec{a} - \vec{b}$ definira se kao

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b}),$$

tj. vektoru $\vec{a}$ pribrojimo suprotni vektor vektora $\vec{b}$.



Slika 72: Razlika vektora $\vec{a} - \vec{b}$

Zbrajanje vektora ima sljedeća svojstva:

(a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (komutativnost),
(b) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (asocijativnost),
(c) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ ($\vec{0}$ je neutralni element za zbrajanje),
(d) $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$ ($-\vec{a}$ je suprotni element od $\vec{a}$ za zbrajanje).

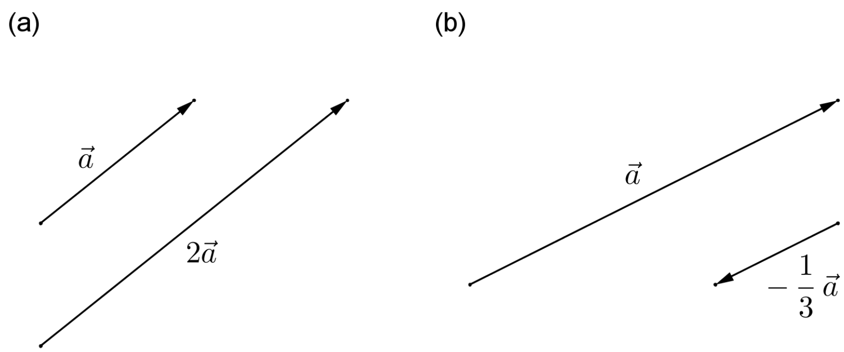
Neka je sada dan vektor $\vec{a}$ i skalar $t\in\mathbb{R}$. *Umnožak vektora $\vec{a}$ i skalara t* je vektor $\vec{b}=t\vec{a}$ koji definiramo na sljedeći način.

Ako je $\vec{a}=\vec{0}$ ili $t=0$, tada je $\vec{b}:=\vec{0}$.

Ako je $\vec{a}\neq\vec{0}$ i $t\neq 0$, tada se vektor $\vec{b}$ definira tako da mu je duljina

$$|\vec{b}|=|t\vec{a}|:=|t|\,|\vec{a}|,$$

a smjer jednak smjeru vektora $\vec{a}$. Ako je $t>0$, tada su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednako orijentirani, dok su u slučaju $t<0$ vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotno orijentirani.



Slika 73: Množenje vektora skalarom

Množenje vektora skalarom ima sljedeća svojstva:

(a) $t(\vec{a}+\vec{b})=t\vec{a}+t\vec{b}$ (kvazidistributivnost u odnosu na zbrajanje vektora),
(b) $(t+s)\vec{a}=t\vec{a}+s\vec{a}$ (kvazidistributivnost u odnosu na zbrajanje skalara),
(c) $(ts)\vec{a}=t(s\vec{a})$ (kvaziasocijativnost),
(d) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$,
(e) $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$,
(f) $t\vec{a}=\vec{0}$ ako i samo ako je $t=0$ ili $\vec{a}=\vec{0}$.

Linearna kombinacija vektora

Neka su dani vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ i skalari $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$. Vektor

$$t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_n\vec{a}_n$$

je *linearna kombinacija* vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ s koeficijentima $t_1, \ldots, t_n$.

Primjerice, vektor $\vec{c} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$ je linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Također, vektor $\vec{d} = -6\vec{a} + 4\vec{b} - 7\vec{c}$ je linearna kombinacija vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Za vektore $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ kažemo da su *linearno nezavisni* ako iz

$$t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

slijedi $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$. To znači da se niti jedan od vektora $\vec{a}_i$ ne može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora.

Ako je $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_n\vec{a}_n = \vec{0}$ za neki izbor skalara $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ pri čemu je barem jedan $t_i \neq 0$, kažemo da su vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *linearno zavisni*. Tada je

$$\vec{a}_i = -\frac{t_1}{t_i}\vec{a}_1 - \cdots - \frac{t_{i-1}}{t_i}\vec{a}_{i-1} - \frac{t_{i+1}}{t_i}\vec{a}_{i+1} - \cdots - \frac{t_n}{t_i}\vec{a}_n,$$

tj. $\vec{a}_i$ je linearna kombinacija vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n$. Prema tome, vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ su linearno zavisni ako je barem jedan od njih moguće prikazati kao linearnu kombinaciju preostalih vektora.

Primijetimo, ako je barem jedan vektor $\vec{a}_i = \vec{0}$, tada su $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linearno zavisni vektori. Naime, tada nulvektor možemo prikazati kao linearnu kombinaciju

$$0 \cdot \vec{a}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_{i-1} + t_i \cdot \vec{a}_i + 0 \cdot \vec{a}_{i+1} + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$$

s koeficijentom $t_i \neq 0$ uz vektor $\vec{a}_i$.

Iz definicije množenja vektora skalarom slijedi da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b} = t\vec{a}$ kolinearni. Međutim, interesantno je da vrijedi i obrat ove tvrdnje. Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, tada postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = t\vec{a}$ ili $\vec{a} = t\vec{b}$. *Prema tome, bilo koja dva vektora su kolinearni ako i samo ako su linearno zavisni.*

Ako su vektori $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ nekolinearni, tada je njima jednoznačno određena ravnina AOB koja prolazi točkama O, A, B. Bilo koji vektor $\vec{c}$ čiji reprezentant pripada toj ravnini je linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Također, ako je vektor $\vec{c}$ linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tada postoji reprezentant vektora $\vec{c}$ koji leži u ravnini AOB koju određuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. *Prema tome, bilo koja tri vektora su komplanarni ako i samo ako su linearno zavisni.*

3.3 Koordinatizacija prostora V^3

U prostoru uvijek možemo izabrati četiri točke, recimo O, A_1, A_2, A_3, koje ne leže sve u istoj ravnini. Tada je jasno da vektori $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}$ i $\vec{a}_3 = \overrightarrow{OA_3}$, za čije smo predstavnike birali orijentirane dužine s istim početkom O, nisu komplanarni, budući da njihovi predstavnici ne leže u istoj, odnosno paralelnim ravninama. To nam govori da u vektorskom prostoru V^3 uvijek postoje tri vektora koja nisu komplanarni (dakle, linearno su nezavisni).

Svaku uređenu trojku $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ linearno nezavisnih vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in V^3$ nazivamo *bazom* prostora V^3.

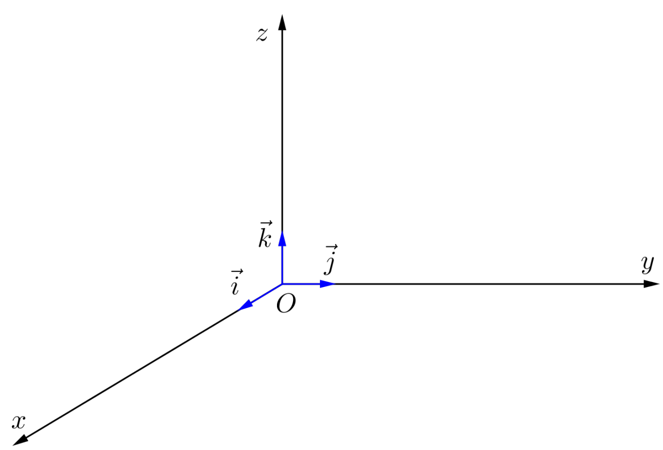
Svaki vektor $\vec{a} \in V^3$ možemo na jedinstven način prikazati kao linearnu kombinaciju vektora baze, tj. postoje jedinstveni skalari $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\vec{a} = t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + t_3\vec{a}_3. \tag{20}$$

Zbog tog svojstva baze prostora V^3 smatramo da je naš prostor trodimenzionalan. Posljedično, svaka četiri vektora u V^3 su linearno zavisna.

Skalare t_1, t_2, t_3 u prikazu (20) nazivamo *komponentama* ili *koordinatama* vektora $\vec{a}$ u bazi $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.

Uzmimo sada desni pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u točki O. U parovima međusobno okomite osi sustava označimo redom s x (os apscisa), y (os ordinata) i z (os aplikata). Za bazu u V^3 uzmimo uređenu trojku $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pri čemu je $\vec{i}$ jedinični vektor u pozitivnom smjeru osi x, $\vec{j}$ jedinični vektor u pozitivnom smjeru osi y, te $\vec{k}$ jedinični vektor u pozitivnom smjeru osi z našeg koordinatnog sustava. Primijetimo da je takav izbor baze moguć, budući da su vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ nekomplanarni, odnosno linearno nezavisni.



Slika 74: Desni pravokutni koordinatni sustav

Kao što je rečeno, za svaki vektor $\vec{a} \in V^3$ postoje jedinstveni skalari $a_x, a_y, a_z \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

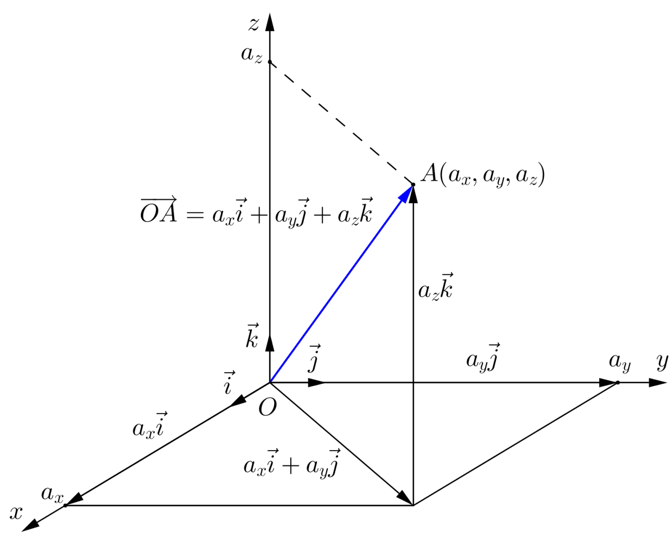
Koordinate a_x, a_y, a_z nazivamo *pravokutnim koordinatama* vektora $\vec{a}$.

Preslikavanje $\vec{a} \mapsto (a_x, a_y, a_z)$ sa skupa V^3 na skup $\mathbb{R}^3$, koje svakom vektoru pridružuje uređenu trojku njegovih pravokutnih koordinata, je bijekcija. Takvo preslikavanje nazivamo *koordinatizacijom* prostora V^3. Svaki vektor $\vec{a}$ možemo poistovijetiti s njemu pridruženom uređenom trojkom (a_x, a_y, a_z).

Ako su $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ prikazi vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tada je, prema svojstvima koja vrijede za zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom,

$$\begin{aligned}
\vec{a} + \vec{b} &= (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}, \\
\vec{a} - \vec{b} &= (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k}, \\
t\vec{a} &= ta_x\vec{i} + ta_y\vec{j} + ta_z\vec{k} \quad (t \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

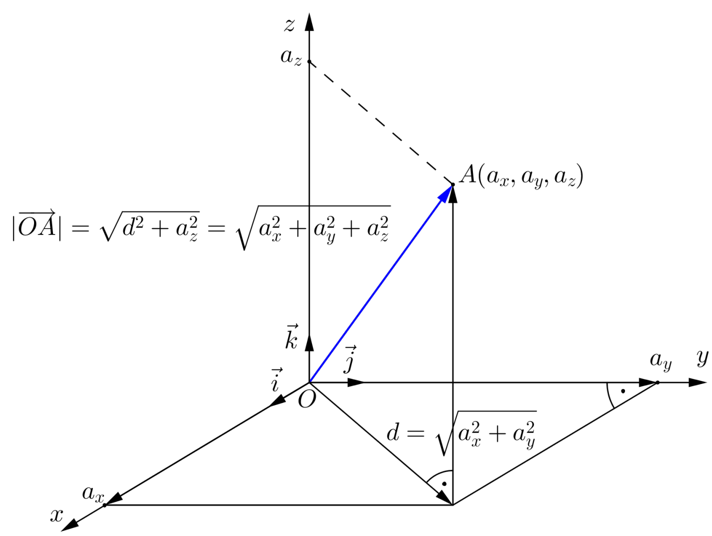
Ako za predstavnika vektora $\vec{a}$ uzmemo orijentiranu dužinu $\overrightarrow{OA}$ s početkom u ishodištu O našeg koordinatnog sustava, tada su koordinate krajnje točke A te orijentirane dužine upravo pravokutne koordinate vektora $\vec{a}$. Dakle, vektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ poistovjećujemo s točkom $A(a_x, a_y, a_z)$. Vektor $\overrightarrow{OA}$ nazivamo *radijvektorom*, tj. *vektorom položaja* točke A.



Slika 75: Poistovjećivanje radijvektora $\overrightarrow{OA}$ i točke A

Duljina vektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ jednaka je duljini dužine $\overline{OA}$, gdje je $O(0,0,0)$ ishodište, te $A(a_x, a_y, a_z)$. Prema Pitagorinu poučku (slika 76) vrijedi

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$



Slika 76: $|\vec{a}| = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Za dane točke $A(a_x, a_y, a_z)$ i $B(b_x, b_y, b_z)$, pripadni vektori položaja glase $\overrightarrow{OA} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\overrightarrow{OB} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Tada vektor $\overrightarrow{AB}$ u bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ima prikaz

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ &= -a_x\vec{i} - a_y\vec{j} - a_z\vec{k} + b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \\ &= (b_x - a_x)\vec{i} + (b_y - a_y)\vec{j} + (b_z - a_z)\vec{k}. \end{aligned}$$

Odavde odmah dobivamo formulu za udaljenost točaka $A(a_x, a_y, a_z)$ i $B(b_x, b_y, b_z)$. Naime, udaljenost točaka A i B, u oznaci $d(A, B)$ jednaka je duljini vektora $\overrightarrow{AB}$, što iznosi

$$d(A, B) = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}.$$

Primjer 3.3.1. U prostoru su dane točke $A(3,-3,5)$, $B(1,4,-6)$, $C(2,3,7)$. Naći prikaze vektora $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ i $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ u bazi $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Rješenje.
$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(1-3)\vec{i}+(4+3)\vec{j}+(-6-5)\vec{k}=-2\vec{i}+7\vec{j}-11\vec{k}$,
$\vec{b}=\overrightarrow{AC}=(2-3)\vec{i}+(3+3)\vec{j}+(7-5)\vec{k}=-\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$,
$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(-2-1)\vec{i}+(7+6)\vec{j}+(-11+2)\vec{k}=-3\vec{i}+13\vec{j}-9\vec{k}$.

Primjer 3.3.2. Zadani su vektori $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$ i $\vec{b}=2\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}$. Naći vektore $\vec{a}+\vec{b}$, $3\vec{a}$ i $2\vec{a}-3\vec{b}$.

Rješenje.
$\vec{a}+\vec{b}=3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}+2\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}=(3+2)\vec{i}+(-5+6)\vec{j}+(1-4)\vec{k}=5\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$,
$3\vec{a}=3(3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k})=3\cdot 3\vec{i}+3\cdot(-5)\vec{j}+3\cdot 1\vec{k}=9\vec{i}-15\vec{j}+3\vec{k}$,
$2\vec{a}-3\vec{b}=2(3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k})-3(2\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k})=-28\vec{j}+14\vec{k}$.

Primjer 3.3.3. Zadani su vektori $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ i $\vec{b}=3\vec{i}-4\vec{k}$. Naći duljine vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a}+\vec{b}$.

Rješenje.
$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}=\sqrt{49}=7$,
$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$,
$\vec{a}+\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}+3\vec{i}-4\vec{k}=5\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$,
pa je $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{38}$.

Uočimo da je $\sqrt{38}=|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|=12$.

Važno je napomenuti da za proizvoljne vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ općenito vrijedi *nejednakost trokuta*

$$|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|,$$

pa bi stoga bilo pogrešno duljinu vektora $\vec{a}+\vec{b}$ računati kao zbroj duljina vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Primjer 3.3.4. Naći jedinični vektor istoga smjera i orijentacije kao vektor $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}$.

Rješenje. Traženi vektor označimo s $\vec{a}_0$. Kako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{a}_0$ istoga smjera, to postoji $t\in\mathbb{R}$ takav da je $\vec{a}_0=t\vec{a}$. Pritom je $t>0$, budući da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{a}_0$ jednako orijentirani. Nadalje, $\vec{a}_0$ je jedinični vektor, odakle slijedi

$$1=|\vec{a}_0|=|t\vec{a}|=|t||\vec{a}|=t|\vec{a}|,$$

pa je $t=\frac{1}{|\vec{a}|}$. Prema tome,

$$\vec{a}_0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{3^2+(-6)^2+(-2)^2}}\vec{a}=\frac{1}{7}\vec{a}=\frac{3}{7}\vec{i}-\frac{6}{7}\vec{j}-\frac{2}{7}\vec{k}.$$

Primjer 3.3.5. Ispitati linearnu zavisnost vektora $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

Rješenje. Zapišimo nulvektor kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Dakle,

$$t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c} = \vec{0},$$

pri čemu su $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$. Ako odavde zaključimo da svi skalari t_1, t_2, t_3 moraju biti jednaki nuli, vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bit će linearno nezavisni. U protivnom, ti vektori će biti linearno zavisni.

Računamo

$$\begin{aligned} \vec{0} &= t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c} \\ &= t_1(3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) + t_2(-2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}) + t_3(\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}) \\ &= (3t_1 - 2t_2 + t_3)\vec{i} + (t_1 - 4t_2 + 2t_3)\vec{j} + (-t_1 + t_2 - 5t_3)\vec{k}. \end{aligned}$$

Sada je nulvektor prikazan kao linearna kombinacija vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ s koeficijentima $3t_1 - 2t_2 + t_3$, $t_1 - 4t_2 + 2t_3$, $-t_1 + t_2 - 5t_3$. Kako su vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ linearno nezavisni, zaključujemo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3t_1 & - & 2t_2 & + & t_3 & = & 0 \\ t_1 & - & 4t_2 & + & 2t_3 & = & 0 \\ -t_1 & + & t_2 & - & 5t_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Lako se provjeri da ovaj homogeni sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice ima samo trivijalno rješenje $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, $t_3 = 0$. Prema tome, vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su linearno nezavisni.

Primjer 3.3.6. Ispitati linearnu zavisnost vektora $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -6\vec{i} + 15\vec{j} + 2\vec{k}$.

Rješenje. Zapišimo nulvektor kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Dakle,

$$t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c} = \vec{0},$$

pri čemu su $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$. Odavde imamo

$$\begin{aligned} \vec{0} &= t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c} \\ &= t_1(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) + t_2(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) + t_3(-6\vec{i} + 15\vec{j} + 2\vec{k}) \\ &= (2t_1 + 3t_2 - 6t_3)\vec{i} + (t_1 - 3t_2 + 15t_3)\vec{j} + (2t_1 + t_2 + 2t_3)\vec{k}. \end{aligned}$$

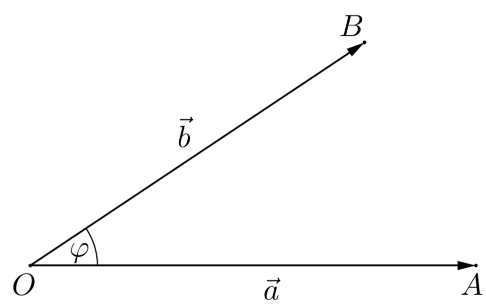
Zbog linearne nezavisnosti vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ slijedi

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2t_1 & + & 3t_2 & - & 6t_3 & = & 0 \\ t_1 & - & 3t_2 & + & 15t_3 & = & 0 \\ 2t_1 & + & t_2 & + & 2t_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Lako se provjeri da ovaj homogeni sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Jedno rješenje tog sustava glasi $t_1 = 3$, $t_2 = -4$, $t_3 = -1$. Prema tome, $3\vec{a} - 4\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$, pa zaključujemo da su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno zavisni.

3.4 Skalarni produkt

Neka su $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ dva ne-nulvektora, čije predstavnike izaberemo s početkom u istoj točki. Tada se *kut* φ među njima definira kao mjerni broj neorijentiranog kuta $\angle AOB$ takav da je $0 \le \varphi \le \pi$. Ako je neki od vektora $\vec{a}$ ili $\vec{b}$ nulvektor, tada se pojam kuta ne definira.



Slika 77: $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

Za kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ koristi se oznaka $\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Jasno je da pojam kuta ne ovisi o izboru predstavnika vektora. Također, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{a})$.

Kažemo da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ *okomiti*, i pišemo $\vec{a} \perp \vec{b}$, ako je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2$.

Ne-nulvektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ ili $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$.

U vektorskom prostoru V^3 uvodi se pojam skalarnog produkta dvaju vektora.

Skalarni umnožak (produkt) vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je realan broj koji označavamo s $\vec{a} \cdot \vec{b}$, a definiramo na sljedeći način.

Ako je barem jedan od vektora $\vec{a}$ ili $\vec{b}$ nulvektor, tada je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Ako su $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, tada je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Preslikavanje $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \cdot \vec{b}$ sa $V^3 \times V^3$ u $\mathbb{R}$ nazivamo *skalarnim množenjem vektora.*

Skalarni kvadrat vektora $\vec{a}$ je broj $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$. Kraće pišemo $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a}$.

Pomoću skalarnog produkta možemo karakterizirati okomitost dvaju nenulvektora. Naime, vektori $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ su okomiti ako i samo ako je $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Prema tome,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Skalarno množenje vektora ima sljedeća svojstva:

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (komutativnost),
(b) $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (t\vec{b}) = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (kvaziasocijativnost),
(c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
(distributivnost skalarnog množenja prema zbrajanju vektora),
(d) $\vec{a}^{\,2} \geq 0$, $\vec{a}^{\,2} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$,
gdje su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$, $t \in \mathbb{R}$.

Primijetimo da za jedinične, u parovima okomite, vektore $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ u smjeru koordinatnih osi desnog pravokutnog koordinatnog sustava vrijedi

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$$

Ako su $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ prikazi vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ prostora V^3, tada se koristeći svojstva skalarnog množenja lako pokaže da se skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ računa po formuli

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Posebno,

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

odakle se dobije formula za izračunavanje norme vektora

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Konačno, iz definicije skalarnog produkta vidimo da se kosinus kuta između vektora $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$ računa kao

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},$$

odnosno

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Ako u gornju formulu za vektor $\vec{b}$ uvrstimo redom vektore baze $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ dobivamo

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{i}) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{j}) = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{k}) = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

Vrijednosti $\cos\angle(\vec{a},\vec{i})$, $\cos\angle(\vec{a},\vec{j})$ i $\cos\angle(\vec{a},\vec{k})$ zovu se *kosinusi smjera* vektora $\vec{a}$, jer je njima određen smjer vektora $\vec{a}$ u prostoru, odnosno kutovi koje vektor $\vec{a}$ zatvara s pozitivnim smjerovima koordinatnih osi x, y i z. Uočimo da je

$$\cos^2\angle(\vec{a},\vec{i}) + \cos^2\angle(\vec{a},\vec{j}) + \cos^2\angle(\vec{a},\vec{k}) = 1.$$

Primjer 3.4.1. Naći skalarni produkt vektora $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ i $\vec{b} = -6\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}$.

Rješenje.
$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k})\cdot(-6\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}) = 2\cdot(-6) + 5\cdot 2 + (-3)\cdot 10 = -32.$

Primjer 3.4.2. Zadani su vektori $\vec{a} = -\vec{i} - 7\vec{j} + 11\vec{k}$ i $\vec{b} = 6\vec{i} + 9\vec{j} - 12\vec{k}$. Naći skalarni produkt vektora $2\vec{a} + \vec{b}$ i $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Rješenje. Imamo
$2\vec{a} + \vec{b} = 2(-\vec{i} - 7\vec{j} + 11\vec{k}) + 6\vec{i} + 9\vec{j} - 12\vec{k} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 10\vec{k},$
$3\vec{a} + 2\vec{b} = 3(-\vec{i} - 7\vec{j} + 11\vec{k}) + 2(6\vec{i} + 9\vec{j} - 12\vec{k}) = 9\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}.$

Stoga je

$$\begin{aligned}(2\vec{a} + \vec{b})\cdot(3\vec{a} + 2\vec{b}) &= (4\vec{i} - 5\vec{j} + 10\vec{k})\cdot(9\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}) \\ &= 4\cdot 9 + (-5)\cdot(-3) + 10\cdot 9 = 141.\end{aligned}$$

Primjer 3.4.3. Naći kut koji zatvaraju vektori $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{b} = 6\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

Rješenje.

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{1\cdot 6 + 2\cdot(-3) + (-2)\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}\sqrt{6^2+(-3)^2+(-2)^2}} = \frac{4}{21}.$$

Odavde slijedi $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 79.02°$.

Primjer 3.4.4. Naći kosinuse smjera vektora $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Rješenje. Duljina vektora $\vec{a}$ je $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$, pa kosinusi smjera vektora $\vec{a}$ iznose redom

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{i}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|} = \frac{1}{3}, \quad \cos\angle(\vec{a},\vec{j}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{j}|} = \frac{2}{3},$$

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{k}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{k}|} = \frac{-2}{3}.$$

Primjer 3.4.5. U trokutu ABC s vrhovima $A(2,0,-1)$, $B(-3,-1,1)$ i $C(1,2,3)$ naći kut koji zatvaraju stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

Rješenje. Tražimo kut među vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Prikazi vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ u bazi $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ glase

$$\overrightarrow{AB} = -5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \quad \overrightarrow{AC} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Iz formule za skalarni produkt dvaju vektora dobivamo

$$\begin{aligned}
\cos\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} \\
&= \frac{-5\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 + 2\cdot 4}{\sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + 2^2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{11\sqrt{70}}{210},
\end{aligned}$$

pa je $\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \approx 64^\circ$.

Primjer 3.4.6. Naći parametar $t \in \mathbb{R}$ tako da su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} + t\vec{j} - 11\vec{k}$ i $\vec{b} = 7\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ međusobno okomiti.

Rješenje. Znamo da je $\vec{a}\perp\vec{b}$ ako i samo ako je $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Računamo
$\vec{a}\cdot\vec{b} = (3\vec{i} + t\vec{j} - 11\vec{k})\cdot(7\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 3\cdot 7 + t\cdot(-2) - 11\cdot 3 = -2t - 12.$
Prema tome, $\vec{a}\perp\vec{b}$ ako i samo ako je $-2t - 12 = 0$, odnosno $t = -6$.

Primjer 3.4.7. Naći skalarni produkt vektora $\vec{a} = 5\vec{m} - 3\vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, ako je $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 4$ te $\angle(\vec{m},\vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Rješenje. Koristeći svojstva skalarnog produkta računamo

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (5\vec{m} - 3\vec{n})\cdot(\vec{m} + 2\vec{n}) \\
&= 5\vec{m}\cdot\vec{m} + 10\vec{m}\cdot\vec{n} - 3\vec{n}\cdot\vec{m} - 6\vec{n}\cdot\vec{n} \\
&= 5\vec{m}\cdot\vec{m} + 10\vec{m}\cdot\vec{n} - 3\vec{m}\cdot\vec{n} - 6\vec{n}\cdot\vec{n} \\
&= 5|\vec{m}|^2 + 7\vec{m}\cdot\vec{n} - 6|\vec{n}|^2 \\
&= 5|\vec{m}|^2 + 7|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cos\angle(\vec{m},\vec{n}) - 6|\vec{n}|^2 \\
&= 5\cdot 2^2 + 7\cdot 2\cdot 4\cdot\cos\tfrac{\pi}{3} - 6\cdot 4^2 \\
&= 20 + 56\cdot\tfrac{1}{2} - 96 = -48.
\end{aligned}$$

Primjer 3.4.8. Naći duljinu vektora $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, ako je $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 2$ te $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Rješenje. Koristeći svojstva skalarnog produkta računamo

$$\begin{aligned}
|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} &= (2\vec{m} - 3\vec{n}) \cdot (2\vec{m} - 3\vec{n}) \\
&= 4\vec{m} \cdot \vec{m} - 6\vec{m} \cdot \vec{n} - 6\vec{n} \cdot \vec{m} + 9\vec{n} \cdot \vec{n} \\
&= 4\vec{m} \cdot \vec{m} - 6\vec{m} \cdot \vec{n} - 6\vec{m} \cdot \vec{n} + 9\vec{n} \cdot \vec{n} \\
&= 4|\vec{m}|^2 - 12\vec{m} \cdot \vec{n} + 9|\vec{n}|^2 \\
&= 4|\vec{m}|^2 - 12|\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cos\angle(\vec{m}, \vec{n}) + 9|\vec{n}|^2 \\
&= 4 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 9 \cdot 2^2 \\
&= 36 - 72 \cdot \frac{1}{2} + 36 = 36.
\end{aligned}$$

Dakle, $|\vec{a}| = 6$.

3.5 Vektorski produkt

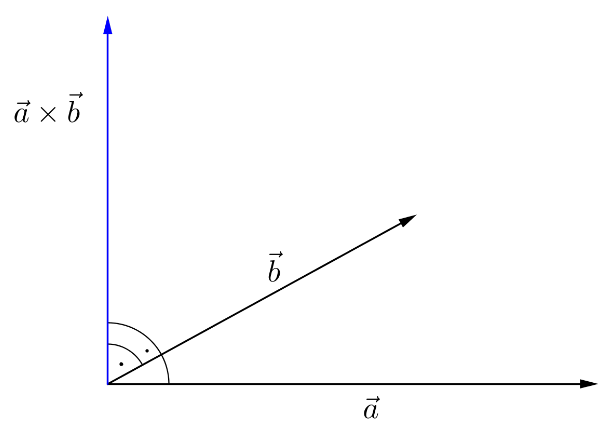
Vektorski umnožak (*produkt*) vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor koji označavamo s $\vec{a} \times \vec{b}$, a definiramo na sljedeći način.

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, tada je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni vektori, tada je duljina vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ jednaka

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je okomit na ravninu određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i orijentiran tako da je uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ desna baza prostora V^3. (To znači da je vektorski produkt orijentiran po pravilu desne ruke, tj. usmjerimo li kažiprst desne ruke duž vektora $\vec{a}$, a srednji prst duž vektora $\vec{b}$, tada je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ orijentiran u smjeru ispruženog palca desne ruke.)



Slika 78: Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$

Preslikavanje $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \times \vec{b}$ sa $V^3 \times V^3$ u V^3 nazivamo *vektorskim množenjem vektora*.

Napomenimo da se, za razliku od skalarnog množenja koje se može definirati u prostorima proizvoljne dimenzije, vektorsko množenje definira isključivo u trodimenzionalnim prostorima. Njegova je primjena značajna u fizici i tehnici, gdje se mnoge veličine kao npr. moment veličine gibanja, moment sile itd. opisuju odgovarajućim vektorskim produktom.

Iz definicije vektorskog produkta je vidljivo da je

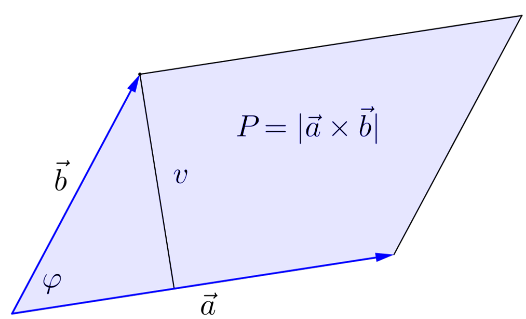
$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b},$$

tj. vektorsko množenje je antikomutativno.

Također, vektorskim produktom može se karakterizirati kolinearnost dvaju vektora. Naime, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ako i samo ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni.

Nadalje, za nekolinearne vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, $|\vec{a} \times \vec{b}|$ predstavlja površinu paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Naime, ako s v označimo visinu paralelograma, a s P njegovu površinu, te ako je $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, onda je (slika 79) $\sin\varphi = \frac{v}{|\vec{b}|}$ odakle slijedi

$$P = |\vec{a}|v = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$



Slika 79: $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je površina paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Važna svojstva vektorskog množenja su:

(a) $(t\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (t \in \mathbb{R})$ (kvaziasocijativnost),

(b) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}, \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
(distributivnost vektorskog množenja prema zbrajanju vektora).

Za jedinične, u parovima okomite, vektore $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ u smjeru koordinatnih osi desnog pravokutnog koordinatnog sustava vrijedi
$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$,
$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

Ako su $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ prikazi vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ prostora V^3, tada se koristeći svojstva vektorskog množenja lako pokaže da se vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ računa po formuli

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.$$

Ovu jednakost simbolički zapisujemo u obliku determinante trećeg reda

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

koju računamo razvojem po elementima prvog retka.

Primjer 3.5.1. Zadani su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Naći vektore $\vec{a} \times \vec{b}$, $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + 3\vec{c})$.
Rješenje.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 27\vec{i} + 21\vec{j} + 10\vec{k}. \end{aligned}$$

Nadalje, računamo
$2\vec{a} + \vec{b} = 2(2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}) + (\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k}) = 5\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$,
$\vec{b} + 3\vec{c} = (\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k}) + 3(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -5\vec{i} - 6\vec{k}$,
pa je

$$\begin{aligned} (2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + 3\vec{c}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -5 & -3 \\ -5 & 0 & -6 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 30\vec{i} + 45\vec{j} - 25\vec{k}. \end{aligned}$$

Primjer 3.5.2. Izračunati $|\vec{a} \times 3\vec{b}|$ ako je $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times 3\vec{b}| &= |3(\vec{a} \times \vec{b})| = 3|\vec{a} \times \vec{b}| = 3|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin \tfrac{\pi}{3} = 36 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}. \end{aligned}$$

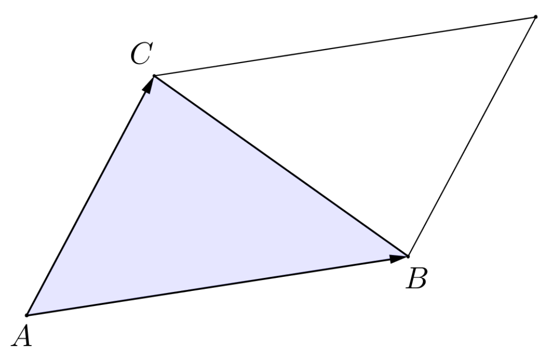
Primjer 3.5.3. Naći površinu paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} - 2\vec{b}$ i $4\vec{a} + 3\vec{b}$, ako je $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

Rješenje. Površina paralelograma jednaka je $P = |(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (4\vec{a} + 3\vec{b})|$. Koristeći svojstva vektorskog produkta imamo

$$\begin{aligned} P = |(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (4\vec{a} + 3\vec{b})| &= |4\vec{a} \times \vec{a} + 3\vec{a} \times \vec{b} - 8\vec{b} \times \vec{a} - 6\vec{b} \times \vec{b}| \\ &= |\vec{0} + 3\vec{a} \times \vec{b} + 8\vec{a} \times \vec{b} + \vec{0}| = |11\vec{a} \times \vec{b}| \\ &= 11|\vec{a} \times \vec{b}| = 11|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= 11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} = 33\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Primjer 3.5.4. Naći površinu trokuta s vrhovima $A(2, 3, -2)$, $B(-1, 4, 2)$ i $C(5, 0, -10)$. Naći visinu na stranicu $\overline{AB}$.

Rješenje. Površina trokuta ABC jednaka je polovici površine paralelograma razapetog vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$; dakle $P_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.



Slika 80: $P_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

Prikazi vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ u bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ su

$$\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{3}i - 3\vec{j} - 8\vec{k},$$

pa je

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & -8 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 12\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Sada je $P_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + (-12)^2 + 6^2} = 7.$

Duljina stranice $\overline{AB}$ iznosi $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{26}$, pa je visina u trokutu ABC na stranicu $\overline{AB}$ jednaka

$$v = \frac{2P_{ABC}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2 \cdot 7}{\sqrt{26}} = \frac{7\sqrt{26}}{13}.$$

3.6 Mješoviti produkt

Mješoviti produkt vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ je broj $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

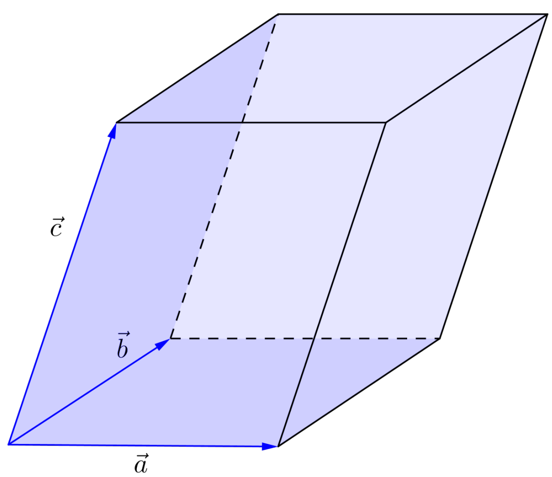
Vrijedi

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

Pomoću mješovitog produkta može se karakterizirati komplanarnost triju vektora. Naime, ako je $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ i $\vec{c} \neq \vec{0}$, tada je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ ako i samo ako je vektor $\vec{c}$ okomit na vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, odnosno vektor $\vec{c}$ leži u ravnini paralelnoj s vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Prema tome, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ ako i samo ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni.

Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni, i ako je pritom $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ desna baza prostora V^3, tada je volumen V paralelepipeda kojeg oni razapinju jednak vrijednosti mješovitog produkta $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Ukoliko baza $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ nije desna, mješoviti produkt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ je negativan broj, a volumen paralelepipeda iznosi $V = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Stoga je uvijek

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$



Slika 81: $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ je volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Nadalje, ako su $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ i $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ prikazi vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ u bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ prostora V^3 tada se, koristeći svojstva skalarnog i vektorskog množenja vektora, lako pokaže da se mješoviti produkt vektora $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ računa pomoću determinante

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Primjer 3.6.1. Zadani su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ i $\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Naći mješovite produkte $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ i $(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$.

Rješenje. Imamo

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -60,$$

odakle se korištenjem svojstava vektorskog i mješovitog produkta dobije $(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 60$.

Primjer 3.6.2. Ispitati komplanarnost vektora $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -6\vec{i} + 15\vec{j} + 2\vec{k}$.

Rješenje. Primijetimo da smo u primjeru 3.3.6 pokazali da su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno zavisni, odnosno komplanarni. Sada znamo da se komplanarnost vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ može provjeriti i računanjem mješovitog produkta $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Kako je

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -6 & 15 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

zaključujemo da su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni.

Primjer 3.6.3. Naći parametar $t \in \mathbb{R}$ tako da vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} + 6\vec{j} + t\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ budu komplanarni, te zatim vektor $\vec{c}$ prikazati kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rješenje. Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su komplanarni ako i samo ako je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$. Kako je

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 7 & 6 & t \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -8t - 64,$$

to su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni ako i samo ako je $-8t - 64 = 0$, odnosno $t = -8$.

Zapišimo vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Dakle,

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

za neki izbor skalara $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sada je

$$\begin{aligned} \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} &= \alpha(3\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}) + \beta(7\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{k}) \\ &= (3\alpha + 7\beta)\vec{i} + (-2\alpha + 6\beta)\vec{j} + (8\alpha - 8\beta)\vec{k}. \end{aligned}$$

Odavde zbog linearne nezavisnosti vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ slijedi

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3\alpha & + & 7\beta & = & 1 \\ -2\alpha & + & 6\beta & = & 2 \\ 8\alpha & - & 8\beta & = & -4 \end{array} \right. .$$

Jedinstveno rješenje ovoga sustava glasi $\alpha = -\frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{4}$. Prema tome, $\vec{c} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$.

Primjer 3.6.4. Naći volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$ i $\vec{c} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, te visinu paralelepipeda na bazu razapetu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rješenje. Mješoviti produkt iznosi

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

pa je volumen paralelepipeda $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |-3| = 3$.

Baza razapeta vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je paralelogram površine $P = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ je vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k},$$

odakle je $P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{77}$.

Konačno, visinu v paralelepipeda dobit ćemo tako da njegov volumen podijelimo s površinom baze; dakle

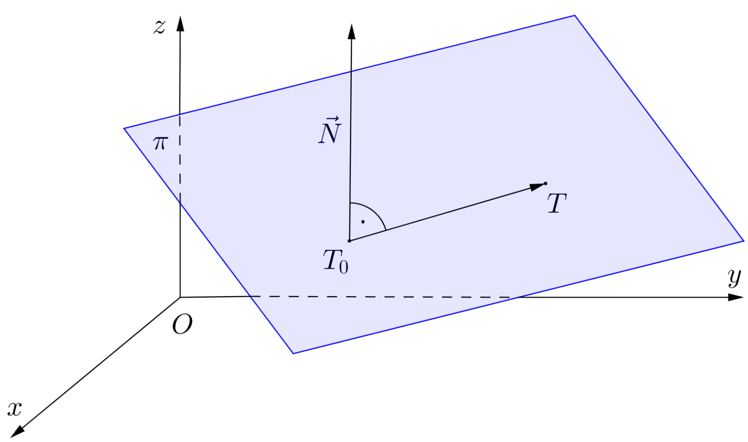
$$v = \frac{V}{P} = \frac{3}{\sqrt{77}} = \frac{3\sqrt{77}}{77}.$$

4 Analitička geometrija prostora

4.1 Ravnina u prostoru

Položaj ravnine u prostoru može se odrediti na razne načine. Opišimo neke od njih.

Položaj ravnine u prostoru jednoznačno je određen jednom njezinom točkom i *vektorom normale*, tj. vektorom okomitim na tu ravninu. Neka je u desnom pravokutnom koordinatnom sustavu s ishodištem u točki O i jediničnim vektorima $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ u pozitivnim smjerovima koordinatnih osi x, y, z redom zadana točka $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i vektor $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ različit od nulvektora. Želimo naći jednadžbu ravnine π koja sadrži točku T_0 i okomita je na vektor $\vec{N}$.



Slika 82: Ravnina π određena točkom T_0 i vektorom normale $\vec{N}$

Uočimo, točka $T(x, y, z)$, $T \neq T_0$, pripadat će ravnini π ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{T_0T}$ i $\vec{N}$ međusobno okomiti, što znači da je njihov skalarni produkt jednak nuli. Također, za $T = T_0$ je $\overrightarrow{T_0T} = \vec{0}$, što daje $\vec{N} \cdot \overrightarrow{T_0T} = 0$. Dakle,

$$T \in \pi \Leftrightarrow \vec{N} \cdot \overrightarrow{T_0T} = 0.$$

Kako je $\overrightarrow{T_0T} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$, to jednakost $\vec{N} \cdot \overrightarrow{T_0T} = 0$ možemo zapisati kao $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Prema tome, ravnina π određena točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i vektorom normale $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \neq \vec{0}$ je skup svih točaka $T(x, y, z)$ čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{21}$$

Stavimo li $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, tada jednadžbu (21) ravnine π možemo zapisati u obliku

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{22}$$

Jednakošću (22) dan je *opći* ili *implicitni* oblik jednadžbe ravnine π.

Osim u skalarnom, jednadžbu (22) možemo zapisati i u vektorskom obliku. Naime, označimo li s $\vec{r} := \overrightarrow{OT}$ radijvektor, tj. vektor položaja, točke T, tada je $\vec{N} \cdot \vec{r} = (A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = Ax + By + Cz$. Prema tome, *vektorski* oblik jednadžbe (22) glasi

$$\vec{N} \cdot \vec{r} + D = 0. \tag{23}$$

Nadalje, označimo li s $\vec{r}_0 := \overrightarrow{OT_0}$ radijvektor točke T_0, tada je

$$\vec{N} \cdot \vec{r}_0 = (A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}) \cdot (x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D,$$

pa jednadžbu (23) možemo pisati u obliku

$$\vec{N} \cdot \vec{r} = \vec{N} \cdot \vec{r}_0. \tag{24}$$

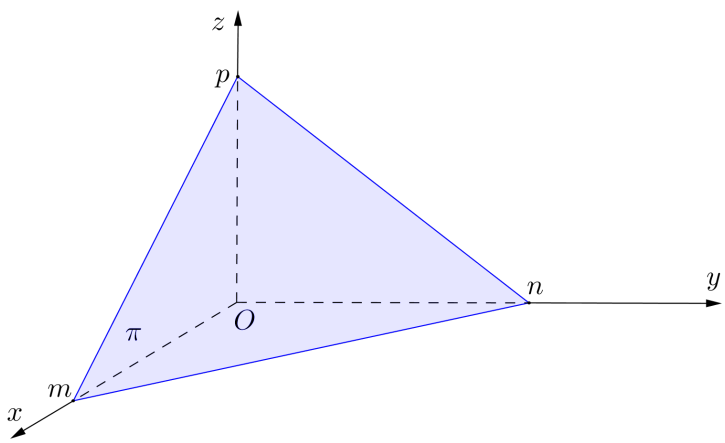
Dakle, točka T pripada ravnini π određenoj točkom T_0 i vektorom normale $\vec{N}$, ako i samo ako njen radijvektor $\vec{r} = \overrightarrow{OT}$ zadovoljava jednadžbu (24).

Ako je $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ i $D \neq 0$, onda uz oznake $m = -\frac{D}{A}$, $n = -\frac{D}{B}$ i $p = -\frac{D}{C}$ jednadžbu (22) možemo zapisati u obliku

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1, \tag{25}$$

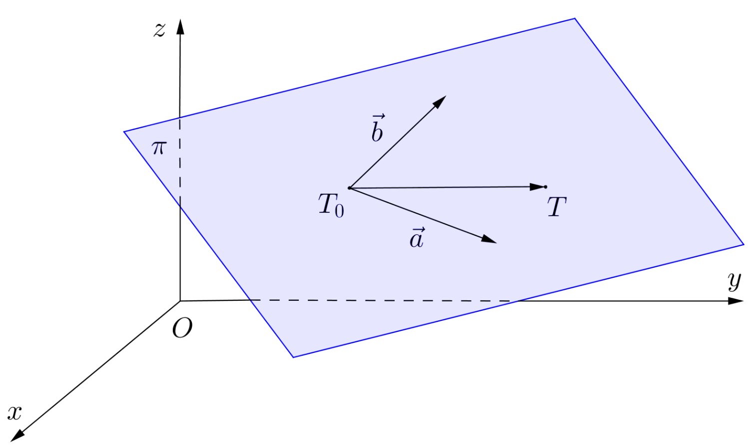
koji nazivamo *segmentnim* oblikom jednadžbe ravnine π.

Uočimo da točke $T_1(m, 0, 0)$, $T_2(0, n, 0)$ i $T_3(0, 0, p)$ pripadaju ravnini π budući da njihove koordinate zadovoljavaju jednadžbu (25). Odavde vidimo da su m, n i p odsječci (segmenti) koje ravnina odsijeca na koordinatnim osima (slika 83). Otuda potječe naziv segmentni oblik jednadžbe ravnine.



Slika 83: Segmentni oblik jednadžbe ravnine π

Osim točkom i vektorom normale, ravnina je jednoznačno određena jednom svojom točkom i dvama nekolinearnim vektorima koji su paralelni s ravninom. Neka je zadana točka $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i dva nekolinearna vektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Želimo naći jednadžbu ravnine π koja prolazi točkom T_0, a paralelna je s vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



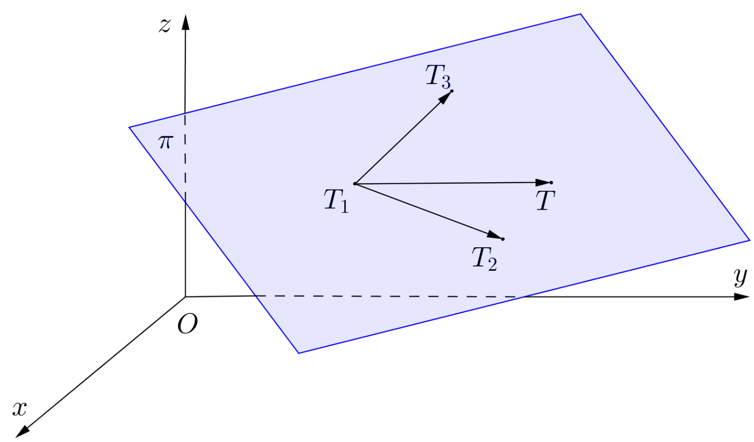
Slika 84: Ravnina π određena točkom T_0 i vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$

Da bi točka $T(x, y, z)$ pripadala ravnini π, nužno je i dovoljno da su vektori $\overrightarrow{T_0T}$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ komplanarni, što znači da je njihov mješoviti produkt jednak nuli, tj. $(\overrightarrow{T_0T} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0$. Ovu jednakost možemo zapisati u obliku determinante

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \tag{26}$$

i njome je dana jednadžba ravnine π određene točkom T_0 i dvama nekolinearnim vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Ravninu je moguće jednoznačno zadati i trima točkama $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$ i $T_3(x_3, y_3, z_3)$ koje ne leže sve na istom pravcu.



Slika 85: Ravnina π određena točkama T_1, T_2 i T_3

Naime, tada su vektori $\vec{a} = \overrightarrow{T_1T_2}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{T_1T_3}$ nekolinearni i paralelni traženoj ravnini. Prema tome, ravnina sadrži točku T_1, a paralelna je vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, čime smo ovaj slučaj sveli na prethodni. Prema (26), zaključujemo da jednadžba ravnine određene točkama $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$ i $T_3(x_3, y_3, z_3)$ glasi

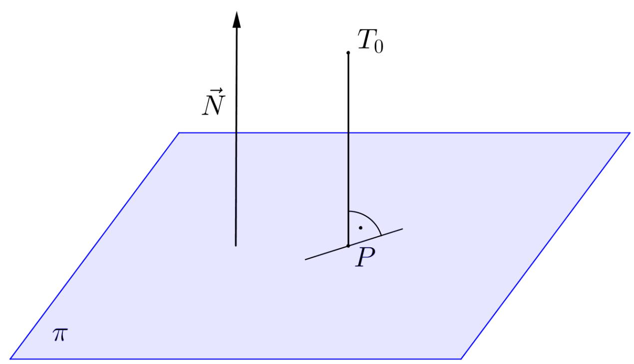
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{27}$$

Udaljenost točke od ravnine

Neka je zadana točka $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i ravnina π jednadžbom

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Pod *udaljenošću točke* T_0 *od ravnine* π podrazumijevamo udaljenost točke T_0 od njezine ortogonalne projekcije P na ravninu π.



Slika 86: Udaljenost točke T_0 od ravnine π

Vektor $\overrightarrow{PT_0}$ i vektor normale $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ ravnine π su kolinearni, pa je $\angle(\vec{N}, \overrightarrow{PT_0}) = 0$ ili $\angle(\vec{N}, \overrightarrow{PT_0}) = \pi$. Stoga je $|\cos\angle(\vec{N}, \overrightarrow{PT_0})| = 1$. Iz formule za skalarni produkt dvaju vektora

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{PT_0} = |\vec{N}| \cdot |\overrightarrow{PT_0}| \cos\angle(\vec{N}, \overrightarrow{PT_0})$$

slijedi

$$|\vec{N} \cdot \overrightarrow{PT_0}| = |\vec{N}| \cdot |\overrightarrow{PT_0}||\cos\angle(\vec{N}, \overrightarrow{PT_0})| = |\vec{N}| \cdot |\overrightarrow{PT_0}|,$$

pa je udaljenost točke T_0 od ravnine π, u oznaci $d(T_0, \pi)$, jednaka

$$d(T_0, \pi) = |\overrightarrow{PT_0}| = \frac{|\vec{N} \cdot \overrightarrow{PT_0}|}{|\vec{N}|}. \tag{28}$$

Kako točka P pripada ravnini π, to njezin radijvektor $\overrightarrow{OP}$ zadovoljava jednadžbu (23), tj. vrijedi $\vec{N} \cdot \overrightarrow{OP} + D = 0$, odnosno $\vec{N} \cdot \overrightarrow{OP} = -D$. Nadalje, $\vec{N} \cdot \overrightarrow{OT_0} = (A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}) \cdot (x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}) = Ax_0 + By_0 + Cz_0$. Sada je

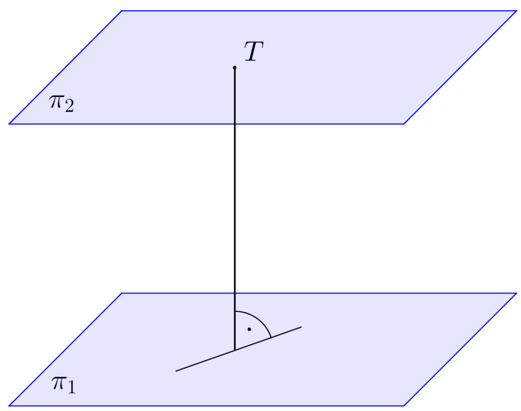
$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{PT_0} = \vec{N} \cdot (\overrightarrow{OT_0} - \overrightarrow{OP}) = \vec{N} \cdot \overrightarrow{OT_0} - \vec{N} \cdot \overrightarrow{OP} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D,$$

te $|\vec{N}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, pa se uvrštavanjem u formulu (28) dobije

$$d(T_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{29}$$

Udaljenost paralelnih ravnina

Ako su π_1 i π_2 dvije paralelne ravnine, tada se njihova udaljenost, u oznaci $d(\pi_1, \pi_2)$, računa kao udaljenost bilo koje točke T ravnine π_2 od ravnine π_1.



Slika 87: $d(\pi_1, \pi_2) = d(T, \pi_1)$

Kut između dviju ravnina

Ako se ravnine π_1 i π_2 sijeku po pravcu p, tada se kut među njima definira kao kut između pravaca koji su presječnice tih ravnina i bilo koje ravnine okomite na pravac p. Pritom se uvijek uzima da je mjera kuta iz intervala $[0, \frac{\pi}{2}]$. Drugim riječima, radi se o kutu koji zatvaraju vektori normala ravnina π_1 i π_2, odnosno o suplementu toga kuta, ovisno o tome koji je od ovih dvaju kutova manji.

Neka su ravnine π_1 i π_2 zadane redom jednadžbama $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Njihovi vektori normala su $\vec{N}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ i $\vec{N}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$. Označimo s φ kut koji zatvaraju ove dvije ravnine. Uvažimo li da $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, imamo $\cos\varphi = |\cos\angle(\vec{N}_1, \vec{N}_2)|$, pa iz formule za skalarni produkt dvaju vektora slijedi

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|}, \tag{30}$$

odnosno
$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Ravnine π_1 i π_2 su *paralelne* ako i samo ako su njihovi vektori normala kolinearni, tj. postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{N}_1 = t\vec{N}_2$. Dakle, $A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k} = tA_2\vec{i} + tB_2\vec{j} + tC_2\vec{k}$, odnosno $A_1 = tA_2$, $B_1 = tB_2$, $C_1 = tC_2$ za neki $t \in \mathbb{R}$. Odavde zaključujemo da su ravnine π_1 i π_2 paralelne ako i samo ako je

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

(U slučaju da je neki od nazivnika jednak nuli, smatramo da je pripadni brojnik također jednak nuli.)

Ravnine π_1 i π_2 su *okomite* ako i samo ako su njihovi vektori normala okomiti, tj. $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$, odnosno

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Primjer 4.1.1. Naći jednadžbe koordinatnih ravnina xy, xz i yz.

Rješenje. Koordinatne ravnine prolaze ishodištem $O(0,0,0)$ koordinatnog sustava.

xy-ravnina ima vektor normale $\vec{N} = \vec{k}$. Prema (21), njena jednadžba je

$$0 \cdot (x-0) + 0 \cdot (y-0) + 1 \cdot (z-0) = 0,$$

odnosno $z = 0$.

Vektor normale xz-ravnine je $\vec{j}$, pa je njena jednadžba $y = 0$.

Vektor normale yz-ravnine je $\vec{i}$, pa je njena jednadžba $x = 0$.

Primjer 4.1.2. Naći jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T(-3,5,1)$ i okomita je na os y.

Rješenje. Kako je tražena ravnina π okomita na os y, to za vektor normale $\vec{N}$ ravnine π možemo uzeti bilo koji vektor kolinearan s $\vec{j}$, recimo upravo $\vec{j}$. Dakle, ravnina π sadrži točku $T(-3,5,1)$ i ima vektor normale $\vec{N} = \vec{j}$, pa je prema (21) njena jednadžba

$$\pi \ldots \quad 0 \cdot (x+3) + 1 \cdot (y-5) + 0 \cdot (z-1) = 0,$$

tj.
$$\pi \ldots \quad y - 5 = 0.$$

Primjer 4.1.3. Naći jednadžbu ravnine koja sadrži točku $T(2,0,-3)$, a paralelna je ravnini $2x-7y+12z-6=0$.

Rješenje. Tražena ravnina π je paralelna ravnini $\pi_1 \ldots 2x-7y+12z-6=0$, pa su stoga vektori normala ravnina π i π_1 kolinearni. Zato za vektor normale $\vec{N}$ ravnine π možemo uzeti vektor $\vec{N}=2\vec{i}-7\vec{j}+12\vec{k}$. Osim toga, ravnina π sadrži točku $T(2,0,-3)$, pa je prema (21) njezina jednadžba

$$\pi \ldots \quad 2(x-2)-7(y-0)+12(z+3)=0,$$

odnosno

$$\pi \ldots \quad 2x-7y+12z+32=0.$$

Primjer 4.1.4. Naći jednadžbu ravnine koja sadrži točku $T(1,-1,2)$, a okomita je na ravnine $3x-y+5z-4=0$ i $x+2y-3z+1=0$.

Rješenje. Kako je tražena ravnina π okomita na ravninu $\pi_1 \ldots 3x-y+5z-4=0$, to je njen vektor normale $\vec{N}$ okomit na vektor normale $\vec{N}_1=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ ravnine π_1. Ravnina π je okomita i na ravninu $\pi_2 \ldots x+2y-3z+1=0$, pa je stoga $\vec{N}$ okomit i na vektor normale $\vec{N}_2=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ ravnine π_2. Dakle, možemo uzeti

$$\vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-7\vec{i}+14\vec{j}+7\vec{k}.$$

Osim toga, ravnina π sadrži točku T, pa je prema (21) njena jednadžba

$$\pi \ldots \quad -7(x-1)+14(y+1)+7(z-2)=0,$$

odnosno

$$\pi \ldots \quad x-2y-z-1=0.$$

Primjer 4.1.5. Naći jednadžbu ravnine koja prolazi točkama $A(2,-1,3)$, $B(1,0,4)$ i $C(-2,-5,1)$.

Rješenje. Prema (27), jednadžba ravnine π određene točkama A, B i C je

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x-2 & y-(-1) & z-3 \\ 1-2 & 0-(-1) & 4-3 \\ -2-2 & -5-(-1) & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \text{(razvoj po elementima 1. retka)} \\ &= 2(x-2)-6(y+1)+8(z-3), \end{aligned}$$

tj.

$$\pi \ldots \quad x-3y+4z-17=0.$$

Primjer 4.1.6. Naći jednadžbu ravnine koja prolazi točkama $A(4,3,0)$ i $B(6,3,-1)$, a okomita je na ravninu $x-3y+7z-9=0$.

Rješenje. Kako tražena ravnina π prolazi točkama A i B, to je njen vektor normale $\vec{N}$ okomit na vektor $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{k}$. Nadalje, ravnina π je okomita na ravninu $\pi_1 \ldots x-3y+7z-9=0$, što znači da je $\vec{N}$ okomit na vektor normale $\vec{N}_1=\vec{i}-3\vec{j}+7\vec{k}$ ravnine π_1. Zato je

$$\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\vec{N}_1=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 7 \end{vmatrix}=-3\vec{i}-15\vec{j}-6\vec{k}.$$

Ravnina π prolazi točkom $A(4,3,0)$ i ima vektor normale $\vec{N}=-3\vec{i}-15\vec{j}-6\vec{k}$, pa je prema (21) njena jednadžba

$$\pi \ldots \quad -3(x-4)-15(y-3)-6(z-0)=0,$$

tj.

$$\pi \ldots \quad x+5y+2z-19=0.$$

Primjer 4.1.7. Naći jednadžbu ravnine koja je paralelna osi z, na x-osi odsijeca odsječak 4, a na y-osi odsječak -2.

Rješenje. Kako je tražena ravnina $\pi \ldots Ax+By+Cz+D=0$ paralelna osi z, to je njezin vektor normale $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ okomit na vektor smjera osi z, tj. na vektor $\vec{k}$. Stoga je $\vec{N}\cdot\vec{k}=0$, tj. $C=0$. Dakle, opći oblik jednadžbe ravnine π je $Ax+By+D=0$ (bez člana Cz), pa je odgovarajući segmentni oblik (vidi (25)) bez člana $\frac{z}{p}$, tj.

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1.$$

Pritom je $m=4$ i $n=-2$, pa je segmentni oblik jednadžbe ravnine π

$$\pi \ldots \quad \frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1,$$

a opći oblik

$$\pi \ldots \quad x-2y-4=0.$$

Primjer 4.1.8. Naći jednadžbu skupa točaka koje su jednako udaljene od točaka $A(3,2,-1)$ i $B(1,0,5)$.

Rješenje. Skup točaka koje su jednako udaljene od točaka A i B je ravnina π koja prolazi polovištem $T(x_T,y_T,z_T)$ dužine $\overline{AB}$ i ima vektor normale $\vec{N}=\overrightarrow{AB}=-2\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$. Koordinate polovišta T su redom:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+1}{2} = 2, \\ y_T &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1, \\ z_T &= \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2. \end{aligned}$$

Dakle, ravnina π prolazi točkom $T(2,1,2)$ i ima vektor normale $\vec{N} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$, pa je prema (21) njena jednadžba

$$\pi \ldots \quad -2(x-2) - 2(y-1) + 6(z-2) = 0,$$

tj.

$$\pi \ldots \quad x + y - 3z + 3 = 0.$$

Primjer 4.1.9. Naći udaljenost točke $T(5,-1,2)$ od ravnine $x + 2y - 2z + 10 = 0$.

Rješenje. Udaljenost točke $T(5,-1,2)$ od ravnine $\pi \ldots x + 2y - 2z + 10 = 0$ izračunat ćemo pomoću formule (29). Koordinate točke T su $x_0 = 5$, $y_0 = -1$ i $z_0 = 2$; koordinate vektora normale ravnine π su $A = 1$, $B = 2$ i $C = -2$, a $D = 10$. Prema (29) imamo

$$d(T,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 + 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|9|}{3} = 3.$$

Primjer 4.1.10. Naći udaljenost ravnina $3x - 4y + z + 2 = 0$ i $9x - 12y + 3z + 15 = 0$.

Rješenje. Vektor normale ravnine $\pi_1 \ldots 3x - 4y + z + 2 = 0$ je $\vec{N}_1 = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, a vektor normale ravnine $\pi_2 \ldots 9x - 12y + 3z + 15 = 0$ je $\vec{N}_2 = 9\vec{i} - 12\vec{j} + 3\vec{k}$. Budući da je $\vec{N}_2 = 3\vec{N}_1$, ravnine π_1 i π_2 su paralelne. Stoga je udaljenost ravnina π_1 i π_2 jednaka udaljenosti bilo koje točke ravnine π_2 od ravnine π_1. Uočimo $T_0(0,0,-5) \in \pi_2$. Prema (29) vrijedi

$$\begin{aligned} d(\pi_1,\pi_2) &= d(T_0,\pi_1) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{26}}{26}. \end{aligned}$$

Primjer 4.1.11. Naći kut koji zatvaraju ravnine $x - 2y + 2z + 13 = 0$ i $3x - 4z + 8 = 0$.

Rješenje. Kut φ koji zatvaraju ravnine $\pi_1 \ldots x-2y+2z+13=0$ i $\pi_2 \ldots 3x-4z+8=0$ izračunat ćemo pomoću formule (30). Vektor normale ravnine π_1 je $\vec{N}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, a ravnine π_2 je vektor $\vec{N}_2 = 3\vec{i} - 4\vec{k}$. Prema (30) vrijedi

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{|1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-4)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{3 \cdot 5} = \frac{1}{3},$$

pa je $\varphi \approx 70.53°$.

Primjer 4.1.12. Naći kut između ravnine koja prolazi točkama $A(1,0,0)$, $B(0,2,-1)$ i $C(-1,1,1)$ i yz-ravnine.

Rješenje. Vektor normale $\vec{N}_1$ ravnine π_1 koja prolazi točkama A, B i C je okomit na vektore $\overrightarrow{AB} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ i $\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, pa je

$$\vec{N}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Vektor normale yz-ravnine je $\vec{N}_2 = \vec{i}$. Prema (30) imamo

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

pa je $\varphi \approx 54.74°$.

4.2 Pravac u prostoru

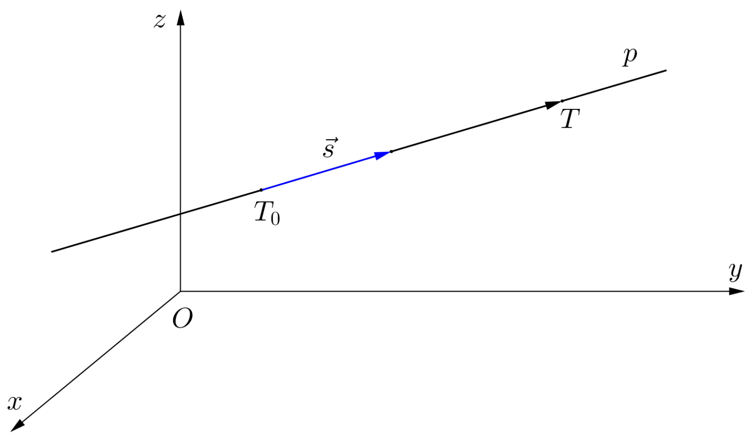
Položaj pravca u prostoru jednoznačno je određen jednom njegovom točkom i *vektorom smjera*, tj. ne-nulvektorom s kojim je pravac paralelan. Neka je zadana točka $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i ne-nulvektor $\vec{s} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Želimo naći jednadžbu pravca p koji prolazi točkom T_0, a $\vec{s}$ mu je vektor smjera.

Točka $T(x,y,z)$ pripadat će pravcu p ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{T_0T}$ i $\vec{s}$ kolinearni, tj. ako i samo ako postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{T_0T} = t\vec{s}$. Ovu jednakost možemo zapisati kao

$$(x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k} = ta\vec{i} + tb\vec{j} + tc\vec{k},$$

a ispunjena je ako i samo ako vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= ta, \\ y - y_0 &= tb, \\ z - z_0 &= tc. \end{aligned}$$



Slika 88: Pravac p određen točkom T_0 i vektorom smjera $\vec{s}$

Odavde dobivamo *parametarski* oblik jednadžbe pravca p koji prolazi točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i ima vektor smjera $\vec{s} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z &= z_0 + tc \end{aligned} \tag{31}$$

Izrazimo li parametar t iz jednadžbi (31):

$$t = \frac{x - x_0}{a}, \quad t = \frac{y - y_0}{b}, \quad t = \frac{z - z_0}{c},$$

dobivamo *kanonski* oblik jednadžbe pravca p koji prolazi točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i ima vektor smjera $\vec{s} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \tag{32}$$

(Ako je neki od koeficijenata a, b, c u (32) jednak nuli, podrazumijevamo da je odgovarajući brojnik također jednak nuli.)

Osim jednom točkom i vektorom smjera, položaj pravca u prostoru jednoznačno je određen i dvjema različitim točkama koje mu pripadaju. Naime, ako točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2(x_2, y_2, z_2)$ pripadaju pravcu p, tada je $\vec{s} = \overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$ njegov vektor smjera. Sada iz (31) dobivamo *parametarski* oblik

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1), \qquad t \in \mathbb{R}, \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{aligned} \tag{33}$$

a iz (32) *kanonski* oblik

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{34}$$

jednadžbe pravca p kroz točke $T_1(x_1,y_1,z_1)$ i $T_2(x_2,y_2,z_2)$.

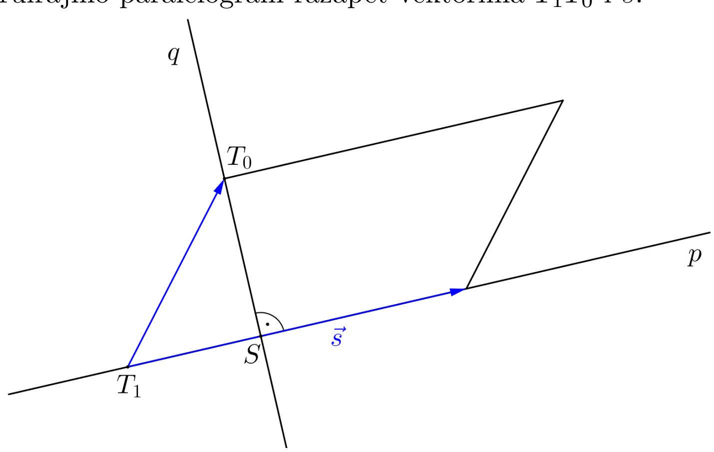
Konačno, pravac je moguće zadati i kao presjek dviju ravnina koje nisu paralelne. Neka su ravnine π_1 i π_2 zadane jednadžbama $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ i $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ redom i neka ne vrijedi $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, tj. te ravnine nisu paralelne. Neka je pravac p presjek ravnina π_1 i π_2. Tada pravac p čine sve točke $T(x,y,z)$ čije koordinate zadovoljavaju sustav linearnih jednadžbi

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} A_1x & + & B_1y & + & C_1z & + & D_1 & = & 0 \\ A_2x & + & B_2y & + & C_2z & + & D_2 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Budući da pravac p leži u obje ravnine, to je njegov vektor smjera kolinearan s $\vec{N}_1\times\vec{N}_2$, gdje su $\vec{N}_1$ i $\vec{N}_2$ vektori normala ravnina π_1 i π_2 redom.

Udaljenost točke od pravca

Neka je zadan pravac p i točka $T_0(x_0,y_0,z_0)$ koja ne leži na pravcu p. Želimo izračunati udaljenost točke T_0 od pravca p. Postupamo na sljedeći način. U ravnini određenoj pravcem p i točkom T_0 povučemo pravac q kroz točku T_0 okomit na pravac p (v. sliku 89). Neka je točka S presjek pravaca p i q. Udaljenost točke T_0 od pravca p, u oznaci $d(T_0,p)$, jednaka je udaljenosti točaka T_0 i S. Sada na pravcu p uzmimo proizvoljnu točku T_1. Za predstavnika vektora smjera $\vec{s}$ pravca p uzmimo orijentiranu dužinu s početkom u točki T_1. Konstruirajmo paralelogram razapet vektorima $\overrightarrow{T_1T_0}$ i $\vec{s}$.



Slika 89: Udaljenost točke T_0 od pravca p

Uočimo, $d(T_0, p) = d(T_0, S)$ je duljina visine tog paralelograma. Kako je površina paralelograma $P = |\overrightarrow{T_1T_0} \times \vec{s}|$, a duljina njegove osnovice $|\vec{s}|$, to je duljina visine paralelograma jednaka kvocijentu njegove površine i duljine osnovice, tj. vrijedi

$$d(T_0, S) = \frac{|\overrightarrow{T_1T_0} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

Prema tome, udaljenost točke T_0 od pravca p s vektorom smjera $\vec{s}$ računamo po formuli

$$d(T_0, p) = \frac{|\overrightarrow{T_1T_0} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}, \tag{35}$$

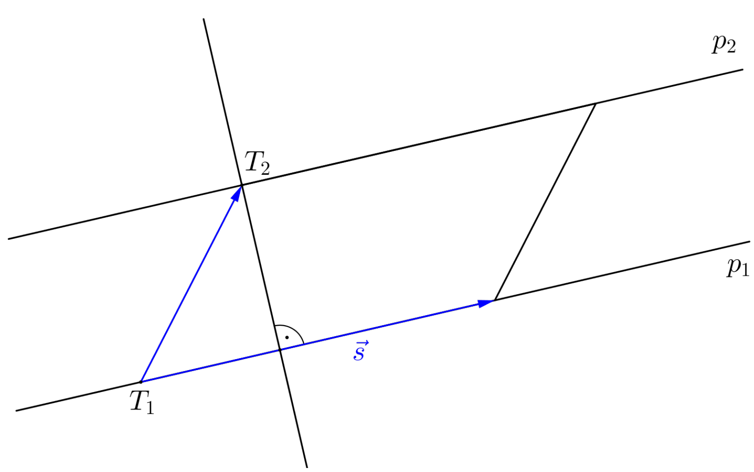
pri čemu je T_1 proizvoljna točka pravca p.

Primijetimo da je formula (35) valjana i u slučaju $T_0 \in p$. Naime, tada su vektori $\overrightarrow{T_1T_0}$ i $\vec{s}$ kolinearni, pa je $\overrightarrow{T_1T_0} \times \vec{s} = \vec{0}$. Odavde slijedi $d(T_0, p) = 0$.

Udaljenost paralelnih pravaca

Ako su p_1 i p_2 dva paralelna pravca, tada je njihova udaljenost, u oznaci $d(p_1, p_2)$, jednaka udaljenosti bilo koje točke pravca p_2 od pravca p_1 (slika 90). Uzmimo proizvoljne točke $T_1 \in p_1$ i $T_2 \in p_2$. Koristeći formulu (35) zaključujemo da je udaljenost paralelnih pravaca p_1 i p_2, čiji je vektor smjera $\vec{s}$, jednaka $d(T_2, p_1)$ što iznosi

$$d(p_1, p_2) = \frac{|\overrightarrow{T_1T_2} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}. \tag{36}$$



Slika 90: $d(p_1, p_2) = d(T_2, p_1)$

Udaljenost mimosmjernih pravaca

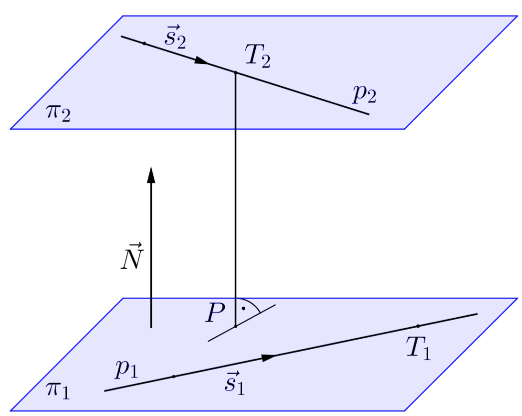
Za pravce koji se ne sijeku i nisu paralelni kažemo da su *mimosmjerni* ili *mimoilazni*.

Ako su pravci p_1 i p_2 mimosmjerni, tada postoje paralelne ravnine π_1 i π_2 takve da je $p_1 \subset \pi_1$ i $p_2 \subset \pi_2$ (v. sliku 91). Stoga je udaljenost pravaca p_1 i p_2 jednaka udaljenosti ravnina π_1 i π_2. Kako su ravnine π_1 i π_2 paralelne, to se njihova udaljenost računa kao udaljenost bilo koje točke ravnine π_2 od ravnine π_1. Uzmimo sada proizvoljnu točku $T_2 \in p_2 \subset \pi_2$. Prema (28) vrijedi

$$d(p_1, p_2) = d(T_2, \pi_1) = \frac{|\vec{N} \cdot \overrightarrow{PT_2}|}{|\vec{N}|}, \tag{37}$$

gdje je P ortogonalna projekcija točke T_2 na ravninu π_1, a $\vec{N}$ vektor normale ravnine π_1 (te ujedno i ravnine π_2 budući da su te ravnine paralelne).

Označimo sa $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ vektore smjerova pravaca p_1 i p_2 redom. Kako pravac p_1 leži u ravnini π_1, to je njegov vektor smjera $\vec{s}_1$ okomit na vektor normale $\vec{N}$ ravnine π_1. Pravac p_2 leži u ravnini π_2, pa je njegov vektor smjera $\vec{s}_2$ okomit na vektor normale $\vec{N}$ ravnine π_2. Po definiciji vektorskog produkta, $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2$ je vektor okomit na oba vektora $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$. (Uočimo, $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \neq \vec{0}$, budući da vektori $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ nisu kolinearni, jer pravci p_1 i p_2 nisu paralelni.) Stoga za vektor normale $\vec{N}$ možemo uzeti $\vec{N} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$.



Slika 91: Udaljenost mimosmjernih pravaca p_1 i p_2

Neka je T_1 proizvoljna točka pravca p_1. Kako je $P \in \pi_1$, te također $T_1 \in \pi_1$, prema (24) zaključujemo da vrijedi

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{OT_1} = \vec{N} \cdot \overrightarrow{OP}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \vec{N} \cdot \overrightarrow{PT_2} &= \vec{N} \cdot (\overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OP}) = \vec{N} \cdot \overrightarrow{OT_2} - \vec{N} \cdot \overrightarrow{OP} \\ &= \vec{N} \cdot \overrightarrow{OT_2} - \vec{N} \cdot \overrightarrow{OT_1} = \vec{N} \cdot (\overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1}) = \vec{N} \cdot \overrightarrow{T_1T_2}. \end{aligned}$$

Uvrstimo dobivene izraze u (37). Tada je udaljenost mimosmjernih pravaca p_1 i p_2 čiji su vektori smjerova $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ jednaka

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{T_1T_2}|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}, \tag{38}$$

gdje su $T_1 \in p_1$ i $T_2 \in p_2$ dvije proizvoljno birane točke.

Jasno je da se formula (38) ne može primijeniti za računanje udaljenosti paralelnih pravaca, budući da su vektori smjerova takvih pravaca kolinearni, pa je nazivnik u formuli (38) jednak nuli.

Nužan i dovoljan uvjet da se neparalelni pravci p_1 i p_2 s vektorima smjerova $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ sijeku jest da su vektori $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ i $\overrightarrow{T_1T_2}$ komplanarni, odnosno $(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{T_1T_2} = 0$, za neki izbor točaka $T_1 \in p_1$ i $T_2 \in p_2$. Stoga je formula (38) valjana za računanje udaljenosti ne samo mimosmjernih pravaca, nego i pravaca koji se sijeku.

Prema tome, želimo li izračunati udaljenost dvaju pravaca, najprije ćemo provjeriti jesu li dani pravci paralelni, tj. vrijedi li $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0}$. Ako su pravci paralelni, za računanje njihove udaljenosti koristit ćemo formulu (36). Ako pravci nisu paralelni, tada se njihova udaljenost računa pomoću formule (38).

Kut između dvaju pravaca

Kut između dvaju pravaca je kut koji zatvaraju njihovi vektori smjerova ili suplement toga kuta, ovisno o tome koji od ova dva kuta ima mjeru iz intervala $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Neka su zadani pravci p_1 i p_2 s vektorima smjerova $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ redom. Označimo s φ kut između ovih dvaju pravaca. Kako je $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, vrijedi $\cos\varphi = |\cos\angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2)|$. Iz formule za skalarni produkt dvaju vektora imamo

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}. \tag{39}$$

Ako su vektori smjerova zadani svojim koordinatama $\vec{s}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$, $\vec{s}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$, tada gornju formulu možemo zapisati kao

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Kut između pravca i ravnine

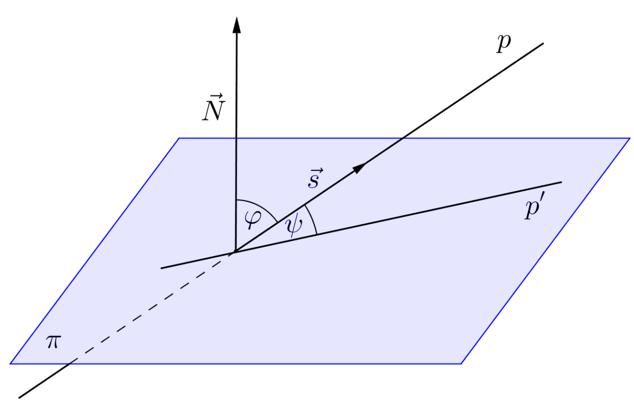
Pravac p je *okomit* na ravninu π ako i samo ako su vektor smjera $\vec{s}$ pravca p i vektor normale $\vec{N}$ ravnine π kolinearni, tj. postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{s} = t\vec{N}$.

Ako pravac p nije okomit na ravninu π, tada je ortogonalna projekcija pravca p na ravninu π pravac. Kut između pravca p i ravnine π definira se kao kut između pravca p i njegove ortogonalne projekcije p' na ravninu π (slika 92).

Neka je $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ vektor normale ravnine π, a $\vec{s} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ vektor smjera pravca p.

Označimo s ψ kut između pravca p i ravnine π. Neka je $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ kut između vektora smjera pravca p i vektora normale ravnine π ili suplement toga kuta, ovisno koji je od ovih dvaju kutova manji. Tada je $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Stoga je

$$\sin\psi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi.$$



Slika 92: Kut između pravca p i ravnine π

Iz formule za skalarni produkt dvaju vektora slijedi

$$\cos\varphi = |\cos\angle(\vec{s},\vec{N})| = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{N}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{N}|},$$

pa je

$$\sin\psi = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{N}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{N}|}, \tag{40}$$

odnosno

$$\sin\psi = \frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Posebno, pravac p i ravnina π su *paralelni* ako i samo ako je $\psi = 0$, odnosno $\vec{s}\cdot\vec{N} = 0$.

Primijetimo da je formula (40) valjana i u slučaju okomitosti pravca p na ravninu π. Zaista,

$$\begin{aligned}
\psi = \tfrac{\pi}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\psi = 1 \Leftrightarrow \frac{|\vec{s}\cdot\vec{N}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{N}|} = 1 \Leftrightarrow |\vec{s}\cdot\vec{N}| = |\vec{s}|\cdot|\vec{N}| \\
&\Leftrightarrow \quad |\vec{s}|\cdot|\vec{N}|\cdot|\cos\angle(\vec{s},\vec{N})| = |\vec{s}|\cdot|\vec{N}| \Leftrightarrow |\cos\angle(\vec{s},\vec{N})| = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \angle(\vec{s},\vec{N}) = 0 \quad \text{ili} \quad \angle(\vec{s},\vec{N}) = \pi \\
&\Leftrightarrow \quad \vec{s} \text{ i } \vec{N} \text{ su kolinearni.}
\end{aligned}$$

Primjer 4.2.1. Provjeriti pripada li točka $T(2,1,-4)$ pravcu $\frac{x-3}{5} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-5}{-3}$.

Rješenje. Uvrstimo koordinate točke T u jednadžbu pravca $p \ldots \frac{x-3}{5} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-5}{-3}$. Budući da je

$$\frac{2-3}{5} \neq \frac{1+8}{3} = \frac{-4-5}{-3},$$

točka T ne pripada pravcu p.

Primjer 4.2.2. Naći jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T(2,-3,6)$, a paralelan je vektoru $\vec{s} = 3\vec{i} + \vec{j} - 11\vec{k}$.

Rješenje. Budući da je traženi pravac p paralelan vektoru $\vec{s}$, to je $\vec{s}$ vektor smjera pravca p. Prema (32), jednadžba pravca p je

$$p \ldots \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{-11}.$$

Primjer 4.2.3. Kroz točku $T(2,3,0)$ povući pravac paralelan osi x.

Rješenje. Traženi pravac p je paralelan osi x, pa je njegov vektor smjera $\vec{s}$ kolinearan vektoru smjera osi x, tj. vektoru $\vec{i}$. Stoga možemo uzeti $\vec{s} = \vec{i}$. Osim toga, pravac p prolazi točkom $T(2,3,0)$, pa je prema (32) njegova jednadžba

$$p \ldots \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z}{0}.$$

Primjer 4.2.4. Naći jednadžbu pravca koji prolazi točkama $A(5,-4,7)$ i $B(8,1,4)$.

Rješenje. Prema (34), kanonski oblik jednadžbe pravca p koji prolazi točkama A i B je

$$\frac{x-5}{8-5} = \frac{y-(-4)}{1-(-4)} = \frac{z-7}{4-7},$$

tj.

$$p \ldots \quad \frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-7}{-3}.$$

Primjer 4.2.5. Naći parametar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da su pravci $\frac{x+4}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z+2}{5}$ i $\frac{x}{-6} = \frac{y+3}{\lambda} = \frac{z-2}{-10}$ paralelni.

Rješenje. Pravci $p_1 \ldots \frac{x+4}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z+2}{5}$ i $p_2 \ldots \frac{x}{-6} = \frac{y+3}{\lambda} = \frac{z-2}{-10}$ su paralelni ako i samo ako su njihovi vektori smjerova kolinearni. Vektor $\vec{s}_1 = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ je vektor smjera pravca p_1, a vektor $\vec{s}_2 = -6\vec{i} + \lambda\vec{j} - 10\vec{k}$ je vektor smjera pravca p_2. Vektori $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ su kolinearni ako i samo ako je $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0}$, tj.

$$\vec{0} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 5 \\ -6 & \lambda & -10 \end{vmatrix} = (40-5\lambda)\vec{i} + (3\lambda - 24)\vec{k}.$$

Gornja jednakost vektora bit će ispunjena ako i samo ako je

$$40 - 5\lambda = 0 \quad \text{i} \quad 3\lambda - 24 = 0,$$

tj. ako i samo ako je $\lambda = 8$.

Primjer 4.2.6. Naći kanonski oblik jednadžbe pravca
$$\begin{cases} 3x + y + 3z + 6 = 0 \\ 2x - y + 9z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Rješenje. Traženi pravac p zadan je kao presjek ravnina $\pi_1 \ldots 3x + y + 3z + 6 = 0$ i $\pi_2 \ldots 2x - y + 9z - 1 = 0$.

Budući da pravac p leži u ravnini π_1, njegov vektor smjera $\vec{s}$ mora biti okomit na vektor normale $\vec{N}_1 = 3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ ravnine π_1. Pravac p leži i u ravnini π_2, pa zaključujemo da $\vec{s}$ mora biti okomit i na vektor normale $\vec{N}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{k}$ ravnine π_2. Stoga za $\vec{s}$ uzmimo vektor

$$\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - 21\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Kanonski oblik jednadžbe pravca p određen je vektorom smjera $\vec{s}$ i jednom točkom pravca p. Prema tome, preostaje pronaći jednu (bilo koju) točku $T(x, y, z)$ čije koordinate zadovoljavaju sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{cases} 3x + y + 3z + 6 = 0 \\ 2x - y + 9z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Budući da vektor smjera $\vec{s}$ pravca p nije paralelan xy-ravnini (jer je koeficijent uz $\vec{k}$ različit od nule), to pravac p presijeca xy-ravninu, pa za z koordinatu točke T možemo uzeti $z = 0$. Tada se gornji sustav svodi na sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{cases} 3x + y + 6 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases},$$

koji ima jedinstveno rješenje $x = -1$, $y = -3$. Dakle, točka $T(-1, -3, 0)$ pripada pravcu p. Stoga je kanonski oblik jednadžbe pravca p

$$p \ldots \quad \frac{x+1}{12} = \frac{y+3}{-21} = \frac{z}{-5}.$$

Primjer 4.2.7. Naći kanonski oblik jednadžbe pravca $\begin{cases} x - 4 = 0 \\ y + 7 = 0 \end{cases}$.

Rješenje. Traženi pravac p je presjek ravnine $\pi_1 \ldots x - 4 = 0$ s vektorom normale $\vec{N}_1 = \vec{i}$ i ravnine $\pi_2 \ldots y + 7 = 0$ s vektorom normale $\vec{N}_2 = \vec{j}$. Stoga je $\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ vektor smjera pravca p. Točka $T(4, -7, 1)$ pripada pravcu p budući da njezine koordinate zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x - 4 = 0 \\ y + 7 = 0 \end{cases}.$$

Kanonski oblik jednadžbe pravca p glasi

$$p \ldots \quad \frac{x-4}{0} = \frac{y+7}{0} = \frac{z-1}{1}.$$

Primjer 4.2.8. Kroz točku $T(2,-3,-1)$ povući pravac paralelan pravcu $\begin{cases} 2x + 4y - z + 11 = 0 \\ x - 3y + 5z - 7 = 0 \end{cases}.$

Rješenje. Pravac $p_1 \ldots \begin{cases} 2x + 4y - z + 11 = 0 \\ x - 3y + 5z - 7 = 0 \end{cases}$ zadan je kao presjek ravnina

$$\pi_1 \ldots \quad 2x + 4y - z + 11 = 0 \quad \text{i} \quad \pi_2 \ldots \quad x - 3y + 5z - 7 = 0.$$

Kako je $p_1 \subset \pi_1$, to je vektor smjera $\vec{s}_1$ pravca p_1 okomit na vektor normale $\vec{N}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ ravnine π_1. Također, $p_1 \subset \pi_2$, pa je $\vec{s}_1$ okomit na vektor normale $\vec{N}_2 = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ ravnine π_2. Stoga možemo uzeti

$$\vec{s}_1 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 17\vec{i} - 11\vec{j} - 10\vec{k}.$$

Traženi pravac p prolazi točkom $T(2,-3-1)$, a budući da je paralelan pravcu p_1, za vektor smjera $\vec{s}$ pravca p možemo izabrati vektor $\vec{s} := \vec{s}_1 = 17\vec{i} - 11\vec{j} - 10\vec{k}$. Stoga je kanonski oblik jednadžbe pravca p

$$p \ldots \quad \frac{x-2}{17} = \frac{y+3}{-11} = \frac{z+1}{-10}.$$

Primjer 4.2.9. Naći udaljenost točke $T(5,-2,3)$ od pravca $\frac{x-7}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+9}{-2}$.

Rješenje. Prema (35), udaljenost točke T od pravca $p \ldots \frac{x-7}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+9}{-2}$ iznosi

$$d(T,p) = \frac{|\overrightarrow{T_1T} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|},$$

gdje je T_1 bilo koja točka pravca p. Uzmimo točku $T_1(7,5,-9)$ koja leži na pravcu p. Tada je $\overrightarrow{T_1T} = -2\vec{i} - 7\vec{j} + 12\vec{k}$. Vektor smjera pravca p je $\vec{s} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$, pa je

$$\overrightarrow{T_1T} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -7 & 12 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -34\vec{i} + 32\vec{j} + 13\vec{k}.$$

Dakle,

$$|\overrightarrow{T_1T} \times \vec{s}| = \sqrt{(-34)^2 + 32^2 + 13^2} = \sqrt{2349}, \; |\vec{s}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{29},$$

pa je

$$d(T,p) = \frac{|\overrightarrow{T_1T} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{2349}}{\sqrt{29}} = 9.$$

Primjer 4.2.10. Naći udaljenost točke $T(5,-1,2)$ od pravca $\begin{cases} x &= 3+t \\ y &= -2+3t, \\ z &= 1-5t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Udaljenost točke T od pravca $p \ldots \begin{cases} x &= 3+t \\ y &= -2+3t \\ z &= 1-5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, izračunat ćemo pomoću formule (35). Vektor smjera pravca p je $\vec{s} = \vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$. Parametru $t = 0$ odgovara točka $T_1(3,-2,1)$ pravca p. Prema (35) vrijedi

$$d(T,p) = \frac{|\overrightarrow{T_1T} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

Također, $\overrightarrow{T_1T} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, pa je

$$\overrightarrow{T_1T} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -8\vec{i} + 11\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Stoga je

$$|\overrightarrow{T_1T} \times \vec{s}| = \sqrt{(-8)^2 + 11^2 + 5^2} = \sqrt{210}, \ |\vec{s}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}.$$

Prema tome,

$$d(T,p) = \frac{|\overrightarrow{T_1T} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{210}}{\sqrt{35}} = \sqrt{6}.$$

Primjer 4.2.11. Naći udaljenost između pravaca $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-3}$ i $\frac{x-3}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-9}$.

Rješenje. Vektor smjera pravca $p_1 \ldots \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-3}$ je $\vec{s}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, a pravca $p_2 \ldots \frac{x-3}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-9}$ je vektor $\vec{s}_2 = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k}$. Uočimo $\vec{s}_2 = 3\vec{s}_1$. Dakle, pravci p_1 i p_2 su paralelni. Njihovu međusobnu udaljenost izračunat ćemo pomoću formule (36). Uzmimo $T_1(-1,1,6) \in p_1$ i $T_2(3,0,1) \in p_2$. Tada je

$$d(p_1,p_2) = \frac{|\overrightarrow{T_1T_2} \times \vec{s}_1|}{|\vec{s}_1|}.$$

Kako je $\overrightarrow{T_1T_2} = 4\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$, to je

$$\overrightarrow{T_1T_2} \times \vec{s}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k},$$

pa je $|\overrightarrow{T_1T_2} \times \vec{s}_1| = \sqrt{8^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{104}$. Duljina vektora $\vec{s}_1$ je $|\vec{s}_1| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$. Prema tome,

$$d(p_1, p_2) = \frac{|\overrightarrow{T_1T_2} \times \vec{s}_1|}{|\vec{s}_1|} = \frac{\sqrt{104}}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{91}}{7}.$$

Primjer 4.2.12. Naći udaljenost između pravaca $x - 6 = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+1}{-4}$ i $\frac{x-8}{-1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+2}{2}$.

Rješenje. Vektor smjera pravca $p_1 \ldots x - 6 = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+1}{-4}$ je vektor $\vec{s}_1 = \vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, a pravca $p_2 \ldots \frac{x-8}{-1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+2}{2}$ je vektor $\vec{s}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Kako vektori $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ nisu kolinearni (tj. ne postoji $t \in \mathbb{R}$ sa svojstvom $\vec{s}_1 = t\vec{s}_2$), to pravci p_1 i p_2 nisu paralelni. Stoga ćemo njihovu međusobnu udaljenost računati pomoću formule (38). Uzmimo točke $T_1(6, -4, -1) \in p_1$ i $T_2(8, -4, -2) \in p_2$. Tada je $\overrightarrow{T_1T_2} = 2\vec{i} - \vec{k}$. Stoga je

$$(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{T_1T_2} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5.$$

Primijetimo da su pravci p_1 i p_2 mimosmjerni, budući da je $(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{T_1T_2} \neq 0$. Nadalje,

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k},$$

pa je $|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$. Prema (38) imamo

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{T_1T_2}|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{|5|}{3} = \frac{5}{3}.$$

Primjer 4.2.13. Naći kut između pravaca $\frac{x-4}{3} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-1}{2}$ i $\frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+8}{-3}$.

Rješenje. Vektor smjera pravca $p_1 \ldots \frac{x-4}{3} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-1}{2}$ je $\vec{s}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, a vektor smjera pravca $p_2 \ldots \frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+8}{-3}$ je vektor $\vec{s}_2 = 4\vec{j} - 3\vec{k}$.

Prema (39), kut φ između pravaca p_1 i p_2 je

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-3)|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{14}{5\sqrt{17}} = \frac{14\sqrt{17}}{85},$$

pa je $\varphi \approx 47.23°$.

Primjer 4.2.14. Naći $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da se pravci $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{\lambda} = \frac{z-9}{-8}$ i $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-10}{9}$ sijeku, te zatim naći točku presjeka.

Rješenje. Vektor smjera pravca $p_1 \ldots \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{\lambda} = \frac{z-9}{-8}$ je vektor $\vec{s}_1 = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} - 8\vec{k}$, a pravca $p_2 \ldots \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-10}{9}$ je vektor $\vec{s}_2 = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 9\vec{k}$. Očito je da pravci p_1 i p_2 nisu paralelni, budući da njihovi vektori smjerova nisu kolinearni. Stoga je nužan i dovoljan uvjet da se pravci p_1 i p_2 sijeku komplanarnost vektora $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ i $\overrightarrow{T_1T_2}$, tj.

$$(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{T_1T_2} = 0,$$

gdje su $T_1 \in p_1$ i $T_2 \in p_2$ proizvoljno uzete točke. Uzmimo $T_1(2, 2, 9) \in p_1$ i $T_2(7, 1, 10) \in p_2$. Tada je $\overrightarrow{T_1T_2} = 5\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, pa je

$$(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{T_1T_2} = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -8 \\ 3 & -4 & 9 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 42\lambda - 126.$$

Dakle,

$$(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{T_1T_2} = 0 \Leftrightarrow 42\lambda - 126 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

Nađimo sada točku $P = p_1 \cap p_2$ presjeka pravaca p_1 i p_2. U tu svrhu kanonske oblike jednadžbi pravaca p_1 i p_2 pretvorit ćemo u parametarske:

$$p_1 \ldots \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 + 2t \\ y & = & 2 + 3t \\ z & = & 9 - 8t \end{array} \right., \qquad p_2 \ldots \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 7 + 3s \\ y & = & 1 - 4s \\ z & = & 10 + 9s \end{array} \right.,$$

gdje su $t, s \in \mathbb{R}$. Parametre t i s koji odgovaraju točki presjeka P dobit ćemo tako da riješimo sustav linearnih jednadžbi

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2 & + & 2t & = & 7 & + & 3s \\ 2 & + & 3t & = & 1 & - & 4s \\ 9 & - & 8t & = & 10 & + & 9s \end{array} \right. .$$

Ovaj sustav ima jedinstveno rješenje $t = 1$, $s = -1$. Stoga su koordinate točke P :

$$\begin{aligned} x &= 2 + 2 \cdot 1 = 4, \\ y &= 2 + 3 \cdot 1 = 5, \\ z &= 9 - 8 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Prema tome, pravci p_1 i p_2 sijeku se u točki $P(4, 5, 1)$.

Primjer 4.2.15. Naći jednadžbu pravca koji prolazi sjecištem pravaca $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{-2}$ i $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-3}$ i okomit je na svaki od njih.

Rješenje. Zapišimo jednadžbe pravaca

$$p_1 \ldots \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{-2} \quad \text{i} \quad p_2 \ldots \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-3}$$

u parametarskom obliku. Iz

$$p_1 \ldots \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{-2} = t, \quad p_2 \ldots \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-3} = s,$$

gdje su $t, s \in \mathbb{R}$, slijedi

$$p_1 \ldots \left\{ \begin{array}{lcl} x &=& 1 + 2t \\ y &=& -3 - t \\ z &=& -2 - 2t \end{array} \right. , \qquad p_2 \ldots \left\{ \begin{array}{lcl} x &=& -2 + s \\ y &=& 1 + 2s \\ z &=& -1 - 3s \end{array} \right. .$$

Da bismo našli točku $P = p_1 \cap p_2$ presjeka zadanih pravaca, riješimo sustav jednadžbi

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 1 &+& 2t &=& -2 &+& s \\ -3 &-& t &=& 1 &+& 2s \\ -2 &-& 2t &=& -1 &-& 3s \end{array} \right. .$$

Ovaj sustav linearnih jednadžbi ima jedinstveno rješenje $t = -2$, $s = -1$. Stoga su koordinate točke P :

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2 \cdot (-2) = -3, \\ y &= -3 - (-2) = -1, \\ z &= -2 - 2 \cdot (-2) = 2. \end{aligned}$$

Prema tome, traženi pravac p prolazi točkom $P(-3, -1, 2)$. Preostaje naći vektor smjera $\vec{s}$ pravca p. Označimo sa $\vec{s}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{s}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ vektore smjerova pravaca p_1 i p_2 redom. Kako je pravac p okomit na pravce p_1 i p_2, to je njegov vektor smjera $\vec{s}$ okomit na vektore $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$. Stoga za vektor smjera pravca p možemo uzeti

$$\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Traženi pravac ima jednadžbu

$$p \dots \quad \frac{x+3}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{5}.$$

Primjer 4.2.16. Kroz presjek pravaca $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{5}$ i $\frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+1}{3}$ postaviti ravninu paralelnu s ravninom $2x - 7y + z - 9 = 0$.

Rješenje. Nađimo najprije presjek pravaca

$$p_1 \dots \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{5} \quad \text{i} \quad p_2 \dots \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

U tu svrhu jednadžbe pravaca zapišimo u parametarskom obliku. Pravac p_1 prolazi točkom $T_1(-1, 3, -2)$ i ima vektor smjera $\vec{s}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, pa je parametarski oblik jednadžbe pravca p_1

$$p_1 \dots \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -1 + 2t \\ y & = & 3 - t \\ z & = & -2 + 5t \end{array} \right. , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pravac p_2 prolazi točkom $T_2(-3, -5, -1)$ i ima vektor smjera $\vec{s}_2 = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, pa parametarski oblik jednadžbe pravca p_2 glasi

$$p_2 \dots \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -3 + 2s \\ y & = & -5 + 2s \\ z & = & -1 + 3s \end{array} \right. , \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Sustav linearnih jednadžbi

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} -1 & + & 2t & = & -3 & + & 2s \\ 3 & - & t & = & -5 & + & 2s \\ -2 & + & 5t & = & -1 & + & 3s \end{array} \right.$$

ima jedinstveno rješenje $t = 2$, $s = 3$. Dakle, pravci se sijeku u točki P čije su koordinate $x = -1 + 2 \cdot 2 = 3$, $y = 3 - 2 = 1$, $z = -2 + 5 \cdot 2 = 8$. Prema tome, tražena ravnina π prolazi točkom $P(3, 1, 8)$.

Kako je ravnina π paralelna s ravninom $\pi_1 \dots 2x - 7y + z - 9 = 0$, to za vektor normale $\vec{N}$ ravnine π možemo uzeti vektor normale $\vec{N}_1 = 2\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$

ravnine π_1. Prema (21), jednadžba ravnine π koja prolazi točkom $P(3,1,8)$ i ima vektor normale $\vec{N} = 2\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$ glasi

$$\pi \ldots \quad 2(x-3) - 7(y-1) + (z-8) = 0,$$

odnosno

$$\pi \ldots \quad 2x - 7y + z - 7 = 0.$$

Primjer 4.2.17. Naći jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T(0,3,-2)$ i okomita je na pravac $\frac{x-9}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+4}{5}$.

Rješenje. Tražena ravnina π bit će okomita na pravac $p \ldots \frac{x-9}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+4}{5}$ ako i samo ako je njezin vektor normale $\vec{N}$ kolinearan s vektorom smjera $\vec{s} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ pravca p. Zato možemo uzeti $\vec{N} = \vec{s}$. Prema (21), jednadžba ravnine π koja sadrži točku $T(0,3,-2)$ i ima vektor normale $\vec{N} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ je

$$\pi \ldots \quad 3(x-0) - 2(y-3) + 5(z+2) = 0,$$

tj.

$$\pi \ldots \quad 3x - 2y + 5z + 16 = 0.$$

Primjer 4.2.18. Naći parametar $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da pravac $\frac{x+10}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+7}{\lambda}$ bude paralelan s ravninom $x + 5y - 2z + 16 = 0$.

Rješenje. Pravac $p \ldots \frac{x+10}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+7}{\lambda}$ bit će paralelan s ravninom $\pi \ldots x + 5y - 2z + 16 = 0$ ako i samo ako je njegov vektor smjera $\vec{s} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \lambda\vec{k}$ okomit na vektor normale $\vec{N} = \vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$ ravnine π, tj. ako i samo ako je $\vec{s} \cdot \vec{N} = 0$. Kako je

$$\vec{s} \cdot \vec{N} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 5 - 2\lambda = -11 - 2\lambda,$$

to je $\vec{s} \cdot \vec{N} = 0$ ako i samo ako je $\lambda = -\frac{11}{2}$.

Primjer 4.2.19. Naći jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T(0,0,4)$, a paralelan je s ravninama $2x + z + 3 = 0$ i $x - y - z + 5 = 0$.

Rješenje. Kako je traženi pravac p paralelan s ravninama $\pi_1 \ldots 2x + z + 3 = 0$ i $\pi_2 \ldots x - y - z + 5 = 0$, to je njegov vektor smjera $\vec{s}$ okomit na vektor normale $\vec{N}_1 = 2\vec{i} + \vec{k}$ ravnine π_1 i na vektor normale $\vec{N}_2 = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ ravnine π_2. Zato je

$$\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Prema (32), pravac p ima jednadžbu

$$p\ldots \quad x=\frac{y}{3}=\frac{z-4}{-2}.$$

Primjer 4.2.20. Naći kut između pravca $\frac{x}{2}=\frac{y-9}{-1}=\frac{z+3}{2}$ i ravnine $3x-6y+2z+11=0$.

Rješenje. Vektor smjera pravca $p\ldots\ \frac{x}{2}=\frac{y-9}{-1}=\frac{z+3}{2}$ je $\vec{s}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, a vektor normale ravnine $\pi\ldots\ 3x-6y+2z+11=0$ je $\vec{N}=3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$. Prema (40), kut ψ između pravca p i ravnine π je

$$\sin\psi=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{N}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{N}|}=\frac{|2\cdot 3-1\cdot(-6)+2\cdot 2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+(-6)^2+2^2}}=\frac{16}{21},$$

pa je $\psi\approx 49.63^\circ$.

Primjer 4.2.21. Naći presjek pravca $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=z+2$ i ravnine $3x-4y+2z+7=0$.

Rješenje. Zapišimo jednadžbu pravca $p\ldots\ \frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=z+2$ u parametarskom obliku. Pravac p prolazi točkom $T(-3,1,-2)$ i ima vektor smjera $\vec{s}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, pa je parametarski oblik jednadžbe pravca p

$$p\ldots\begin{cases} x &= -3+2t\\ y &= 1-3t\\ z &= -2+t\end{cases},\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Presjek pravca p i ravnine $\pi\ldots\ 3x-4y+2z+7=0$ odredit ćemo tako da x,y,z izražene pomoću parametra t uvrstimo u jednadžbu ravnine π. Dakle,

$$3(-3+2t)-4(1-3t)+2(-2+t)+7=0.$$

Rješenje ove jednadžbe je $t=\frac{1}{2}$. Odavde dobivamo

$$\begin{aligned} x &= -3+2\cdot\tfrac{1}{2}=-2,\\ y &= 1-3\cdot\tfrac{1}{2}=-\tfrac{1}{2},\\ z &= -2+\tfrac{1}{2}=-\tfrac{3}{2}.\end{aligned}$$

Prema tome, pravac p i ravnina π sijeku se u točki $P(-2,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$.

Primjer 4.2.22. Kroz presjek pravca $\frac{x+4}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{5}$ i ravnine $2x-4y+z-6=0$ postavite ravninu paralelnu s ravninom $x+7y-2z+1=0$.

Rješenje. Da bismo našli presjek pravca $p \ldots \frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{5}$ i ravnine $\pi_1 \ldots 2x - 4y + z - 6 = 0$ najprije zapišimo jednadžbu pravca p u parametarskom obliku. Pravac p prolazi točkom $T(-4, 1, -1)$ i ima vektor smjera $\vec{s} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$, pa je parametarski oblik jednadžbe pravca p

$$p \ldots \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -4 + 3t \\ y & = & 1 - 2t \\ z & = & -1 + 5t \end{array} \right. , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Da bismo našli parametar t, koji odgovara točki presjeka $P = p \cap \pi_1$ pravca p i ravnine π_1, uvrstimo x, y, z izražene pomoću t u jednadžbu ravnine π_1. Dakle, riješimo jednadžbu

$$2(-4 + 3t) - 4(1 - 2t) + (-1 + 5t) - 6 = 0.$$

Rješenje ove jednadžbe je $t = 1$, pa koordinate točke P glase redom $x = -4 + 3 \cdot 1 = -1$, $y = 1 - 2 \cdot 1 = -1$, $z = -1 + 5 \cdot 1 = 4$. Stoga tražena ravnina π prolazi točkom $P(-1, -1, 4)$, a budući da je paralelna ravnini $\pi_2 \ldots x + 7y - 2z + 1 = 0$ za vektor normale $\vec{N}$ ravnine π možemo uzeti vektor normale ravnine π_2, tj. $\vec{N} = \vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}$. Prema (21), jednadžba ravnine π glasi

$$\pi \ldots \quad (x + 1) + 7(y + 1) - 2(z - 4) = 0,$$

odnosno

$$\pi \ldots \quad x + 7y - 2z + 16 = 0.$$

Primjer 4.2.23. Kroz presjek pravca $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+6}{4}$ i ravnine $2x + 3y - z - 13 = 0$ postavite pravac paralelan s pravcem $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-3}{-2}$.

Rješenje. Pravac $p_1 \ldots \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+6}{4}$ prolazi točkom $T_1(-2, 1, -6)$ i ima vektor smjera $\vec{s}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, pa je parametarski oblik jednadžbe pravca p_1

$$p_1 \ldots \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2 + 3t \\ y & = & 1 - 2t \\ z & = & -6 + 4t \end{array} \right. , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Uvrstimo x, y, z izražene pomoću parametra t u jednadžbu ravnine $\pi \ldots 2x + 3y - z - 13 = 0$:

$$2(-2 + 3t) + 3(1 - 2t) - (-6 + 4t) - 13 = 0.$$

Rješenje ove jednadžbe je $t = -2$, pa su koordinate točke $P = p_1 \cap \pi$ presjeka pravca p_1 i ravnine π redom $x = -2 + 3 \cdot (-2) = -8$, $y = 1 - 2 \cdot (-2) = 5$, $z = -6 + 4 \cdot (-2) = -14$. Traženi pravac p prolazi točkom $P(-8, 5, -14)$.

Kako je pravac p paralelan s pravcem $p_2 \ldots \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-3}{-2}$, to za vektor smjera $\vec{s}$ pravca p možemo uzeti vektor smjera pravca p_2; dakle $\vec{s} = 4\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}$. Prema (32), jednadžba pravca p glasi

$$p \ldots \quad \frac{x+8}{4} = \frac{z-5}{7} = \frac{z+14}{-2}.$$

Primjer 4.2.24. Naći jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T(2,6,-1)$ i sadrži pravac $\frac{x}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

Rješenje. Ravnina je jednoznačno određena s tri točke koje ne leže sve na istom pravcu. Kako točka $T(2,6-1)$ ne pripada pravcu $p \ldots \frac{x}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1}$, to je tražena ravnina π jednoznačno određena točkom T i dvjema (proizvoljnim) točkama pravca p. Da bismo našli dvije točke pravca p, kanonski oblik jednadžbe pravca p pretvorit ćemo u parametarski. Dakle,

$$p \ldots \begin{cases} x &= 4t \\ y &= 3+2t \\ z &= -1-t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Za npr. $t=0$ dobivamo točku $A(0,3,-1)$ pravca p, dok za $t=1$ dobivamo točku $B(4,5,-2)$ pravca p. Prema (27), jednadžba ravnine π koja prolazi točkama $T(2,6,-1)$, $A(0,3,-1)$ i $B(4,5,-2)$ glasi

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x-2 & y-6 & z+1 \\ 0-2 & 3-6 & -1-(-1) \\ 4-2 & 5-6 & -2-(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-6 & z+1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3(x-2) - 2(y-6) + 8(z+1), \end{aligned}$$

tj.

$$\pi \ldots \quad 3x - 2y + 8z + 14 = 0.$$

Primjer 4.2.25. Naći jednadžbu ravnine koja sadrži pravac $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ i okomita je na ravninu $2x + 5y - z + 3 = 0$.

Rješenje. Kako tražena ravnina π sadrži pravac $p \ldots \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$, to je njezin vektor normale $\vec{N}$ okomit na vektor smjera $\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ pravca p. Nadalje, ravnina π je okomita na ravninu $\pi_1 \ldots 2x+5y-z+3=0$, pa je vektor $\vec{N}$ okomit na vektor normale $\vec{N}_1 = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ ravnine π_1. Stoga je

$$\vec{N} = \vec{s} \times \vec{N}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -8\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Da bismo našli jednadžbu ravnine π još nam treba jedna njezina točka. No, ravnina π sadrži pravac p pa stoga možemo uzeti bilo koju točku pravca p, recimo $T(-1,2,1)$. Prema (21), jednadžba ravnine π glasi

$$\pi \ldots \quad -8(x+1)+4(y-2)+4(z-1)=0,$$

tj.

$$\pi \ldots \quad 2x-y-z+5=0.$$

Primjer 4.2.26. Naći jednadžbu ravnine koja sadrži pravac $\frac{x+4}{3}=y-1=z+7$ i paralelna je s pravcem $\frac{x-2}{2}=y+1=\frac{z-3}{0}$.

Rješenje. Kako tražena ravnina π sadrži pravac $p_1 \ldots \frac{x+4}{3}=y-1=z+7$, to je njen vektor normale $\vec{N}$ okomit na vektor smjera $\vec{s}_1=3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ pravca p_1. Nadalje, ravnina π je paralelna s pravcem $p_2 \ldots \frac{x-2}{2}=y+1=\frac{z-3}{0}$, pa je $\vec{N}$ okomit i na vektor smjera $\vec{s}_2=2\vec{i}+\vec{j}$ pravca p_2. Stoga je

$$\vec{N}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}.$$

Točka $T(-4,1,-7)$ pripada pravcu p_1, pa stoga $T\in\pi$. Prema (21), jednadžba ravnine π određene točkom $T(-4,1,-7)$ i vektorom normale $\vec{N}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ glasi

$$\pi \ldots \quad -1(x+4)+2(y-1)+(z+7)=0,$$

tj.

$$\pi \ldots \quad x-2y-z-1=0.$$

Primjer 4.2.27. Naći ortogonalnu projekciju točke $T(1,2,-3)$ na ravninu $x-2y+5z+3=0$, te zatim izračunati udaljenost točke T od te ravnine.

Rješenje. Traženu točku P dobit ćemo kao presjek ravnine $\pi \ldots x-2y+5z+3=0$ i pravca p koji prolazi točkom T, a okomit je na ravninu π (slika 93).

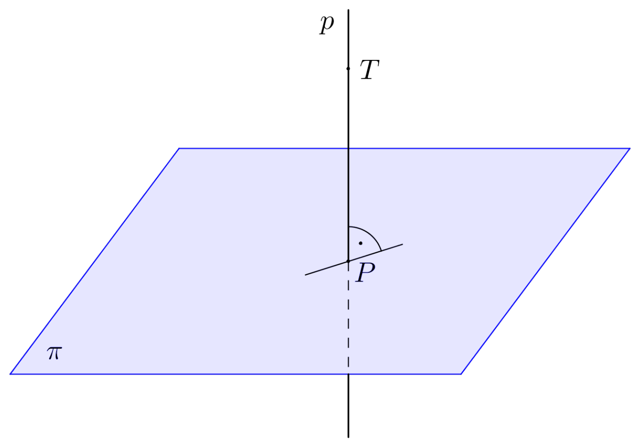
Kako je pravac p okomit na ravninu π, to za vektor smjera $\vec{s}$ pravca p možemo uzeti vektor normale ravnine π; dakle $\vec{s}=\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$. Stoga parametarski oblik jednadžbe pravca p glasi

$$p \ldots \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 2-2t \\ z & = & -3+5t \end{array} \right. , \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Parametar t koji odgovara točki $P=p\cap\pi$ dobit ćemo kao rješenje jednadžbe

$$(1+t)-2(2-2t)+5(-3+5t)+3=0.$$

Dakle, $t = \frac{1}{2}$, pa su koordinate točke P redom $x = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $y = 2-2\cdot\frac{1}{2} = 1$, $z = -3+5\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Prema tome, ortogonalna projekcija točke T na ravninu π je točka $P(\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2})$.



Slika 93: Ortogonalna projekcija točke T na ravninu π

Preostaje naći udaljenost točke T od ravnine π. Udaljenost točke T od ravnine π jednaka je udaljenosti točke T od njezine ortogonalne projekcije P na ravninu π, što iznosi

$$d(T,\pi) = d(T,P) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2 + (1-2)^2 + \left(-\frac{1}{2}+3\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

Primjer 4.2.28. Naći točku simetričnu točki $T(1,2,-3)$ s obzirom na ravninu $x - 2y + 5z + 3 = 0$.

Rješenje. Neka je $S(x_S, y_S, z_S)$ tražena točka. U primjeru 4.2.27 smo pokazali da je ortogonalna projekcija točke $T(1,2,-3)$ na ravninu $x-2y+5z+3 = 0$ točka $P(\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2})$. Točka P je polovište dužine čiji su rubovi točke T i S. Stoga koordinate točaka T, P i S zadovoljavaju

$$x_P = \frac{x_T + x_S}{2}, \quad y_P = \frac{y_T + y_S}{2}, \quad z_P = \frac{z_T + z_S}{2}.$$

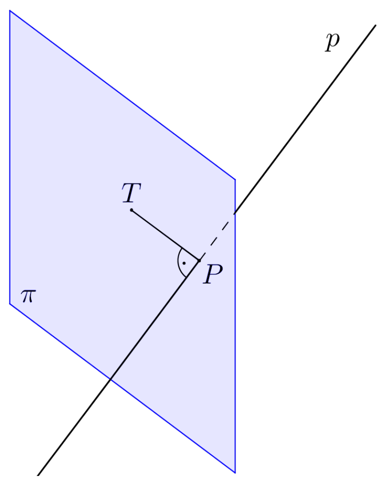
Odavde slijedi

$$\begin{aligned} x_S &= 2x_P - x_T = 2\cdot\tfrac{3}{2} - 1 = 2, \\ y_S &= 2y_P - y_T = 2\cdot 1 - 2 = 0, \\ z_S &= 2z_P - z_T = 2\cdot\tfrac{-1}{2} + 3 = 2. \end{aligned}$$

Prema tome, $S(2,0,2)$ je točka simetrična točki $T(1,2,-3)$ s obzirom na ravninu $x-2y+5z+3=0$.

Primjer 4.2.29. Naći ortogonalnu projekciju točke $T(5,-2,3)$ na pravac $\frac{x-7}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z+9}{-2}$, te zatim izračunati udaljenost točke T od toga pravca.

Rješenje. Traženu točku P dobit ćemo kao presjek pravca $p\ldots\ \frac{x-7}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z+9}{-2}$ i ravnine π koja sadrži točku T, a okomita je na pravac p (slika 94).



Slika 94: Ortogonalna projekcija točke T na pravac p

Kako je ravnina π okomita na pravac p, to za njezin vektor normale $\vec{N}$ možemo uzeti vektor smjera pravca p; dakle $\vec{N}=3\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$. Osim toga, ravnina π sadrži točku T, pa je prema (21) njena jednadžba

$$\pi\ldots\quad 3(x-5)+4(y+2)-2(z-3)=0,$$

tj.

$$\pi\ldots\quad 3x+4y-2z-1=0.$$

Da bismo našli koordinate točke $P=p\cap\pi$, kanonski oblik jednadžbe pravca p pretvorit ćemo u parametarski. Pravac p prolazi točkom $S(7,5,-9)$ i ima vektor smjera $\vec{s}=3\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$, pa je parametarski oblik jednadžbe pravca p

$$p\ldots\left\{\begin{array}{lcl} x&=&7+3t\\ y&=&5+4t\\ z&=&-9-2t\end{array}\right.,\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Parametar t koji odgovara koordinatama točke P je rješenje jednadžbe

$$3(7+3t)+4(5+4t)-2(-9-2t)-1=0$$

i iznosi $t=-2$. Stoga koordinate točke P glase $x=7+3\cdot(-2)=1$, $y=5+4\cdot(-2)=-3$, $z=-9-2\cdot(-2)=-5$. Dakle, ortogonalna projekcija točke T na pravac p je točka $P(1,-3,-5)$.

U primjeru 4.2.9, udaljenost točke T od pravca p izračunali smo pomoću formule (35). Osim na navedeni način, udaljenost točke T od pravca p može se izračunati i kao udaljenost točke T od njezine ortogonalne projekcije P na pravac p. Dakle, vrijedi

$$d(T,p)=d(T,P)=\sqrt{(1-5)^2+(-3+2)^2+(-5-3)^2}=9.$$

Primjer 4.2.30. Naći ortogonalnu projekciju pravca $\frac{x}{6}=\frac{y+1}{2}=z-1$ na ravninu $3x-2y+5z+8=0$.

Rješenje. Vektor smjera pravca $p_1 \ldots \frac{x}{6}=\frac{y+1}{2}=z-1$ je $\vec{s}_1=6\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, a vektor normale ravnine $\pi_1 \ldots 3x-2y+5z+8=0$ je $\vec{N}_1=3\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$. Kako vektori $\vec{s}_1$ i $\vec{N}_1$ nisu kolinearni, pravac p_1 nije okomit na ravninu π_1. Stoga je ortogonalna projekcija pravca p_1 na ravninu π_1 pravac. Taj pravac ćemo dobiti kao presjek ravnine π_1 i ravnine π_2 koja sadrži pravac p_1, a okomita je na ravninu π_1.

Nađimo jednadžbu ravnine π_2. Kako ravnina π_2 sadrži pravac p_1, to je njen vektor normale $\vec{N}_2$ okomit na vektor smjera $\vec{s}_1$ pravca p_1. Nadalje, ravnina π_2 je okomita na ravninu π_1, što znači da je vektor $\vec{N}_2$ okomit na vektor $\vec{N}_1$. Stoga je

$$\vec{N}_2=\vec{s}_1\times\vec{N}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 5\end{vmatrix}=12\vec{i}-27\vec{j}-18\vec{k}.$$

Nadalje, $T(0,-1,1)\in p_1\subset\pi_2$, pa je prema (21) jednadžba ravnine π_2

$$\pi_2 \ldots \quad 12x-27(y+1)-18(z-1)=0,$$

tj.

$$\pi_2 \ldots \quad 4x-9y-6z-3=0.$$

Prema tome, ortogonalna projekcija pravca p_1 na ravninu π_1 je pravac $p=\pi_1\cap\pi_2$, tj.

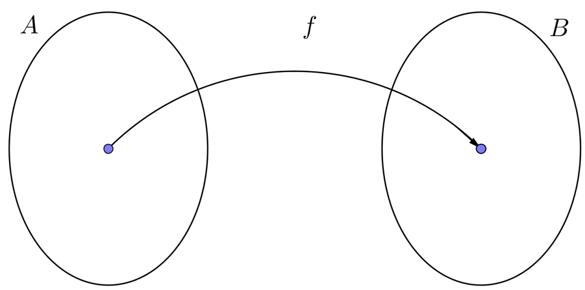
$$p \ldots \quad \begin{cases} 3x-2y+5z+8=0\\ 4x-9y-6z-3=0\end{cases}.$$

5 Funkcije više varijabli

5.1 Pojam funkcije više varijabli

Neka su A i B neprazni skupovi.

Funkcija $f : A \to B$ je pravilo po kojem svakom elementu skupa A pridružujemo točno jedan element skupa B.



Slika 95: Funkcija $f : A \to B$

Skup A zove se *domena*, a skup B *kodomena* funkcije f.

Skup $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ zove se *slika* funkcije f.

Za domenu funkcije f koristi se oznaka $\mathcal{D}(f)$, a za sliku od f oznaka $\mathrm{Im}(f)$.

U Matematici 1 smo detaljno obradili *realne funkcije realne varijable*, tj. takve funkcije f čija domena i slika su podskupovi skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Sada ćemo se baviti *realnim funkcijama više realnih varijabli*, tj. funkcijama $f : A \to \mathbb{R}$ čija domena A je podskup Kartezijevog produkta

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

svih uređenih n-torki realnih brojeva, a slika $f(A)$ podskup skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Dakle, radi se o funkcijama

$$f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto z,$$

koje uređenoj n-torci $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ realnih brojeva pridružuju realan broj z. Pišemo

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Kažemo da su $x_1, x_2, \dots, x_n$ *nezavisne varijable*, tj. *argumenti*, dok je z *zavisna varijabla*, tj. *vrijednost funkcije* f *u točki* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Kod zadavanja realnih funkcija više realnih varijabli analitički, tj. formulom, često pišemo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, smatrajući pritom da domena funkcije f ne mora biti cijeli skup $\mathbb{R}^n$, nego skup svih $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ za koje se danom formulom nakon naznačenih operacija dobiva realan broj. Takvu domenu nazivamo *prirodnom domenom* funkcije f.

Ako je $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$, govorimo o *realnim funkcijama dviju realnih varijabli*, tj. funkcijama f koje uređenom paru (x, y) realnih brojeva pridružuju realan broj z. Dakle,

$$f : (x, y) \mapsto z.$$

Uređene parove Kartezijevog produkta $\mathbb{R}^2$ možemo poistovijetiti s točkama xy-ravnine, odnosno smatrati da je prirodna domena takve funkcije f zapravo podskup xy-ravnine.

Mi ćemo se uglavnom baviti funkcijama dviju varijabli, te ponešto funkcijama triju varijabli.

Primjer 5.1.1. 1.) Ako s a i b označimo duljine stranica pravokutnika, onda je njegova površina P funkcija dviju varijabli a i b zadana s

$$P = f(a, b) = ab.$$

2.) Ako je r polumjer valjka, a v njegova visina, onda je volumen valjka V funkcija dviju varijabli zadana formulom

$$V = f(r, v) = r^2 \pi v.$$

3.) Ako s ρ označimo gustoću tijela, a s V volumen tijela, onda je njegova masa m funkcija dviju varijabli zadana s

$$m = f(\rho, V) = \rho V.$$

4.) Ako su a, b, c duljine bridova kvadra, onda je volumen kvadra V funkcija triju varijabli a, b i c zadana s

$$V = f(a, b, c) = abc.$$

5.) Ako je T temperatura plina, V volumen plina, n broj molova plina, te ako s R označimo plinsku konstantu, onda je tlak plina P funkcija triju varijabli

$$P = f(T, V, n) = \frac{nRT}{V}.$$

Primjer 5.1.2. Naći prirodnu domenu i sliku funkcije $f(x,y) = xy$.

Rješenje. Jasno je da je ova funkcija dobro definirana za sve vrijednosti realnih brojeva x i y, pa je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Također, svaki realni broj z može se prikazati u obliku

$$z = z \cdot 1 = f(z,1),$$

odakle zaključujemo da je $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Primjer 5.1.3. Naći prirodnu domenu i sliku funkcije $f(x,y) = \sin(xy)$.

Rješenje. Kako je domena funkcije $(x,y) \mapsto xy$ skup $\mathbb{R}^2$, a domena funkcije sinus cijeli skup $\mathbb{R}$, to je funkcija f dobro definirana za sve uređene parove $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tj. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Nadalje,

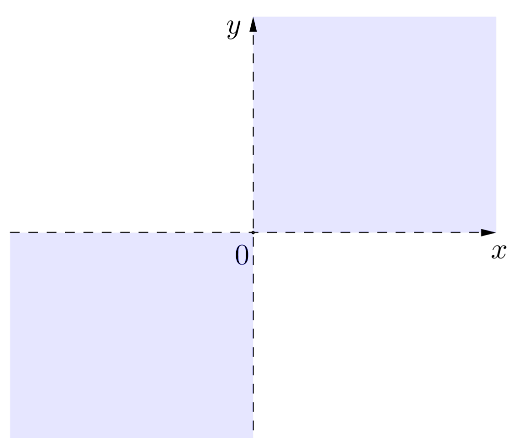
$$[-1,1] = \Big\{ \sin x : x \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\{ f(x,1) : x \in \mathbb{R} \Big\} \subseteq \mathrm{Im}(f) \subseteq [-1,1],$$

pa je $\mathrm{Im}(f) = [-1,1]$.

Primjer 5.1.4. Naći prirodnu domenu i sliku funkcije $f(x,y) = \ln(xy)$.

Rješenje. Domena logaritamske funkcije je interval $\langle 0, \infty \rangle$, odakle zaključujemo da je funkcija f dobro definirana za sve uređene parove (x,y) realnih brojeva takve da je $xy > 0$. No,

$$xy > 0 \Leftrightarrow \Big((x > 0 \text{ i } y > 0) \quad \text{ili} \quad (x < 0 \text{ i } y < 0) \Big).$$



Slika 96: Prirodna domena funkcije $f(x,y) = \ln(xy)$

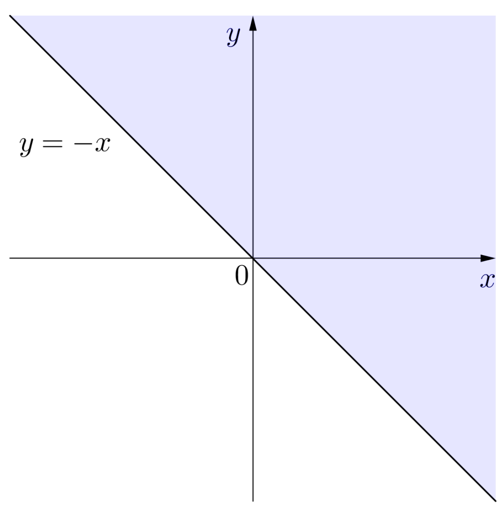
Dakle,
$$\mathcal{D}(f) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0 \text{ ili } x, y < 0\big\}.$$
Prema tome, prirodnu domenu funkcije f čine sve točke prvog i trećeg kvadranta xy-ravnine, bez koordinatnih osi. Nadalje,
$$\mathbb{R} = \big\{\ln x : x > 0\big\} = \big\{f(x, 1) : x > 0\big\} \subseteq \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R},$$
pa je $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Primjer 5.1.5. Naći prirodnu domenu i sliku funkcije $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$.

Rješenje. Funkcija f je dobro definirana za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje je $x+y \neq 0$. Dakle,
$$\mathcal{D}(f) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\big\}.$$
Prema tome, $\mathcal{D}(f)$ čine sve točke xy-ravnine osim simetrale drugog i četvrtog kvadranta. Nadalje,
$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \left\{\frac{1}{x} : x \neq 0\right\} = \big\{f(x, 0) : x \neq 0\big\} \subseteq \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\},$$
odakle slijedi $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Primjer 5.1.6. Naći prirodnu domenu i sliku funkcije $f(x, y) = \sqrt{x+y}$.

Rješenje. Funkcija f je dobro definirana za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje je $x+y \geq 0$. Prema tome,
$$\mathcal{D}(f) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x\big\}.$$



Slika 97: Prirodna domena funkcije $f(x, y) = \sqrt{x+y}$

Grafički gledano, prirodna domena funkcije f je poluravnina u xy-ravnini, čija je granica pravac $y = -x$ (v. sliku 97). Nadalje,

$$[0, \infty\rangle = \left\{\sqrt{x} : x \geq 0\right\} = \left\{f(x, 0) : x \geq 0\right\} \subseteq \mathrm{Im}(f) \subseteq [0, \infty\rangle,$$

pa je $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty\rangle$.

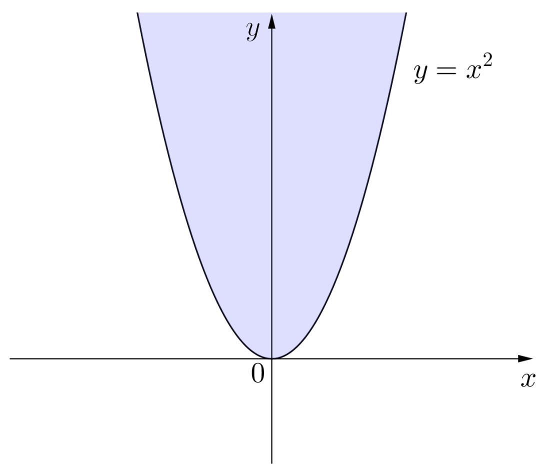
Primjer 5.1.7. Naći prirodnu domenu i sliku funkcije $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$.
Rješenje. Prirodnu domenu ove funkcije čine svi parovi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takvi da je $y - x^2 \geq 0$. Dakle,

$$\mathcal{D}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\right\}.$$

Grafički prikaz skupa $\mathcal{D}(f)$ dan je na slici 98. Također,

$$[0, \infty\rangle = \left\{\sqrt{y} : y \geq 0\right\} = \left\{f(0, y) : y \geq 0\right\} \subseteq \mathrm{Im}(f) \subseteq [0, \infty\rangle,$$

pa je $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty\rangle$.



Slika 98: Prirodna domena funkcije $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$

Primjer 5.1.8. Naći prirodnu domenu i sliku funkcije $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
Rješenje. Funkcija f je dobro definirana za sve parove $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takve da je $4 - x^2 - y^2 \geq 0$. Prema tome,

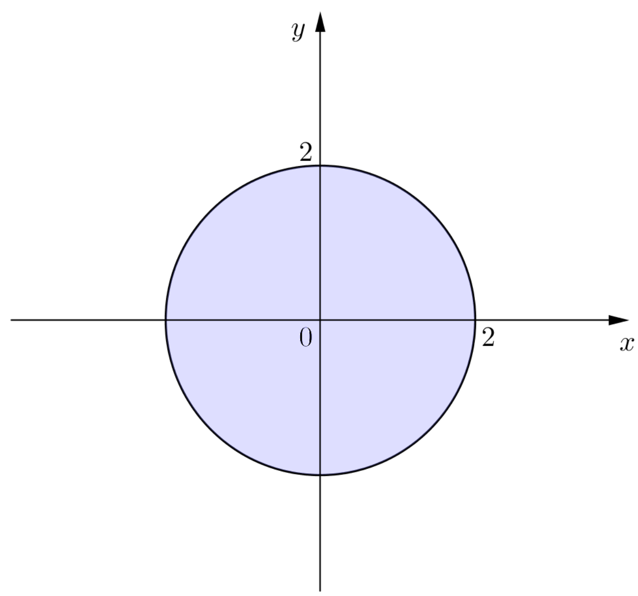
$$\mathcal{D}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Grafički gledano, radi se o krugu polumjera $r = 2$ sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava (slika 99).

Za $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ vrijedi $0 \leq 4 - x^2 - y^2 \leq 4$, pa je $0 \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq 2$. Dakle, $f(x, y) \in [0, 2]$. Također,

$$[0,2] = \left\{\sqrt{4 - x^2} : x \in [-2, 2]\right\} = \left\{f(x, 0) : x^2 \leq 4\right\} \subseteq \mathrm{Im}(f).$$

Stoga je $\mathrm{Im}(f) = [0, 2]$.



Slika 99: Prirodna domena funkcije $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

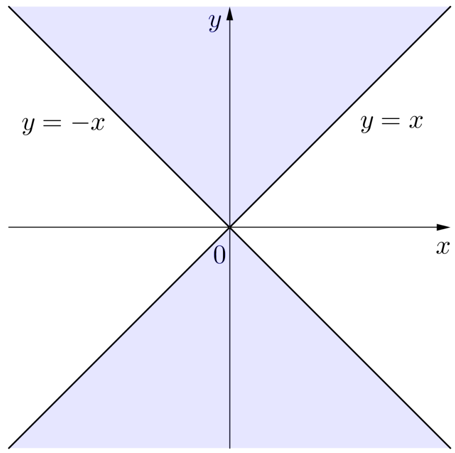
Primjer 5.1.9. Naći prirodnu domenu i sliku funkcije $f(x, y) = \arccos \frac{x}{y}$.
Rješenje. Da bi funkcija f bila dobro definirana, nužno je i dovoljno da je $\left|\frac{x}{y}\right| \leq 1$, tj. $|x| \leq |y|$ i $y \neq 0$. Dakle,

$$\mathcal{D}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |y| \text{ i } y \neq 0\right\}.$$

Na slici 100 prikazan je skup $\mathcal{D}(f)$. Nadalje,

$$[0, \pi] = \left\{\arccos x : x \in [-1, 1]\right\} = \left\{f(x, 1) : |x| \leq 1\right\} \subseteq \mathrm{Im}(f) \subseteq [0, \pi],$$

pa je $\mathrm{Im}(f) = [0, \pi]$.



Slika 100: Prirodna domena funkcije $f(x, y) = \arccos \frac{x}{y}$

Primjer 5.1.10. Naći prirodnu domenu i sliku funkcije $f(x, y, z) = e^{x-2y^2+3z}$.
Rješenje. Ova funkcija triju varijabli je dobro definirana za sve vrijednosti $x, y, z \in \mathbb{R}$ pa je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^3$. Kako je slika eksponencijalne funkcije $x \mapsto e^x$ interval $\langle 0, \infty\rangle$, to je $\mathrm{Im}(f) \subseteq \langle 0, \infty\rangle$. Osim toga,

$$\langle 0, \infty\rangle = \big\{e^x : x \in \mathbb{R}\big\} = \big\{f(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\big\} \subseteq \mathrm{Im}(f).$$

Odavde zaključujemo da je $\mathrm{Im}(f) = \langle 0, \infty\rangle$.

Primjer 5.1.11. Naći prirodnu domenu i sliku funkcije $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.
Rješenje. Ova funkcija je dobro definirana ako i samo ako je $x^2+y^2+z^2 \neq 0$. Budući da je $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ samo u točki $(0, 0, 0)$, to je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Nadalje,

$$\langle 0, \infty\rangle = \left\{\frac{1}{x^2} : x \neq 0\right\} = \big\{f(x, 0, 0) : x \neq 0\big\} \subseteq \mathrm{Im}(f) \subseteq \langle 0, \infty\rangle,$$

pa je $\mathrm{Im}(f) = \langle 0, \infty\rangle$.

Ako je f realna funkcija jedne realne varijable, tada je njezin graf

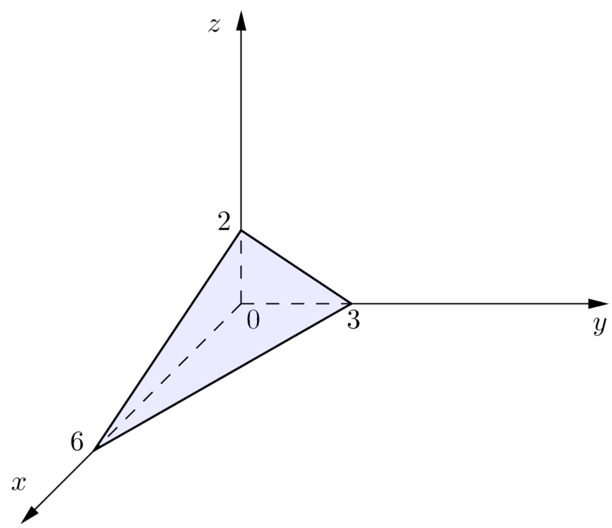
$$G(f) = \big\{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}(f)\big\}$$

krivulja u xy-ravnini. Osim u eksplicitnom obliku $y = f(x)$, krivulja u ravnini može se zadati i implicitno, tj. jednadžbom $F(x, y) = 0$.

Graf realne funkcije f dviju realnih varijabli, tj. skup točaka

$$G(f) = \big\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{D}(f)\big\} \subset \mathbb{R}^3,$$

predstavlja *plohu* u xyz-pravokutnom koordinatnom sustavu. Prema tome, $z = f(x, y)$ je *jednadžba plohe*. Osim u eksplicitnom obliku $z = f(x, y)$, jednadžba plohe može se zadati i *implicitno*, tj. jednadžbom $F(x, y, z) = 0$.

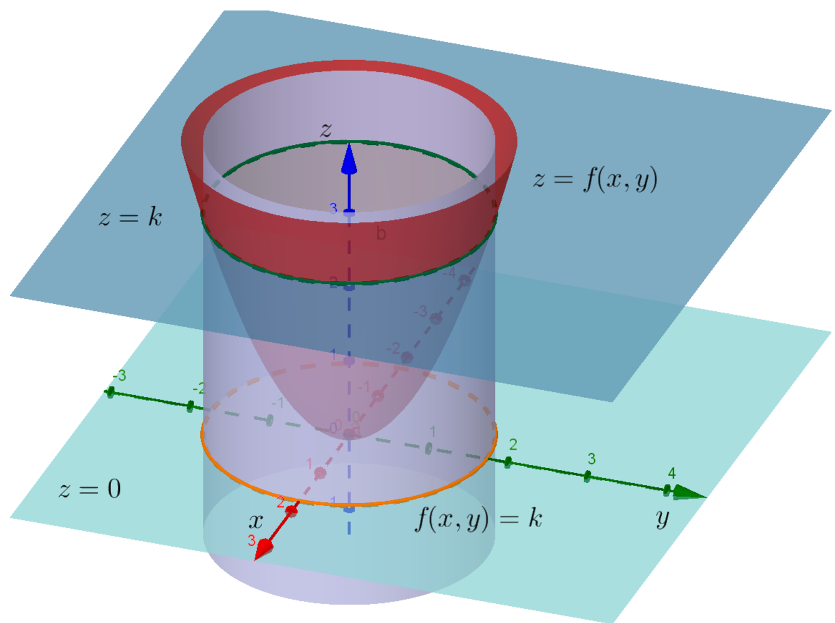


Slika 101: Ravnina $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$

Tako je, primjerice, $x + 2y + 3z - 6 = 0$ implicitno zadana jednadžba plohe u $\mathbb{R}^3$. Ovdje se zapravo radi o ravnini čiji segmentni oblik jednadžbe glasi $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$. Odsječci na x, y i z osi su redom 6, 3 i 2. Graf ove ravnine skiciran je na slici 101.

Međutim, općenito je graf funkcije dviju varijabli, tj. plohu, teško predočiti i nacrtati. Da bismo si predočili plohu zadanu jednadžbom $z = f(x, y)$ postupamo ovako. Uzmimo proizvoljnu točku $k \in \operatorname{Im}(f)$. Tada je $f(x, y) = k$ jednadžba krivulje u xy-ravnini. Ta je krivulja dobivena tako da je ploha $z = f(x, y)$ presječena ravninom $z = k$ (paralelnom s xy-ravninom), te je zatim ta presječnica ortogonalno projicirana na xy-ravninu. Ovu krivulju nazivamo *nivo-krivuljom* funkcije f.

Nivo-krivulja $f(x, y) = k$ leži u domeni funkcije f i na toj krivulji funkcija f poprima konstantnu vrijednost k. Crtanje nivo-krivulja dane funkcije olakšava nam predočavanje oblika plohe.



Slika 102: Nivo-krivulja funkcije f

Primjer 5.1.12. Naći nivo-krivulje funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2$.

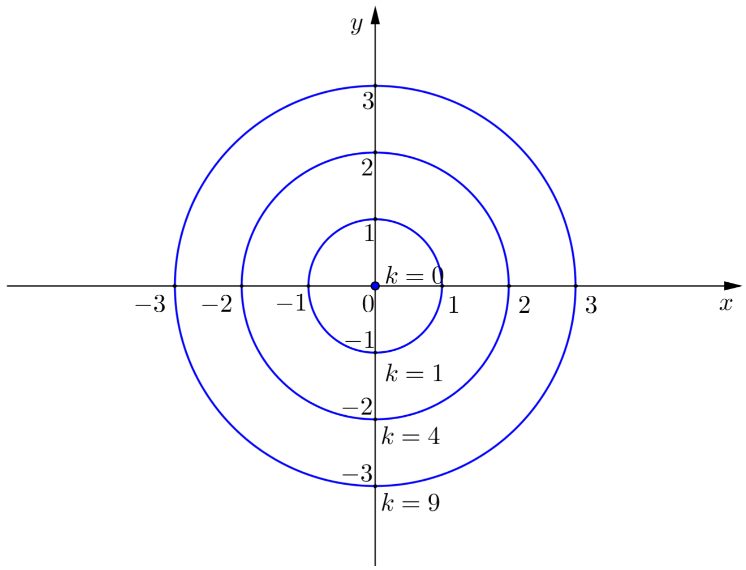
Rješenje. Primijetimo da je $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty\rangle$. To znači da za svaki $k \in [0, \infty\rangle$ imamo nivo-krivulju zadanu jednadžbom $f(x,y) = k$, tj.

$$x^2 + y^2 = k.$$

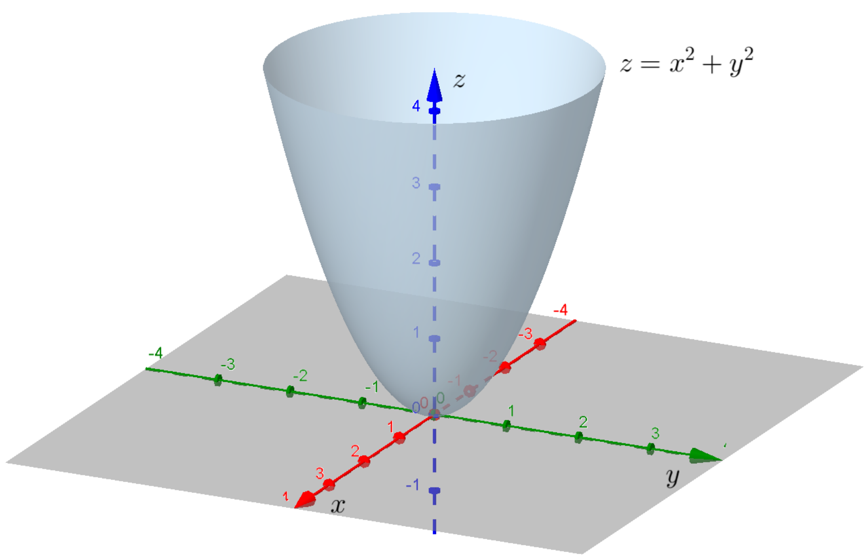
Ako je $k = 0$, rješenje ove jednadžbe je $(0,0)$.

Ako je $k > 0$, tada je nivo-krivulja kružnica polumjera $\sqrt{k}$ sa središtem u ishodištu.

Ploha zadana jednadžbom $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ skicirana je na slici 104.



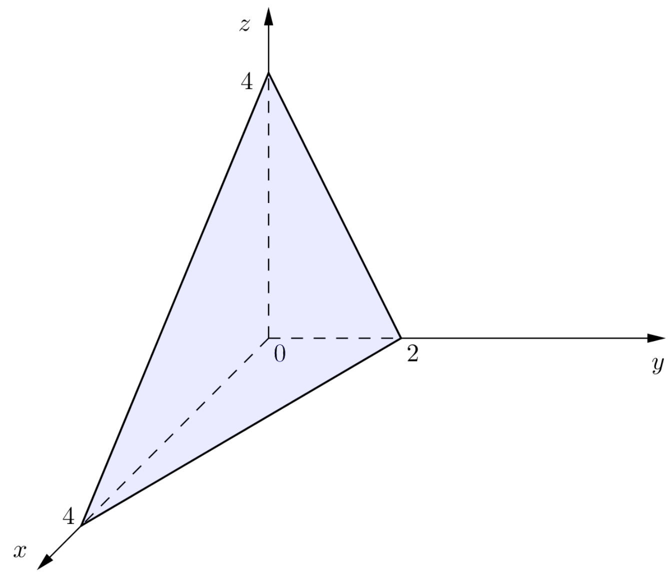
Slika 103: Nivo-krivulje funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$



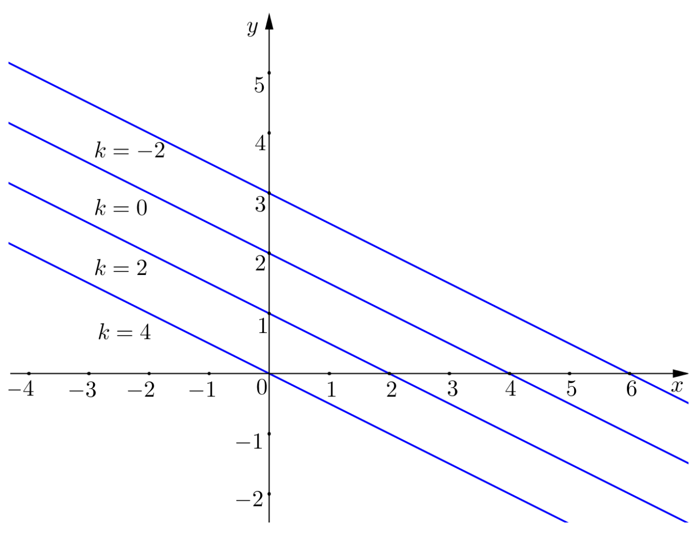
Slika 104: Ploha zadana jednadžbom $z = x^2 + y^2$

Primjer 5.1.13. Naći nivo-krivulje funkcije implicitno zadane jednadžbom $x + 2y + z - 4 = 0$.

Rješenje. Znamo da je $x + 2y + z - 4 = 0$ jednadžba ravnine. Segmentni oblik ove jednadžbe je $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$, pa su odsječci koje ravnina odsijeca na koordinatnim osima x, y i z redom 4, 2 i 4 (slika 105).



Slika 105: Ravnina $x + 2y + z - 4 = 0$

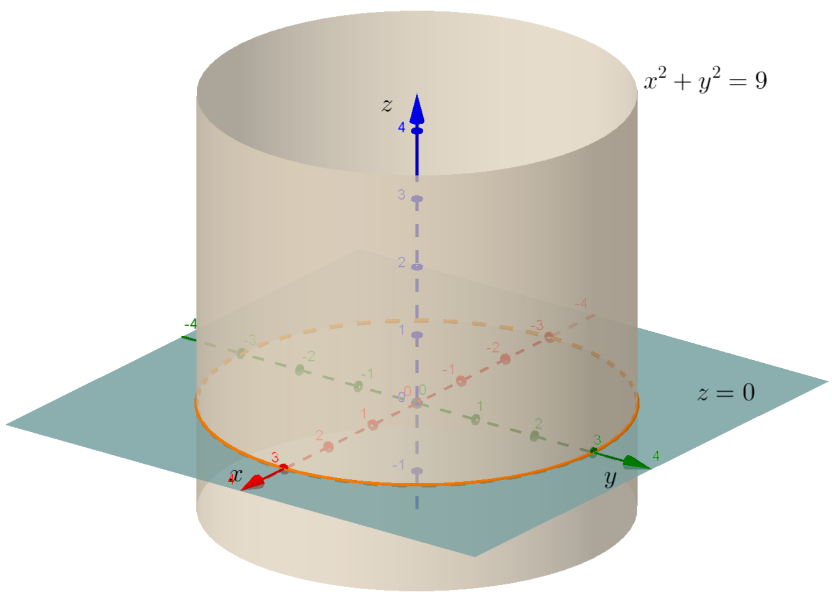


Slika 106: Nivo-krivulje ravnine $x + 2y + z - 4 = 0$

Nivo-krivulje dobivamo tako da ovu ravninu presijecamo ravninama $z = k$, gdje je $k \in \mathbb{R}$. Prema tome, nivo-krivulje su paralelni pravci zadani jednadžbama $x + 2y + k - 4 = 0$, $k \in \mathbb{R}$ (slika 106).

Primjer 5.1.14. Skicirati plohu kojoj su sve nivo-krivulje zadane jednadžbom $x^2 + y^2 = 9$.

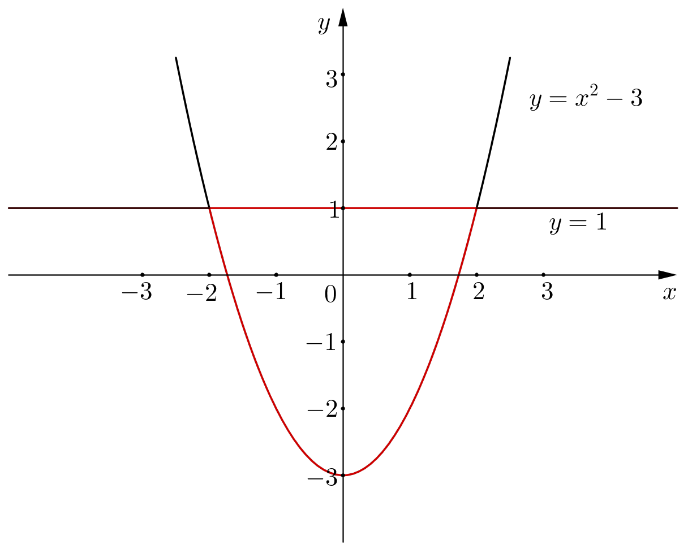
Rješenje. Znamo da je $x^2 + y^2 = 9$ jednadžba kružnice polumjera $r = 3$ sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Budući da je ova kružnica jedina nivo-krivulja naše plohe, tj. da presijecanjem plohe ravninama paralelnim s xy-ravninom uvijek dobijemo kružnicu $x^2 + y^2 = 9$, zaključujemo da je tražena ploha plašt "beskonačnog" valjka (v. sliku 107).



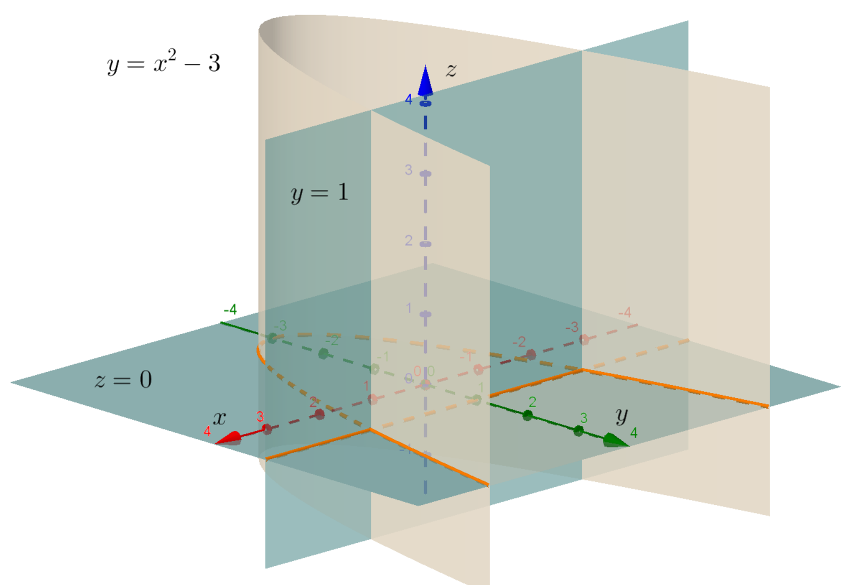
Slika 107: Ploha kojoj su sve nivo-krivulje kružnica $x^2 + y^2 = 9$

Primjer 5.1.15. Skicirati plohu kojoj su sve nivo-krivulje zatvorena krivulja omeđena parabolom $y = x^2 - 3$ i pravcem $y = 1$.

Rješenje. Presijecanjem plohe ravninama paralelnim s xy-ravninom uvijek se dobije nivo-krivulja prikazana na slici 108. Graf tražene plohe skiciran je na slici 109.



Slika 108: Nivo-krivulja je zatvorena krivulja omeđena parabolom $y = x^2 - 3$ i pravcem $y = 1$.

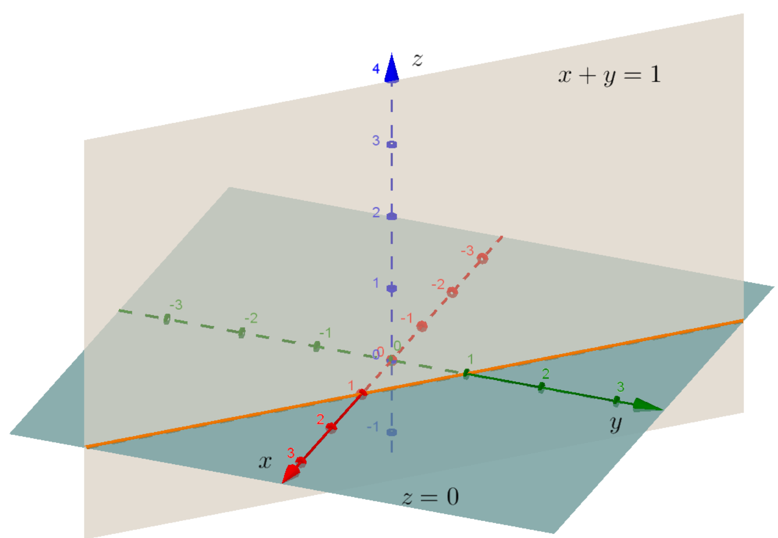


Slika 109: Ploha kojoj su sve nivo-krivulje zatvorena krivulja omeđena parabolom $y = x^2 - 3$ i pravcem $y = 1$

Napomena. Plohe iz primjera 5.1.14 i 5.1.15 su posebne po tome što su im sve nivo-krivulje jedna te ista krivulja. Može se reći da te plohe nastaju gibanjem pravca paralelnog z-osi duž neke zatvorene krivulje u xy-ravnini. Takve plohe se zovu *uspravne valjkaste plohe.*

Nadalje, uočimo da su jednadžbe nivo-krivulja ploha iz primjera 5.1.14 i 5.1.15 ujedno i jednadžbe samih ploha. Naime, jednadžba $y = f(x)$ ili $F(x, y) = 0$ bilo koje krivulje u xy-ravnini definira plohu u prostoru koja nastaje tako da se pravac paralelan z-osi giba po toj krivulji. Dakle, jedini uvjet da točka bude na plohi je onaj koji povezuje x i y koordinate točke, dok koordinata z može poprimiti bilo koju realnu vrijednost.

Primjerice, $x + y = 1$ je jednadžba pravca u ravnini, dok je u prostoru $x + y = 1$ jednadžba ravnine paralelne z-osi (slika 110).



Slika 110: Ravnina $x + y = 1$

Da bismo si lakše predočili plohu u prostoru zadanu jednadžbom $z = f(x, y)$ ili $F(x, y, z) = 0$, osim presijecanjem plohe ravninama $z = k$ paralelnim s xy-ravninom, plohu možemo presijecati i ravninama $x = k$ paralelnim s yz-ravninom, odnosno ravninama $y = k$ paralelnim s xz-ravninom. U sljedećim primjerima skicirat ćemo neke važne plohe u prostoru.

Primjer 5.1.16. Skicirati *elipsoid* zadan jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

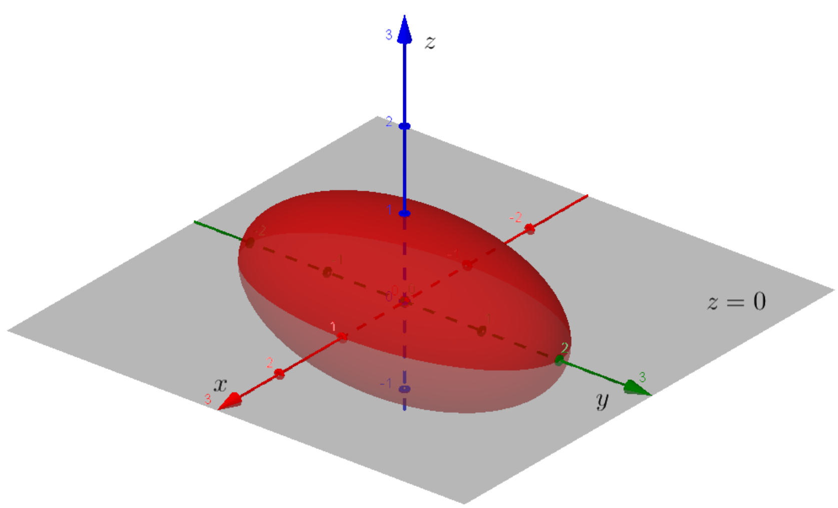
Rješenje. Presijecanjem ove plohe ravninama paralelnim s koordinatnim ravninama dobivamo elipse. (Odatle potječe naziv elipsoid.)

Zaista, presiječemo li plohu ravninom $x=k$, gdje je $k\in\langle -a,a\rangle$, dobivamo elipsu $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}$.

Ako plohu presiječemo ravninom $y=k$, gdje je $k\in\langle -b,b\rangle$, dobivamo elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}$.

Također, presiječemo li plohu ravninom $z=k$, gdje je $k\in\langle -c,c\rangle$, dobivamo elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$.

Primijetimo da je za $a=b=c(=r)$, $x^2+y^2+z^2=r^2$ jednadžba *sfere* polumjera r sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava.



Slika 111: Elipsoid $x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1$

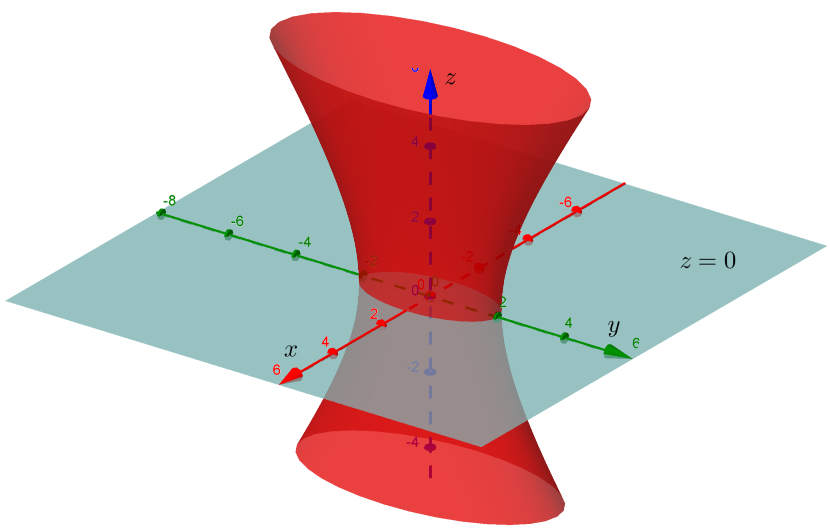
Primjer 5.1.17. Skicirati *jednoplošni hiperboloid* zadan jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Rješenje. Presijecanjem ove plohe ravninama $x = k$, gdje je $k \neq \pm a$, dobiju se hiperbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$.

Također, presijecamo li plohu ravninama $y = k$, gdje je $k \neq \pm b$, dobiju se hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$.

Ako pak plohu presijecamo ravninama $z = k$, dobiju se elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$. Posebno, ako je $a = b$ dobiju se kružnice.



Slika 112: Jednoplošni hiperboloid $x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$

Primjer 5.1.18. Skicirati *dvoplošni hiperboloid* zadan jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

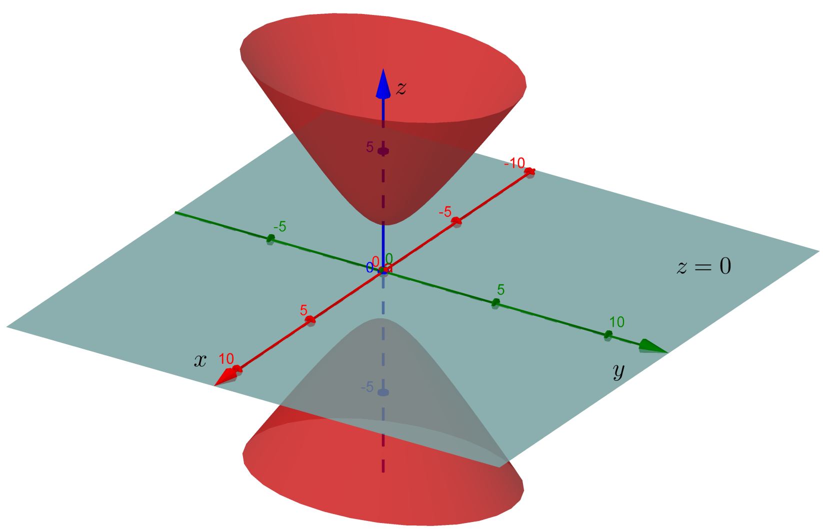
Rješenje. Kako je

$$\frac{z^2}{c^2} - 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 0,$$

to mora biti $z^2 \geq c^2$, odnosno $|z| \geq c$. Ova ploha se sastoji od dva dijela; jednog za koji je $z \geq c$ i drugog za koji je $z \leq -c$.

Presijecanjem plohe ravninama $x = k$ dobiju se hiperbole $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{a^2}$, a presijecanjem ravninama $y = k$ hiperbole $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2}$.

Ako plohu presijecamo ravninama $z = k$, gdje je $|k| > c$, dobivamo elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1$. Posebno, za $a = b$ dobivamo kružnice.



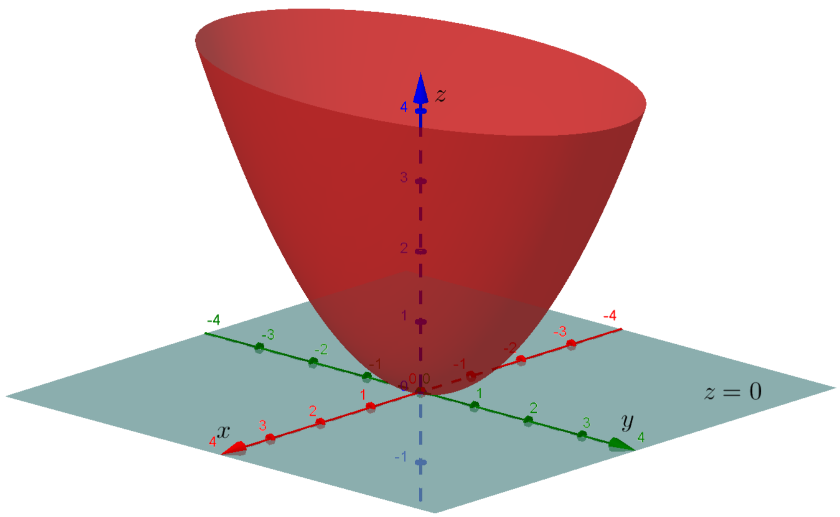
Slika 113: Dvoplošni hiperboloid $x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4} = -1$

Primjer 5.1.19. Skicirati *eliptički paraboloid* zadan jednadžbom

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Rješenje. Presijecanjem plohe ravninama $x = k$ dobiju se parabole $z = \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}$, a presijecanjem ravninama $y = k$ parabole $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}$.

Ako plohu presijecamo ravninama $z = k$, gdje je $k > 0$, dobiju se elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k$, odnosno kružnice ako je $a = b$.



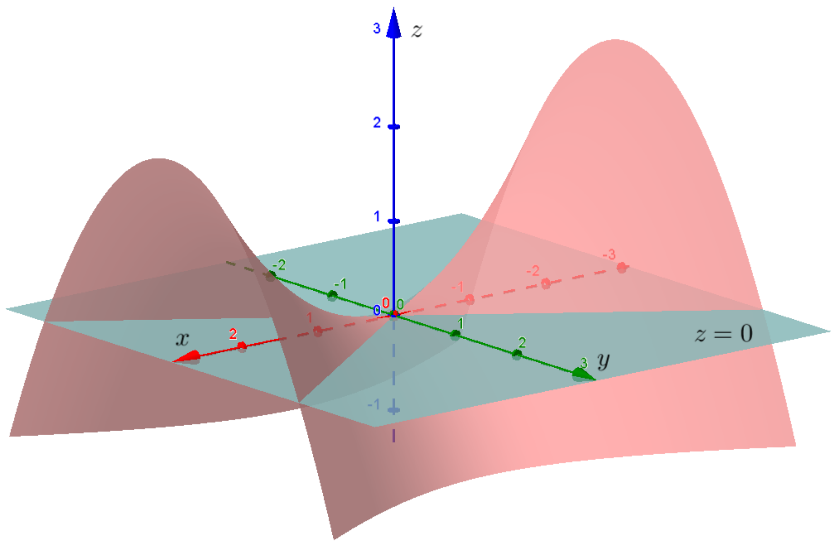
Slika 114: Eliptički paraboloid $z = x^2 + \frac{y^2}{3}$

Primjer 5.1.20. Skicirati *hiperbolički paraboloid* zadan jednadžbom

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Rješenje. Presijecanjem plohe ravninama $x = k$ dobiju se parabole $z = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}$, a presijecanjem ravninama $y = k$ dobiju se parabole $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2}$.

Ako plohu presijecamo ravninama $z = k$, gdje je $k \neq 0$, dobiju se hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k$.



Slika 115: Hiperbolički paraboloid $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2}$

Primjer 5.1.21. Skicirati *stožac* zadan jednadžbom

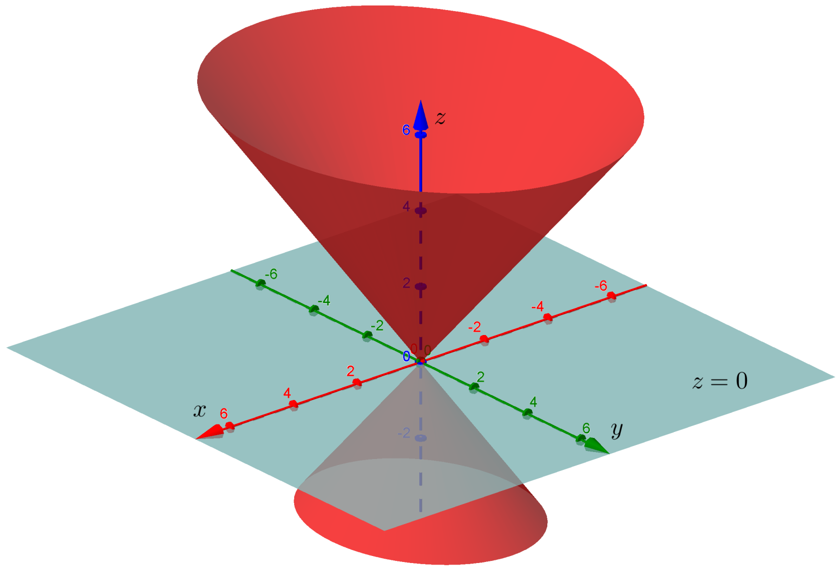
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Rješenje. Presijecanjem plohe ravninama $x = k$, $k \neq 0$, dobiju se hiperbole $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2}$, a presijecanjem ravninama $y = k$, $k \neq 0$, dobiju se hiperbole $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{k^2}{b^2}$.

Presiječemo li plohu ravninom $x = 0$, dobit ćemo dva pravca $z = \frac{c}{b}y$ i $z = -\frac{c}{b}y$.

Presiječemo li plohu ravninom $y = 0$, dobit ćemo dva pravca $z = \frac{c}{a}x$ i $z = -\frac{c}{a}x$.

Ako plohu presijecamo ravninama $z = k$, $k \neq 0$, dobivamo elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$. Posebno, za $a = b$ dobivamo kružnice.



Slika 116: Stožac $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 0$

Primjer 5.1.22. Skicirati
(a) *eliptički cilindar* zadan jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

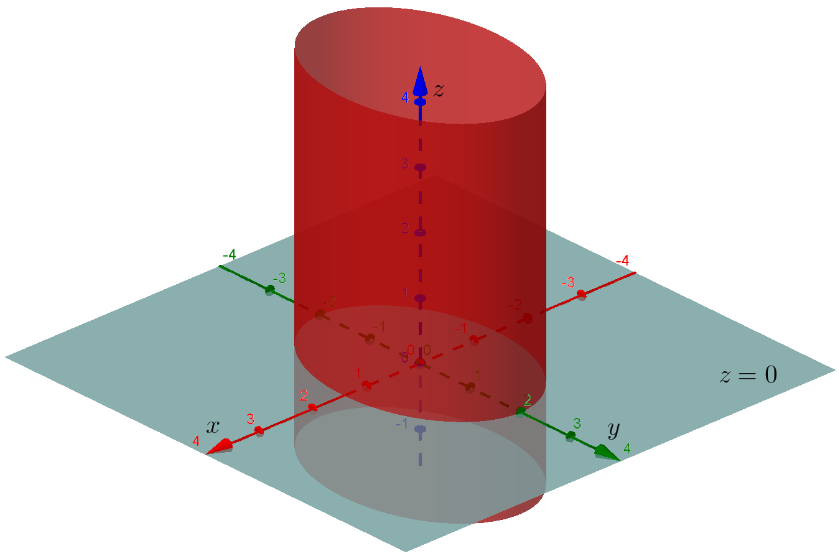
(b) *hiperbolički cilindar* zadan jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

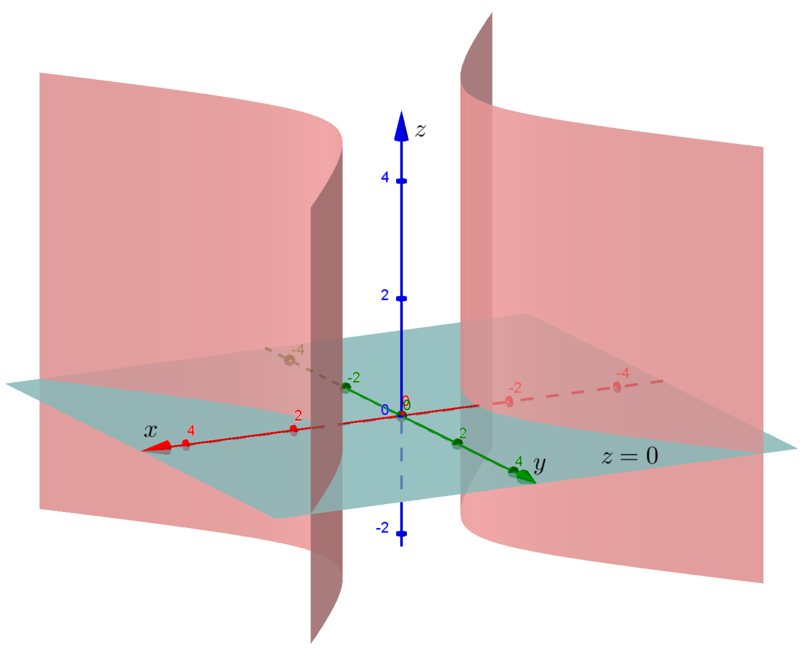
(c) *parabolički cilindar* zadan jednadžbom

$$y^2 = 2px.$$

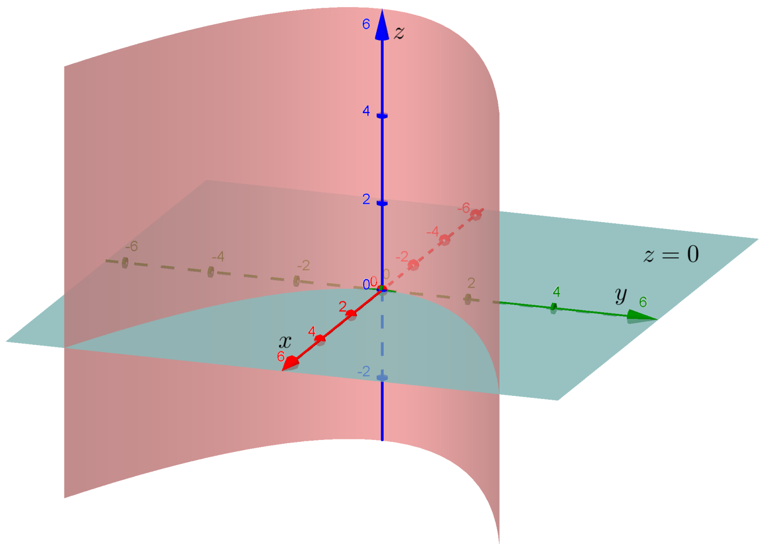
Rješenje. Uočimo da se u jednadžbama ovih ploha ne pojavljuje z. Kao što smo već ranije napomenuli, ovakvim su jednadžbama definirane plohe u prostoru koje nastaju tako da se pravac paralelan z-osi giba po krivulji u xy-ravnini određenoj tom istom jednadžbom. Prema tome, u slučaju (a) radi se o elipsi, u slučaju (b) o hiperboli, a u slučaju (c) o paraboli u xy-ravnini. Najprije ćemo skicirati ove krivulje, a zatim ćemo odgovarajuće valjkaste plohe dobiti gibanjem pravca paralelnog z-osi duž dobivenih krivulja.



Slika 117: Eliptički cilindar $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$



Slika 118: Hiperbolički cilindar $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$



Slika 119: Parabolički cilindar $y^2 = 4x$

5.2 Limes i neprekidnost

U Matematici 1 uveli smo pojam limesa realne funkcije jedne varijable. Znamo da realna funkcija f jedne varijable ima limes L u točki $c \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $\langle c-\delta, c+\delta\rangle \setminus \{c\} \subseteq \mathcal{D}(f)$, te da iz $|x-c| < \delta$ slijedi $|f(x)-L| < \varepsilon$.

Pojam limesa definira se i za realne funkcije više varijabli.

Neka je dana točka $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Označimo s

$$K\big((a,b);r\big) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\big\}$$

otvoren krug polumjera r sa središtem u točki (a,b). Neka je f realna funkcija dviju varijabli, takva da je $K\big((a,b);r\big) \setminus \big\{(a,b)\big\} \subseteq \mathcal{D}(f)$.

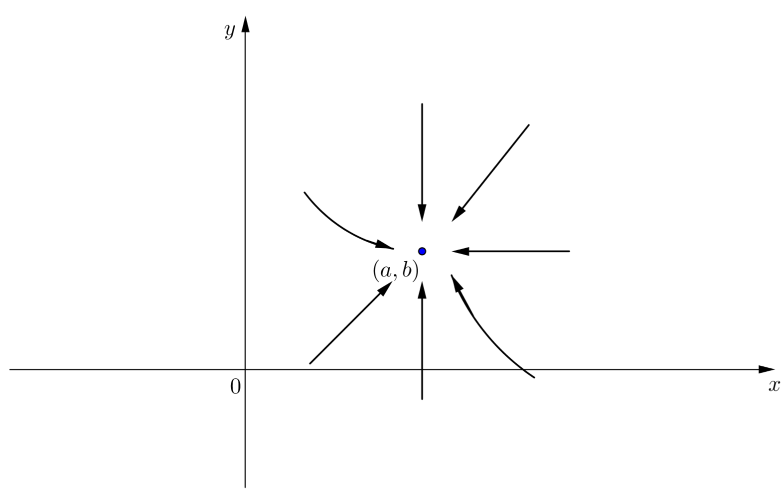
Kažemo da funkcija f ima *limes* $L \in \mathbb{R}$ u točki (a,b) ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ $(\delta \le r)$, tako da iz $(x,y) \in K\big((a,b);\delta\big) \setminus \big\{(a,b)\big\}$ slijedi $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

Tada pišemo

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L.$$

Prema tome, L je limes funkcije f u točki (a, b) ako vrijednosti funkcije f pripadaju proizvoljno maloj okolini broja L čim su vrijednosti (x, y) dovoljno blizu točki (a, b).

Uočimo da u definiciji limesa funkcije jedne varijable, izraz $|x - c| < \delta$ znači da su točke x i c na brojevnom pravcu udaljene za manje od δ. Isto tako, u definiciji limesa funkcije dviju varijabli izraz $(x, y) \in K\big((a, b); \delta\big)$ znači da je udaljenost točaka (x, y) i (a, b) u koordinatnoj ravnini manja od δ. Stoga je pojam limesa funkcije dviju varijabli zapravo prirodno poopćenje pojma limesa funkcije jedne varijable. Glavna razlika između ovih limesa je način na koji se x "približava" točki c, odnosno (x, y) "približava" točki (a, b). Naime, x teži prema točki c samo duž brojevnog pravca; dakle samo su dva različita smjera, "slijeva" ili "zdesna", iz kojih se x "približava" točki c. Znamo da f ima limes L u točki c ako i samo ako postoje lijevi i desni limes funkcije f u točki c i oba iznose L. Nasuprot tome, postoji beskonačno mnogo različitih putova po kojima se u koordinatnoj ravnini točke (x, y) mogu "približiti" točki (a, b). Limes će postojati onda i samo onda kada vrijednosti funkcije f teže jednom te istom broju L neovisno o tome kojim se putom točke (x, y) "približavaju" točki (a, b).



Slika 120: $(x, y) \to (a, b)$ u $\mathbb{R}^2$

Pojam limesa analogno se proširuje i na funkcije n varijabli, gdje je $n \geq 3$. Općenito, ako je dana točka $T(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, te ako je f realna funkcija n varijabli definirana na skupu

$$K(T; r) = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 < r^2\big\},$$

osim možda u točki T, tada kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ *limes* funkcije f u točki T ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ ($\delta < r$), tako da iz $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K(T;\delta) \setminus \{T\}$ slijedi $|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - L| < \varepsilon$.

Ako funkcija f ima limes u točki $T \in \mathbb{R}^n$, tada je on jedinstven.

Svojstva limesa realne funkcije više varijabli ista su kao i odgovarajuća svojstva limesa realne funkcije jedne varijable. Navest ćemo ta svojstva za funkcije dviju varijabli, budući da se uglavnom bavimo takvim funkcijama.

Teorem 5.2.1. *Neka su f i g realne funkcije dviju varijabli definirane na nekom krugu sa središtem u točki $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, osim možda u točki (a,b).*

(i) *Pretpostavimo da je $L_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ i $L_2 = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big) = L_1 \pm L_2;$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} kf(x,y) = kL_1, \quad k \in \mathbb{R};$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = L_1L_2;$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ *ako je* $L_2 \neq 0.$

(ii) *Ako postoji $L \in \mathbb{R}$ i $\delta > 0$ takav da je $K\big((a,b);\delta\big) \setminus \big\{(a,b)\big\} \subseteq \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ i $|f(x,y) - L| \leq g(x,y)$ za sve $(x,y) \in K\big((a,b);\delta\big) \setminus \big\{(a,b)\big\}$, te ako je $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = 0$, onda je $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.*

Primjer 5.2.2. Izračunati $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \dfrac{xy-1}{x^3+y}$.

Rješenje. Kada $(x,y) \to (2,3)$, tada $xy-1 \to 2\cdot 3-1 = 5$, a $x^3+y \to 2^3+3 = 11$. Prema svojstvu (d) teorema 5.2.1 (i) vrijedi $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \dfrac{xy-1}{x^3+y} = \dfrac{5}{11}$.

Primjer 5.2.3. Izračunati $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$.

Rješenje. Limes je neodređenog oblika $\frac{0}{0}$. Izračunat ćemo ga tako da razlomak $\frac{x^2-y^2}{x-y}$ skratimo. Dakle,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x+y) = 2.$$

Primjer 5.2.4. Izračunati $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$.

Rješenje. Ovaj limes je neodređenog oblika $\frac{0}{0}$. Neodređeni oblik pretvorit ćemo u određeni tako da nazivnik racionaliziramo.

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}{\sqrt{x^2+y^2+4}+2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{x^2+y^2+4-4} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right) = 4.
\end{aligned}
$$

Primjer 5.2.5. Izračunati $\lim\limits_{(x,y)\to(0,5)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.

Rješenje. Zadani limes je neodređenog oblika $\frac{0}{0}$. Riješit ćemo ga koristeći poznati limes $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,5)} \frac{\sin(xy)}{x} &= \lim_{(x,y)\to(0,5)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = (\text{teorem } 5.2.1 \text{ (i) (c)}) \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,5)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,5)} y = 1 \cdot 5 = 5.
\end{aligned}
$$

Primjer 5.2.6. Izračunati $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}$.

Rješenje. Limes je neodređenog oblika $\frac{0}{0}$. Kako je za sve $x, y \in \mathbb{R}$

$$0 \leq x^4 \leq (x^2+y^2)^2,$$

to za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vrijedi $0 \leq \frac{x^4}{x^2+y^2} \leq x^2+y^2$, odnosno

$$\left| \frac{x^4}{x^2+y^2} \right| \leq x^2+y^2.$$

Budući da je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$, to je prema teoremu 5.2.1 (ii)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} = 0.$$

Primjer 5.2.7. Dokazati da ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Rješenje. Limes je neodređenog oblika $\frac{0}{0}$. Pogledajmo što se događa s vrijednostima funkcije $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ kada (x,y) teži prema ishodištu $(0,0)$ po pravcu $y = 2x$. Za $y = 2x$ je

$$f(x,2x) = \frac{x \cdot 2x}{x^2+(2x)^2} = \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5},$$

pa je

$$\lim_{x\to 0} f(x,2x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Ako (x,y) teži prema $(0,0)$ po pravcu $y = 3x$, tada iz

$$f(x,3x) = \frac{x \cdot 3x}{x^2+(3x)^2} = \frac{3x^2}{10x^2} = \frac{3}{10}$$

slijedi

$$\lim_{x\to 0} f(x,3x) = \lim_{x\to 0} \frac{3}{10} = \frac{3}{10}.$$

Prema tome, kada (x,y) teži prema $(0,0)$ različitim putovima $y = 2x$, odnosno $y = 3x$, vrijednosti $f(x,y)$ teže prema različitim realnim brojevima. Odavde zaključujemo da ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Primjer 5.2.8. Dokazati da ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Rješenje. Provjerimo najprije što se događa s vrijednostima funkcije $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ kada $(x,y) \to (0,0)$ po bilo kojem pravcu $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Kako je

$$f(x,kx) = \frac{x^2 \cdot kx}{x^4+(kx)^2} = \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = \frac{kx}{x^2+k^2},$$

to je

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Prema tome, "približavamo" li se ishodištu $(0,0)$ po bilo kojem pravcu koji prolazi ishodištem, vrijednosti funkcije f teže prema nuli.

Međutim, ako $(x,y) \to (0,0)$ po paraboli $y = x^2$, imamo

$$f(x,x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4+(x^2)^2} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2},$$

odakle slijedi

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, kada $(x,y) \to (0,0)$ različitim putovima, vrijednosti $f(x,y)$ ne teže uvijek jednom te istom realnom broju, pa stoga ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Za realnu funkciju f jedne varijable rekli smo da je neprekidna u točki $c \in \mathcal{D}(f)$ ako f ima limes u točki c, te vrijedi $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Neka je sada f realna funkcija dviju varijabli, te neka je $(a,b) \in \mathcal{D}(f)$. Funkcija f je *neprekidna* u točki (a,b) ako postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, te vrijedi

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Funkcija f je neprekidna na skupu $S \subseteq \mathcal{D}(f)$ ako je neprekidna u svakoj točki skupa S.

Teorem 5.2.9. (i) *Neka su f i g realne funkcije dviju varijabli. Ako su funkcije f i g neprekidne u točki (a,b), tada je*

(a) *funkcija $f+g$ neprekidna u točki (a,b),*

(b) *funkcija $f-g$ neprekidna u točki (a,b),*

(c) *funkcija fg neprekidna u točki (a,b),*

(d) *funkcija $\frac{f}{g}$ neprekidna u točki (a,b) (uz uvjet $g(a,b) \neq 0$).*

(ii) *Neka je f realna funkcija dviju varijabli, a g realna funkcija jedne varijable, te neka je* $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathcal{D}(g)$. *Ako je funkcija f neprekidna u točki (a,b), a funkcija g neprekidna u točki $f(a,b)$, tada je kompozicija $g \circ f$ neprekidna u točki (a,b).*

Slično se definira pojam neprekidnosti realne funkcije triju ili više varijabli.

Primjer 5.2.10. Ispitati neprekidnost funkcije $f(x,y) = 2xy + x^3 - xy^2$.

Rješenje. Uočimo da je funkcija f dobro definirana u svim točkama $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, odnosno $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$.

Uzmimo sada proizvoljnu točku $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Tada je

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} (2xy + x^3 - xy^2) = 2ab + a^3 - ab^2 = f(a,b),$$

pa je funkcija f neprekidna u točki (a, b). Budući da smo točku (a, b) birali proizvoljno, zaključujemo da je funkcija f neprekidna na cijelom skupu $\mathbb{R}^2$.

Primjer 5.2.11. Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2} & \text{ako je } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ako je } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Rješenje. Neprekidnost funkcije f ispitujemo u točkama njene domene. Očito je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$.

Uočimo da su funkcije $(x, y) \mapsto x^4$ i $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ neprekidne na $\mathbb{R}^2$. Stoga je prema svojstvu (d) teorema 5.2.9 (i), funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Preostaje provjeriti neprekidnost funkcije f u točki $(0, 0)$. U primjeru 5.2.6 pokazali smo da je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2 + y^2} = 0.$$

Kako je osim toga $f(0, 0) = 0$, imamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0),$$

pa zaključujemo da je funkcija f neprekidna i u točki $(0, 0)$. Prema tome, f je neprekidna na $\mathbb{R}^2$.

Primjer 5.2.12. Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{ako je } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ako je } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Rješenje. Uočimo da je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Funkcija f je neprekidna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ kao kvocijent neprekidnih funkcija $(x, y) \mapsto xy$ i $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. U primjeru 5.2.7 smo pokazali da ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, pa stoga funkcija f nije neprekidna u točki $(0, 0)$.

5.3 Parcijalne derivacije

Neka je $z = f(x, y)$ realna funkcija dviju varijabli definirana na nekom krugu oko točke $T(a, b)$.

Parcijalna derivacija funkcije f po x u točki $T(a,b)$ je broj koji označavamo s $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, a definiramo ga kao

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}. \tag{41}$$

Parcijalnu derivaciju funkcije f po y u točki $T(a,b)$, u oznaci $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, definiramo kao

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}. \tag{42}$$

Osim oznaka $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, za parcijalnu derivaciju funkcije f po x u točki (a,b) koristi se oznaka $f'_x(a,b)$, dok se za parcijalnu derivaciju funkcije f po y u točki (a,b) koristi oznaka $f'_y(a,b)$.

Ako funkcija f ima parcijalnu derivaciju po x u svakoj točki skupa $S \subseteq \mathbb{R}^2$, onda je na skupu S dobro definirana realna funkcija dviju varijabli

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

koju označavamo s $\frac{\partial f}{\partial x}$ i nazivamo *parcijalnom derivacijom funkcije f po x*.

Također, ako funkcija f ima parcijalnu derivaciju po y u svakoj točki skupa $S \subseteq \mathbb{R}^2$, onda je na skupu S dobro definirana realna funkcija dviju varijabli

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

koju označavamo s $\frac{\partial f}{\partial y}$ i nazivamo *parcijalnom derivacijom funkcije f po y*.

Označimo li s g realnu funkciju jedne varijable, definiranu s

$$g(x) := f(x,b),$$

tada desna strana u (41) poprima oblik

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h},$$

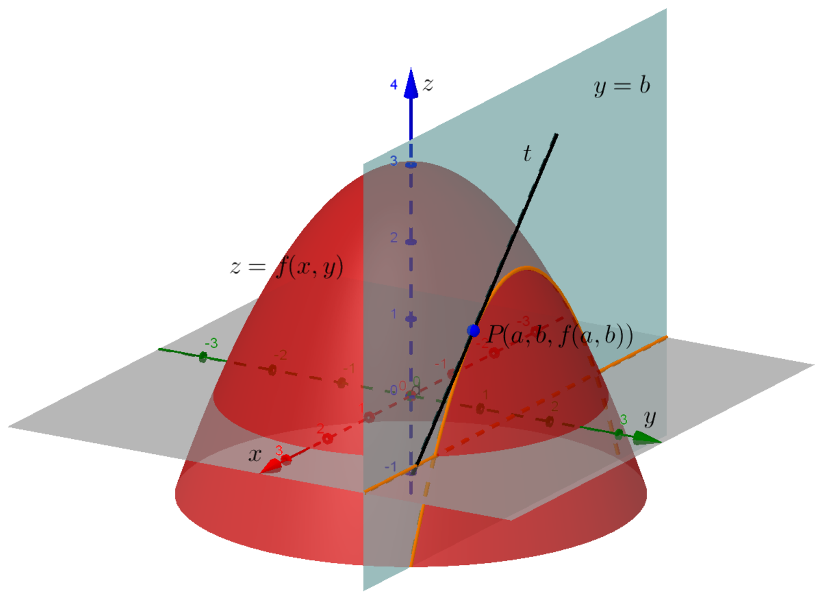
što znamo da je prva derivacija funkcije g u točki a. Dakle,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = g'(a).$$

To nam govori da parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial x}$ računamo tako da funkciju f deriviramo po varijabli x smatrajući pritom varijablu y konstantom. Broj

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ predstavlja mjeru promjene funkcije $x \mapsto f(x,b)$ u okolini točke $T(a,b)$ u odnosu na promjenu varijable x (tj. u smjeru osi x).

Geometrijski gledano, presiječemo li plohu $z = f(x,y)$ ravninom $y = b$ paralelnom xz-ravnini, dobit ćemo krivulju u toj ravnini čija je jednadžba $g(x) = f(x,b)$. Broj $g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ je koeficijent smjera tangente t na tu krivulju u točki $P\big(a,b,g(a)\big)$, odnosno $P\big(a,b,f(a,b)\big)$ (slika 121).



Slika 121: Geometrijski smisao $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$

Sličnu interpretaciju ima $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$. Naime, ako je g realna funkcija jedne varijable definirana s

$$g(y) := f(a,y),$$

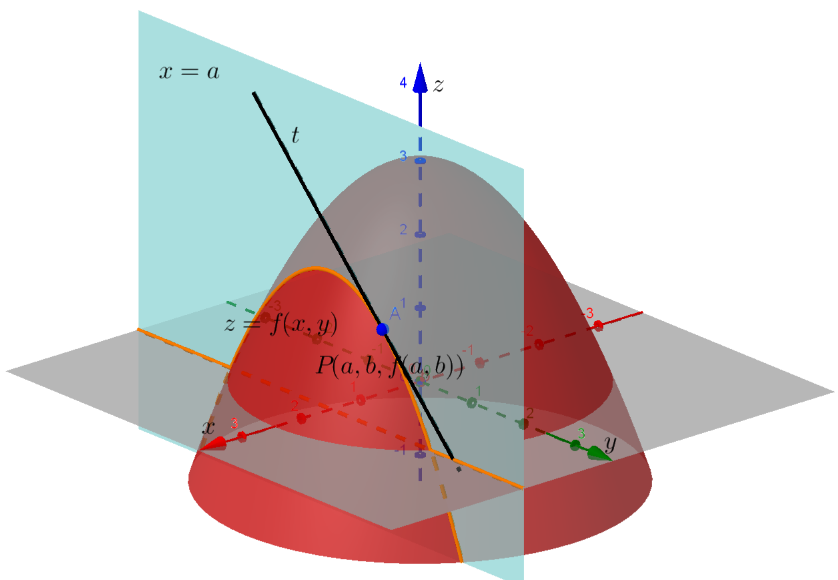
onda je desna strana u (42)

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(b+h)-g(b)}{h},$$

što je $g'(b)$. Dakle,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = g'(b).$$

Prema tome, parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial y}$ računamo tako da funkciju f deriviramo po varijabli y smatrajući pritom varijablu x konstantom. Stoga je $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ mjera promjene funkcije $y \mapsto f(a,y)$ u okolini točke $T(a,b)$ u odnosu na promjenu varijable y (tj. u smjeru osi y). U geometrijskom smislu, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ je koeficijent smjera tangente t na presječnu krivulju plohe $z = f(x,y)$ i ravnine $x = a$ paralelne yz-ravnini u točki $P\big(a,b,f(a,b)\big)$ (slika 122).



Slika 122: Geometrijski smisao $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

U slučaju realne funkcije $u = f(x,y,z)$ triju varijabli, parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial x}$ računamo tako da funkciju f deriviramo po varijabli x smatrajući pritom varijable y i z konstantama. Parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial y}$ računamo tako da funkciju f deriviramo po varijabli y smatrajući pritom varijable x i z konstantama, dok $\frac{\partial f}{\partial z}$ računamo tako da f deriviramo po varijabli z smatrajući pritom varijable x i y konstantama.

Analogno postupamo i u slučaju realne funkcije $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ od n varijabli, gdje je $n > 3$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ pripadnu parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ računamo tako da f deriviramo po varijabli x_i, a sve ostale varijable smatramo konstantama.

Primjer 5.3.1. Naći parcijalne derivacije funkcije f po x i po y :

(a) $f(x,y) = x^2 + y^3 + 1$,
(b) $f(x,y) = x^2y - 3xy + y^7$,
(c) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$,
(d) $f(x,y) = \ln\dfrac{x}{y}$,
(e) $f(x,y) = x\sin(3x + y^2)$,
(f) $f(x,y) = e^{x^3-y}$,
(g) $f(x,y) = \sqrt{\sin(x+2y)}$,
(h) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$,
(i) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{e^{xy}}$,
(j) $f(x,y) = 2^{x+\sqrt{y}} + \ln(x^5 + y^3)$.

Rješenje.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2,$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy - 3y, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 3x + 7y^6,$

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1\cdot(x-y) - (x+y)\cdot 1}{(x-y)^2} = -\dfrac{2y}{(x-y)^2},$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1\cdot(x-y) - (x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2} = \dfrac{2x}{(x-y)^2},$

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{1\cdot y - x\cdot 0}{y^2} = \dfrac{1}{x},$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{0\cdot y - x\cdot 1}{y^2} = -\dfrac{1}{y},$

(e) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(3x+y^2) + 3x\cos(3x+y^2),$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(3x+y^2)\cdot 2y = 2xy\cos(3x+y^2),$

(f) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^3-y}\cdot 3x^2 = 3x^2e^{x^3-y},$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^3-y}\cdot(-1) = -e^{x^3-y},$

(g) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(x+2y)}}\cdot\cos(x+2y) = \dfrac{\cos(x+2y)}{2\sqrt{\sin(x+2y)}},$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\sin(x+2y)}}\cdot\cos(x+2y)\cdot 2=\frac{\cos(x+2y)}{\sqrt{\sin(x+2y)}},$$

(h) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=\frac{y}{x^2+y^2},$$

(i) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot e^{xy}-\operatorname{tg} x\cdot e^{xy}\cdot y}{(e^{xy})^2}=\frac{1-y\sin x\cos x}{e^{xy}\cos^2 x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{0\cdot e^{xy}-\operatorname{tg} x\cdot e^{xy}\cdot x}{(e^{xy})^2}=-\frac{x\operatorname{tg} x}{e^{xy}},$$

(j) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2^{x+\sqrt{y}}\ln 2+\frac{1}{x^5+y^3}\cdot 5x^4=2^{x+\sqrt{y}}\ln 2+\frac{5x^4}{x^5+y^3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2^{x+\sqrt{y}}\ln 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{x^5+y^3}\cdot 3y^2=\frac{2^{x+\sqrt{y}}\ln 2}{2\sqrt{y}}+\frac{3y^2}{x^5+y^3}.$$

Primjer 5.3.2. Zadana je funkcija $f(x,y)=(x+2y)\cos(x-y)$. Naći $\frac{\partial f}{\partial x}(\pi,0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(\pi,0)$.

Rješenje. Najprije ćemo naći parcijalne derivacije funkcije f po x i po y, a zatim izračunati vrijednosti parcijalnih derivacija u zadanoj točki $(\pi,0)$. Dakle,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(x-y)-(x+2y)\sin(x-y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi,0)=\cos(\pi-0)-(\pi+2\cdot 0)\sin(\pi-0)=-1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2\cos(x-y)+(x+2y)\sin(x-y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\pi,0)=2\cos(\pi-0)+(\pi+2\cdot 0)\sin(\pi-0)=-2.$$

Primjer 5.3.3. Zadana je funkcija $f(x,y)=\frac{y}{x+y}$. Naći $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$.

Rješenje.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{y}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=-\frac{1}{(2+1)^2}=-\frac{1}{9},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1\cdot(x+y)-y\cdot 1}{(x+y)^2}=\frac{x}{(x+y)^2},$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \dfrac{2}{(2+1)^2} = \dfrac{2}{9}.$

Primjer 5.3.4. Zadana je funkcija $f(x,y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$. Pokazati da je $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2$.

Rješenje.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x^2+xy+y^2} \cdot (2x+y),$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x^2+xy+y^2} \cdot (x+2y).$

Stoga je

$$\begin{aligned}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) &= x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ &= \frac{x(2x+y)}{x^2+xy+y^2} + \frac{y(x+2y)}{x^2+xy+y^2}\\ &= \frac{2x^2+2xy+2y^2}{x^2+xy+y^2} = 2.\end{aligned}$$

Primjer 5.3.5. Naći parcijalne derivacije funkcije f po x, po y i po z :

(a) $f(x,y,z) = xyz$,

(b) $f(x,y,z) = x + 3y^2z + 6$,

(c) $f(x,y,z) = y\sin(x+2z)$,

(d) $f(x,y,z) = \dfrac{x+z}{y-4z}$,

(e) $f(x,y,z) = ze^{\frac{x}{y}}$.

Rješenje.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz, \quad \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy,$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 1, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 6yz, \quad \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3y^2,$

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y\cos(x+2z),$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \sin(x+2z),$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2y\cos(x+2z),$

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{1\cdot(y-4z)-(x+z)\cdot 0}{(y-4z)^2} = \dfrac{1}{y-4z},$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{0\cdot(y-4z)-(x+z)\cdot 1}{(y-4z)^2} = -\frac{x+z}{(y-4z)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{1\cdot(y-4z)-(x+z)\cdot(-4)}{(y-4z)^2} = \frac{4x+y}{(y-4z)^2},$$

(e) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = ze^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{z}{y}\,e^{\frac{x}{y}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = ze^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{-x}{y^2} = -\frac{xz}{y^2}\,e^{\frac{x}{y}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = e^{\frac{x}{y}}.$$

Primjer 5.3.6. Zadana je funkcija $f(x,y,z) = xy\sin\frac{z}{2} - yz\sin\frac{x}{2}$. Naći $\frac{\partial f}{\partial x}(\pi,1,\pi)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\pi,1,\pi)$ i $\frac{\partial f}{\partial z}(\pi,1,\pi)$.

Rješenje.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y\sin\frac{z}{2} - \frac{1}{2}yz\cos\frac{x}{2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi,1,\pi) = \sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\pi\cos\frac{\pi}{2} = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x\sin\frac{z}{2} - z\sin\frac{x}{2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\pi,1,\pi) = \pi\sin\frac{\pi}{2} - \pi\sin\frac{\pi}{2} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{1}{2}xy\cos\frac{z}{2} - y\sin\frac{x}{2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\pi,1,\pi) = \frac{1}{2}\pi\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = -1.$$

5.4 Parcijalne derivacije drugog reda

Neka je $z = f(x,y)$ funkcija dviju varijabli za koju postoje parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$. Uočimo da su $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ funkcije dviju varijabli. Parcijalne derivacije tih funkcija po x i po y (ukoliko postoje) nazivamo *parcijalnim derivacijama drugog reda*. Dakle, to su funkcije $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)$, $\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)$, $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big)$ i $\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big)$. Za parcijalne derivacije drugog reda koriste se oznake:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Kažemo da su $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *mješovite parcijalne derivacije drugog reda* budući da se funkcija f parcijalno derivira najprije po jednoj, a zatim po drugoj varijabli. Općenito je $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Međutim, uz dodatne pretpostavke na funkciju f, postiže se jednakost njezinih mješovitih parcijalnih derivacija. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 5.4.1 (Schwarzov teorem)**.** *Neka je $z = f(x, y)$ realna funkcija dviju varijabli definirana na nekom otvorenom krugu $K \subseteq \mathbb{R}^2$. Pretpostavimo da postoje parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ u svakoj točki $(x, y) \in K$. Ako su funkcije $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ neprekidne na K, tada je*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \qquad (x, y) \in K.$$

Napomena. Mi ćemo u daljnjem raditi samo s funkcijama koje zadovoljavaju pretpostavke Schwarzovog teorema. Dakle, u svakoj će točki domene funkcije f njezine mješovite parcijalne derivacije biti jednake.

Primjer 5.4.2. Naći sve parcijalne derivacije prvog i drugog reda funkcije $f(x, y) = xy^2 + 3x + 2y + 1$.

Rješenje.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + 3,$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy + 2,$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 + 3) = 0,$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + 2) = 2x,$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y^2 + 3) = 2y,$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(2xy + 2) = 2y.$

Primjer 5.4.3. Naći sve parcijalne derivacije prvog i drugog reda funkcije $f(x,y) = xe^{xy}$.

Rješenje.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2e^{xy}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} + xye^{xy}) = ye^{xy} + ye^{xy} + xye^{xy}y = (2+xy)ye^{xy}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2e^{xy}) = x^3e^{xy}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(e^{xy} + xye^{xy}) = xe^{xy} + xe^{xy} + xye^{xy}x = (2+xy)xe^{xy}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^2e^{xy}) = 2xe^{xy} + x^2e^{xy}y = (2+xy)xe^{xy}$.

Primjer 5.4.4. Naći sve parcijalne derivacije prvog i drugog reda funkcije $f(x,y) = x^y$.

Rješenje.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1}$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(yx^{y-1}) = y(y-1)x^{y-2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^y \ln x) = x^y \ln x \ln x = x^y \ln^2 x$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = (1 + y\ln x)x^{y-1}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^y \ln x) = yx^{y-1}\ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = (1 + y\ln x)x^{y-1}$.

Primjer 5.4.5. Pokazati da funkcija $f(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x-y)$ zadovoljava valnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Rješenje.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x+y) - \sin(x-y)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(x+y) + \sin(x-y),$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\big(\cos(x+y) - \sin(x-y)\big) = -\sin(x+y) - \cos(x-y),$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\big(\cos(x+y) + \sin(x-y)\big) = -\sin(x+y) - \cos(x-y).$

Prema tome, vrijedi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

5.5 Diferencijabilnost funkcije i totalni diferencijal

U Matematici 1 uveli smo pojam derivacije realne funkcije jedne varijable. Derivacija funkcije $y = f(x)$ u točki x_0 definira se kao

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{43}$$

Označimo li s

$$\Delta f(x_0) := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

prirast funkcije f u točki x_0, tada se (43) može zapisati kao

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = 0.$$

Za derivabilnu funkciju $y = f(x)$ definirali smo diferencijal

$$df(x) = f'(x)dx.$$

(Pišemo još $dy = f'(x)dx$.) Uloga diferencijala je važna jer on aproksimira prirast funkcije f u točki x_0. Naime, ako je funkcija f derivabilna u točki x_0 tada se, za mali prirast varijable $dx = \Delta x$, prirast funkcije f u točki x_0 aproksimira diferencijalom $df(x_0) = f'(x_0)dx$ u točki x_0; dakle

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0).$$

Pojam derivacije može se poopćiti na realnu funkciju dviju varijabli. Neka je $z = f(x,y)$ realna funkcija dviju varijabli definirana na otvorenom krugu $K \subseteq \mathbb{R}^2$ sa središtem u točki $T(x_0, y_0)$.

Kažemo da je funkcija $z = f(x,y)$ *diferencijabilna* u točki $T(x_0, y_0)$ ako postoje $A, B \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f(x_0, y_0) - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0,$$

gdje je

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

prirast funkcije f u točki $T(x_0, y_0)$. Pokazuje se da ako takvi brojevi A i B postoje, oni su jedinstveni i iznose

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Prema tome, ako je f diferencijabilna funkcija u točki $T(x_0, y_0)$, tada postoje parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, te vrijedi

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Postojanje parcijalnih derivacija prvog reda funkcije f u točki $T(x_0, y_0)$ ne osigurava nužno i diferencijabilnost funkcije f u točki $T(x_0, y_0)$. Međutim, funkcija f čije su parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ definirane na K, te neprekidne u točki $T(x_0, y_0)$, je diferencijabilna u točki $T(x_0, y_0)$. Također, ako je funkcija f diferencijabilna u točki $T(x_0, y_0)$, onda je ona i neprekidna u toj točki.

Ako je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u točki $T(x_0, y_0)$, tada se *totalni diferencijal funkcije f u točki $T(x_0, y_0)$*, u oznaci $df(x_0, y_0)$, definira kao

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy,$$

gdje su dx i dy prirasti nezavisnih varijabli. Kao i u slučaju funkcija jedne varijable i ovdje se, za male priraste varijabli $dx = \Delta x$ i $dy = \Delta y$, prirast funkcije f u točki $T(x_0, y_0)$ aproksimira totalnim diferencijalom $df(x_0, y_0)$; dakle

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0).$$

Primjer 5.5.1. Naći totalni diferencijal sljedećih funkcija:

(a) $f(x, y) = x^2y + xy^5$,

(b) $f(x, y) = x\text{tg}(x + 2y)$,

(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rješenje.

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + y^5 = y(2x + y^4)$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 5xy^4 = x(x + 5y^4)$.

Stoga je

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = y(2x+y^4)dx + x(x+5y^4)dy.$$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{tg}(x+2y) + x\dfrac{1}{\cos^2(x+2y)} = \operatorname{tg}(x+2y) + \dfrac{x}{\cos^2(x+2y)}$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\dfrac{1}{\cos^2(x+2y)} \cdot 2 = \dfrac{2x}{\cos^2(x+2y)}$.
Stoga je

$$\begin{aligned} df(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy \\ &= \left(\operatorname{tg}(x+2y) + \frac{x}{\cos^2(x+2y)}\right)dx + \frac{2x}{\cos^2(x+2y)}\,dy. \end{aligned}$$

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
Stoga je

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$$

Primjer 5.5.2. Pomoću totalnog diferencijala procijeniti promjenu funkcije $f(x,y) = \ln(x+y^2)$ iz točke $(5,0)$ u točku $(2,-1)$.
Rješenje. Stavimo $x_0 = 5$, $y_0 = 0$. Tada je

$$dx = \Delta x = 2 - 5 = -3, \quad dy = \Delta y = -1 - 0 = -1.$$

Vrijedi $\Delta f(5,0) \approx df(5,0)$. Izračunajmo totalni diferencijal funkcije f u točki $(5,0)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x+y^2}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(5,0) = \dfrac{1}{5+0^2} = \dfrac{1}{5}$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x+y^2} \cdot 2y$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(5,0) = \dfrac{2 \cdot 0}{5+0^2} = 0$.
Stoga je

$$df(5,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(5,0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(5,0)dy = \frac{1}{5} \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) = -\frac{3}{5} = -0.6.$$

Prema tome, promjena $\Delta f(5,0)$ funkcije f iz točke $(5,0)$ u točku $(2,-1)$ procijenjena pomoću totalnog diferencijala iznosi $\Delta f(5,0) \approx df(5,0) = -0.6$.

S druge strane,

$$\begin{aligned}\Delta f(5,0) &= f(5-3, 0-1) - f(5,0) = f(2,-1) - f(5,0)\\ &= \ln 3 - \ln 5 = \ln \tfrac{3}{5} \approx -0.510825623,\end{aligned}$$

gdje je vrijednost $\ln \frac{3}{5}$ dobivena pomoću kalkulatora.

Primjer 5.5.3. Pomoću totalnog diferencijala procijeniti $\sqrt{125}\sqrt[4]{17}$.

Rješenje. Uvedimo funkciju

$$f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt[4]{y}.$$

Treba procijeniti vrijednost funkcije f u točki $(125, 17)$.

Stavimo $x_0 = 121$, $y_0 = 16$. Tada je $f(121,16) = \sqrt{121}\sqrt[4]{16} = 22$. Nadalje, $dx = \Delta x = 125 - 121 = 4$, $dy = \Delta y = 17 - 16 = 1$.

Izračunajmo totalni diferencijal funkcije f u točki $(121, 16)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt[4]{y}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(121,16) = \dfrac{1}{2\sqrt{121}}\sqrt[4]{16} = \dfrac{1}{11},$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x}\dfrac{1}{4\sqrt[4]{y^3}}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(121,16) = \sqrt{121}\dfrac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \dfrac{11}{32}.$

Stoga je

$$df(121,16) = \frac{\partial f}{\partial x}(121,16)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(121,16)dy = \frac{1}{11}\cdot 4 + \frac{11}{32}\cdot 1 = \frac{249}{352}.$$

Prema tome,

$$\Delta f(121,16) \approx df(121,16) = \frac{249}{352}.$$

Kako je

$$\Delta f(121,16) = f(121+4, 16+1) - f(121,16) = f(125,17) - 22,$$

to procjena vrijednosti $\sqrt{125}\sqrt[4]{17}$ pomoću totalnog diferencijala iznosi

$$f(125,17) = \Delta f(121,16) + 22 \approx df(121,16) + 22 = \frac{249}{352} + 22 \approx 22.70738636.$$

(Kalkulator daje $\sqrt{125}\sqrt[4]{17} \approx 22.70216296$.)

Primjer 5.5.4. Katete pravokutnog trokuta izmjerene s točnošću 0.1 cm iznose 7.5 cm i 18 cm. Pomoću totalnog diferencijala procijeniti pogrešku pri računanju hipotenuze.

Rješenje. Označimo li s x duljinu jedne, a s y duljinu druge katete, onda se hipotenuza pravokutnog trokuta računa po formuli

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Izmjerene duljine kateta su $x_0 = 7.5$ cm i $y_0 = 18$ cm. Točnost mjerenja znači da su moguće promjene varijabli $dx = \Delta x = 0.1$ cm i $dy = \Delta y = 0.1$ cm. Tada pogreška pri računanju hipotenuze iznosi $\Delta f(7.5, 18) \approx df(7.5, 18)$. Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(7.5,18) = \frac{7.5}{\sqrt{7.5^2+18^2}} = \frac{5}{13},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(7.5,18) = \frac{18}{\sqrt{7.5^2+18^2}} = \frac{12}{13},$$

slijedi

$$df(7.5,18) = \frac{\partial f}{\partial x}(7.5,18)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(7.5,18)dy = \frac{5}{13} \cdot 0.1 + \frac{12}{13} \cdot 0.1 = \frac{17}{130}.$$

Dakle,

$$\Delta f(7.5,18) \approx df(7.5,18) = \frac{17}{130} \approx 0.13 \text{ cm}.$$

5.6 Ekstremi funkcije dviju varijabli

Neka je $z = f(x,y)$ realna funkcija dviju varijabli definirana na nekom krugu

$$K\big((a,b);r\big) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\big\}$$

polumjera r sa središtem u točki (a,b).

Kažemo da je (a,b) *točka lokalnog maksimuma* funkcije f ako postoji $\delta > 0$ $(\delta \leq r)$, tako da je $f(a,b) \geq f(x,y)$ za sve točke $(x,y) \in K\big((a,b);\delta\big)$. Tada je $f(a,b)$ *lokalni maksimum* funkcije f.

Kažemo da je (a,b) *točka lokalnog minimuma* funkcije f ako postoji $\delta > 0$ $(\delta \leq r)$, tako da je $f(a,b) \leq f(x,y)$ za sve točke $(x,y) \in K\big((a,b);\delta\big)$. Tada je $f(a,b)$ *lokalni minimum* funkcije f.

Ako je $f(a,b) \geq f(x,y)$ za sve točke $(x,y) \in \mathcal{D}(f)$, kažemo da je (a,b) *točka* (*globalnog*) *maksimuma* funkcije f, a $f(a,b)$ (*globalni*) *maksimum* funkcije f. Ako je $f(a,b) \leq f(x,y)$ za sve točke $(x,y) \in \mathcal{D}(f)$, tada kažemo da je (a,b) *točka* (*globalnog*) *minimuma* funkcije f, a $f(a,b)$ (*globalni*) *minimum* funkcije f.

Točke lokalnih maksimuma odnosno lokalnih minimuma funkcije f nazivamo *točkama lokalnih ekstrema* funkcije f. Lokalne maksimume odnosno lokalne minimume funkcije f nazivamo *lokalnim ekstremima* funkcije f.

Točke (globalnih) maksimuma odnosno (globalnih) minimuma funkcije f nazivamo *točkama* (*globalnih*) *ekstrema* funkcije f. (Globalne) maksimume odnosno (globalne) minimume funkcije f nazivamo (*globalnim*) *ekstremima* funkcije f.

U Matematici 1 smo naučili da u točki c lokalnog ekstrema derivabilne funkcije f jedne varijable vrijedi

$$f'(c) = 0.$$

Za realne funkcije dviju varijabli imamo sljedeći rezultat.

Teorem 5.6.1 (nužni uvjeti za postojanje ekstrema)**.** *Ako je realna funkcija* $z = f(x,y)$ *diferencijabilna u točki lokalnog ekstrema* (a,b), *onda je* $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ *i* $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

Prema tome, da bismo našli točke lokalnih ekstrema funkcije f, potrebno je riješiti sustav jednadžbi

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array} \right. .$$

Svaka točka (a,b) koja je rješenje tog sustava zove se *stacionarna točka* funkcije f. Ako je (a,b) stacionarna točka funkcije f, to još uvijek ne znači da je (a,b) točka lokalnog ekstrema funkcije f. Naime, teorem 5.6.1 daje nam samo nužne uvjete za postojanje lokalnih ekstrema. Primjerice, funkcija

$$f(x,y) = xy,$$

definirana na cijelom skupu $\mathbb{R}^2$, ima parcijalne derivacije

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x.$$

Jedino rješenje sustava

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{cases},$$

tj. jedina stacionarna točka ove funkcije, je $(0,0)$. Međutim, $(0,0)$ nije točka lokalnog ekstrema funkcije f. Naime, u svakom krugu oko točke $(0,0)$ postoje točke u kojima funkcija f poprima veće vrijednosti od $f(0,0) = 0$, kao i točke u kojima f poprima manje vrijednosti od $f(0,0) = 0$. Zaista, na pravcu $y = x$ koji prolazi ishodištem $(0,0)$ leže točke (x,y) za koje je

$$f(x,y) = f(x,x) = x^2 > 0 = f(0,0), \quad (x \neq 0),$$

dok na pravcu $y = -x$, koji također prolazi ishodištem $(0,0)$, leže točke (x,y) za koje je

$$f(x,y) = f(x,-x) = -x^2 < 0 = f(0,0), \quad (x \neq 0).$$

Sljedeći teorem daje nam dovoljne uvjete koji će osigurati da stacionarna točka funkcije f ujedno bude i točka lokalnog ekstrema te funkcije.

Teorem 5.6.2 (dovoljni uvjeti za postojanje ekstrema)**.** *Pretpostavimo da realna funkcija $z = f(x,y)$ ima neprekidne parcijalne derivacije drugog reda na nekom otvorenom krugu sa središtem u točki (a,b). Pretpostavimo da je (a,b) stacionarna točka funkcije f, tj. da vrijedi $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$. Stavimo*

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\right)^2.$$

(a) *Ako je $D > 0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, tada je (a,b) točka lokalnog maksimuma funkcije f.*

(b) *Ako je $D > 0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, tada je (a,b) točka lokalnog minimuma funkcije f.*

(c) *Ako je $D < 0$, tada (a,b) nije točka lokalnog ekstrema funkcije f.*

Napomena. Primijetimo da je

$$D > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\right)^2.$$

Stoga, ako je $D > 0$, brojevi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ su različiti od nule, a istog su predznaka. To nam govori da se u tvrdnji (a) teorema 5.6.2 uvjet $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$ može zamijeniti uvjetom $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) < 0$, i isto tako se u tvrdnji (b) teorema 5.6.2 uvjet $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ može zamijeniti uvjetom $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) > 0$.

Nadalje, uočimo da teorem 5.6.2 ne kaže ništa o postojanju ekstrema kada je $D = 0$. U tom slučaju su potrebna dodatna ispitivanja kojima se nećemo baviti.

Primjer 5.6.3. Naći lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 5x + y + 2$.

Rješenje. Uočiimo da je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Najprije ćemo naći stacionarne točke funkcije f. Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y + 5,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y + 1,$$

to su stacionarne točke funkcije f rješenje sustava jednadžbi

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y + 5 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{array}\right. .$$

Ovaj sustav ima jedinstveno rješenje $(-3,1)$, pa je $T(-3,1)$ jedina stacionarna točka funkcije f. Da bismo provjerili radi li se o točki lokalnog ekstrema, naći ćemo parcijalne derivacije drugog reda funkcije f, te zatim primijeniti teorem 5.6.2. Dakle,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x + y + 5) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x + 2y + 1) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x + y + 5) = 1,$$

pa je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3,1) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-3,1) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-3,1) = 1.$$

Stoga je

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3,1) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-3,1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-3,1)\right)^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3.$$

Budući da je $D > 0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3,1) > 0$, to je $T(-3,1)$ točka lokalnog minimuma funkcije f. Lokalni minimum iznosi $f(-3,1) = -5$.

Primjer 5.6.4. Naći lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = 2y^3 + xy^2 + x^2 + 5x$.

Rješenje. Uočimo da je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Nađimo najprije stacionarne točke funkcije f. Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 2x + 5,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y^2 + 2xy,$$

to su stacionarne točke funkcije f rješenje sustava jednadžbi

$$\begin{cases} y^2 + 2x + 5 = 0 \\ 6y^2 + 2xy = 0 \end{cases}.$$

Izlučimo li $2y$ iz druge jednadžbe, imamo

$$2y(3y + x) = 0,$$

pa je $y = 0$ ili $3y + x = 0$.

U prvom slučaju, uvrštavanjem $y = 0$ u prvu jednadžbu sustava dobijemo $0^2 + 2x + 5 = 0$, odnosno $x = -\frac{5}{2}$. Stoga je $T_1(-\frac{5}{2}, 0)$ stacionarna točka funkcije f.

Ako je $3y + x = 0$, onda se supstitucijom $x = -3y$ u prvu jednadžbu sustava dobije $y^2 + 2 \cdot (-3y) + 5 = 0$, tj. $y^2 - 6y + 5 = 0$. Ova kvadratna jednadžba ima dva realna rješenja $y_1 = 1$ i $y_2 = 5$. Za $y_1 = 1$ imamo $x_1 = -3y_1 = -3$, a za $y_2 = 5$ dobije se $x_2 = -3y_2 = -15$. Stoga su $T_2(-3,1)$ i $T_3(-15,5)$ još dvije stacionarne točke funkcije f.

Da bismo provjerili radi li se o točkama lokalnih ekstrema, trebamo izračunati parcijalne derivacije drugog reda funkcije f, te zatim na svaku stacionarnu točku posebno primijeniti teorem 5.6.2. Dakle,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 + 2x + 5) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(6y^2 + 2xy) = 12y + 2x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + 2x + 5) = 2y.$$

Za točku $T_1(-\frac{5}{2}, 0)$ je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{5}{2}, 0\right) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{5}{2}, 0\right) = 12 \cdot 0 + 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -5,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(-\frac{5}{2}, 0\right) = 2 \cdot 0 = 0,$$

pa je

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{5}{2}, 0\right) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{5}{2}, 0\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(-\frac{5}{2}, 0\right)\right)^2 = 2 \cdot (-5) - 0^2 = -10.$$

Kako je $D < 0$, to $T_1(-\frac{5}{2}, 0)$ nije točka lokalnog ekstrema funkcije f.

Za točku $T_2(-3, 1)$ dobije se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3, 1) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-3, 1) = 12 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-3, 1) = 2 \cdot 1 = 2,$$

pa je

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3, 1) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-3, 1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-3, 1)\right)^2 = 2 \cdot 6 - 2^2 = 8.$$

Kako je $D > 0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3, 1) > 0$, zaključujemo da je $T_2(-3, 1)$ točka lokalnog minimuma funkcije f. Lokalni minimum iznosi $f(-3, 1) = -7$.

Konačno, za točku $T_3(-15, 5)$ imamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-15, 5) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-15, 5) = 12 \cdot 5 + 2 \cdot (-15) = 30,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-15, 5) = 2 \cdot 5 = 10,$$

pa je

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-15, 5) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-15, 5) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-15, 5)\right)^2 = 2 \cdot 30 - 10^2 = -40.$$

Budući da je $D < 0$, zaključujemo da $T_3(-15, 5)$ nije točka lokalnog ekstrema funkcije f.

Primjer 5.6.5. Naći lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x+y^2-2y+1)$.
Rješenje. Uočimo da je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Parcijalne derivacije prvog reda funkcije f su

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2-2y+1) + e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2-2y+3),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(2y-2).$$

Stacionarne točke funkcije f su rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2-2y+3) &= 0 \\ e^{\frac{x}{2}}(2y-2) &= 0 \end{cases}.$$

Uočimo

$$e^{\frac{x}{2}}(2y-2) = 0 \Leftrightarrow 2y-2 = 0 \Leftrightarrow y = 1.$$

Uvrstimo li $y = 1$ u prvu jednadžbu sustava, dobit ćemo

$$e^{\frac{x}{2}}(x+1^2-2\cdot 1+3) = e^{\frac{x}{2}}(x+2) = 0,$$

odakle slijedi $x = -2$. Prema tome, $T(-2,1)$ je jedina stacionarna točka funkcije f.

Parcijalne derivacije drugog reda funkcije f su:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2-2y+3) + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2-2y+5),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2e^{\frac{x}{2}},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(2y-2) = e^{\frac{x}{2}}(y-1).$$

Stoga je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,1) = \frac{1}{2e}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,1) = \frac{2}{e}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-2,1) = 0,$$

pa je

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,1) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-2,1)\right)^2 = \frac{1}{2e}\cdot\frac{2}{e} - 0^2 = \frac{1}{e^2}.$$

Kako je $D > 0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,1) > 0$, to je $T(-2,1)$ točka lokalnog minimuma funkcije f. Lokalni minimum iznosi $f(-2,1) = -\frac{2}{e}$.

Primjer 5.6.6. Naći lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = (x+1)\sqrt{y-1} - x^2 + x - y \quad (y > 1)$.

Rješenje. Uočimo da je $\mathcal{D}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 1\right\}$. Parcijalne derivacije prvog reda funkcije f su

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{y-1} - 2x + 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-1}} - 1 = \frac{x+1}{2\sqrt{y-1}} - 1.$$

Stacionarne točke funkcije f su rješenja sustava jednadžbi

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sqrt{y-1} - 2x + 1 & = & 0 \\ \dfrac{x+1}{2\sqrt{y-1}} - 1 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Iz prve jednadžbe sustava dobije se $\sqrt{y-1} = 2x - 1$. Zamijenimo li $\sqrt{y-1}$ s $2x-1$ u drugoj jednadžbi sustava, imamo

$$\frac{x+1}{2(2x-1)} - 1 = 0,$$

odakle slijedi $x + 1 = 2(2x-1)$, tj. $x = 1$. Sada je $\sqrt{y-1} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, pa je $y = 2$. Prema tome, $T(1,2)$ je stacionarna točka funkcije f.

Parcijalne derivacije drugog reda funkcije f su:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{0 \cdot \sqrt{y-1} - (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-1}}}{y-1} = -\frac{x+1}{4(y-1)\sqrt{y-1}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y-1}}.$$

Odavde slijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,2) = \frac{1}{2},$$

pa je

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,2)\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Budući da je $D > 0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) < 0$, to je $T(1,2)$ točka lokalnog maksimuma funkcije f. Lokalni maksimum iznosi $f(1,2) = 0$.

Primjer 5.6.7. Ispitati s obzirom na lokalne ekstreme funkciju $f(x,y) = (x-3)\ln(xy)$.

Rješenje. Ova funkcija je dobro definirana u svim točkama (x,y) za koje je $xy > 0$, pa je

$$\mathcal{D}(f) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \text{ i } y > 0) \text{ ili } (x < 0 \text{ i } y < 0)\big\}.$$

Parcijalne derivacije prvog reda funkcije f su

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(xy) + (x-3)\cdot\frac{1}{xy}\cdot y = \ln(xy) - \frac{3}{x} + 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x-3)\frac{1}{xy}\cdot x = \frac{x-3}{y}.$$

Stacionarne točke funkcije f su rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} \ln(xy) - \dfrac{3}{x} + 1 &= 0 \\ \dfrac{x-3}{y} &= 0 \end{cases}.$$

Iz druge jednadžbe slijedi $x = 3$, pa se uvrštavanjem $x = 3$ u prvu jednadžbu dobije $\ln(3y) = 0$. Dakle, $3y = 1$, tj. $y = \frac{1}{3}$. Prema tome, $T(3, \frac{1}{3})$ je stacionarna točka funkcije f.

Parcijalne derivacije drugog reda funkcije f su:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{xy}\cdot y + \frac{3}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{x-3}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{1}{xy}\cdot x = \frac{1}{y}.$$

Odavde je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(3, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(3, \frac{1}{3}\right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(3, \frac{1}{3}\right) = 3,$$

pa je

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(3, \frac{1}{3}\right)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(3, \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(3, \frac{1}{3}\right)\right)^2 = -9.$$

Kako je $D < 0$, to $T(3, \frac{1}{3})$ nije točka lokalnog ekstrema funkcije f. Prema tome, f nema lokalnih ekstrema.

6 Dvostruki integral

6.1 Pojam dvostrukog integrala

U prvom poglavlju uveli smo pojam određenog integrala $\int_a^b f(x)dx$ omeđene funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Prisjetimo se da u slučaju nenegativne funkcije f, broj $\int_a^b f(x)dx$ predstavlja površinu lika u xy-ravnini omeđenog grafom funkcije $y = f(x)$, pravcima $x = a$ i $x = b$, te osi x. Pojam određenog integrala proširit ćemo na realne funkcije dviju varijabli.

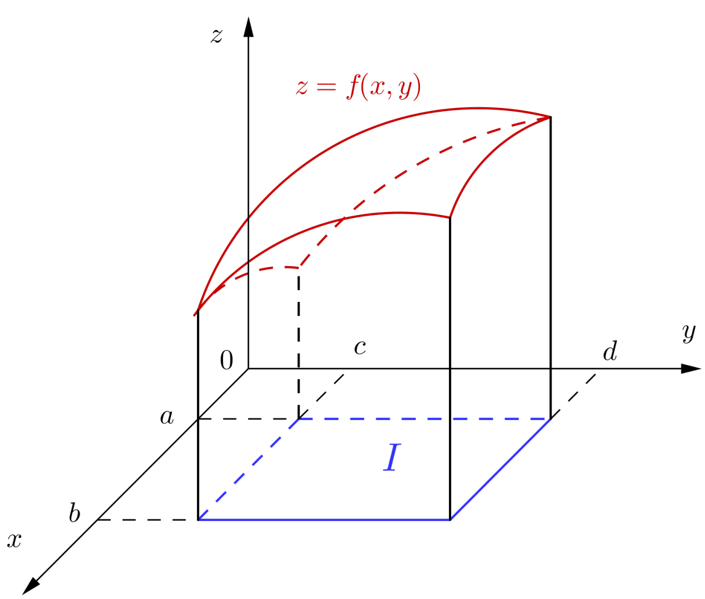
Neka je sada na pravokutniku

$$I = [a,b] \times [c,d] := \big\{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\big\} \subset \mathbb{R}^2$$

zadana realna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ dviju varijabli. Za funkciju f pretpostavljamo da je *omeđena*, što znači da postoje realni brojevi m i M takvi da je

$$m \le f(x,y) \le M$$

za sve $(x,y) \in I$. Želimo definirati integral koji će u slučaju nenegativne funkcije f predstavljati volumen tijela omeđenog odozgo plohom $z = f(x,y)$, a odozdo pravokutnikom $I = [a,b] \times [c,d]$ (v. sliku 123).



Slika 123: Tijelo omeđeno odozgo plohom $z = f(x,y)$, a odozdo pravokutnikom $I = [a,b] \times [c,d]$

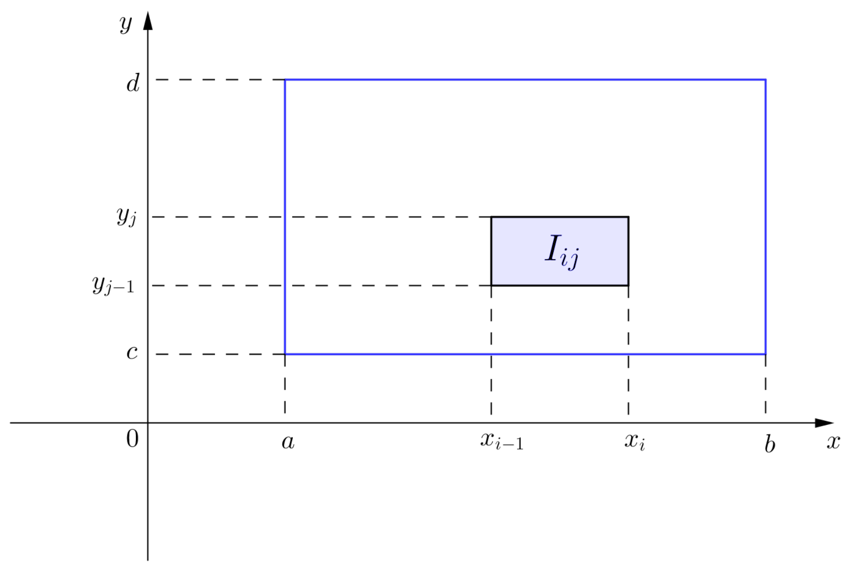
Postupamo kao i u slučaju realne funkcije jedne varijable. Neka je $\Delta_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ razdioba segmenta $[a, b]$, a $\Delta_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ razdioba segmenta $[c, d]$. Kartezijev umnožak

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 = \big\{(x_i, y_j) : x_i \in \Delta_1,\, y_j \in \Delta_2,\; i = 0, \ldots, m,\, j = 0, \ldots, n\big\}$$

nazivamo *razdiobom* pravokutnika I. Ovom je razdiobom pravokutnik I podijeljen na mn pravokutnika

$$I_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \ldots, m,\; j = 1, \ldots, n,$$

kao što je prikazano na slici 124.



Slika 124: Razdioba pravokutnika $I = [a, b] \times [c, d]$

Označimo s

$$P(I_{ij}) := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \quad i = 1, \ldots, m,\; j = 1, \ldots, n$$

površinu pravokutnika I_{ij}, a s $P(I) := (b - a)(d - c)$ površinu pravokutnika I. Tada je

$$P(I) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P(I_{ij}).$$

Stavimo

$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in I_{ij}} f(x,y), \quad M_{ij} = \sup_{(x,y)\in I_{ij}} f(x,y), \quad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n.$$

Tada je

$$m \le m_{ij} \le M_{ij} \le M, \quad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n.$$

Na svakom pravokutniku I_{ij} uzmimo jednu proizvoljnu točku $(s_i,t_j)\in I_{ij}$. Očito je

$$m_{ij} \le f(s_i,t_j) \le M_{ij}, \quad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n.$$

Sada ćemo, kao i u slučaju funkcije jedne varijable, definirati sljedeće zbrojeve:

$$s_\Delta := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}P(I_{ij}), \quad S_\Delta := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}P(I_{ij}),$$

$$\sigma_\Delta := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(s_i,t_j)P(I_{ij}).$$

Ovdje s_Δ nazivamo *donjim integralnim zbrojem*, S_Δ *gornjim integralnim zbrojem*, a σ_Δ *integralnim zbrojem* funkcije f.

Kako je za sve $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$

$$m \le m_{ij} \le f(s_i,t_j) \le M_{ij} \le M,$$

to je

$$mP(I) = m\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P(I_{ij}) \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}P(I_{ij}) \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(s_i,t_j)P(I_{ij})$$

$$\le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}P(I_{ij}) \le M\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P(I_{ij}) = MP(I),$$

odnosno

$$mP(I) \le s_\Delta \le \sigma_\Delta \le S_\Delta \le MP(I) \tag{44}$$

za svaku razdiobu Δ pravokutnika I. Stoga su dobro definirani brojevi

$$\mathcal{I}_* := \sup\big\{s_\Delta :\ \Delta \text{ razdioba pravokutnika } I\big\},$$

$$\mathcal{I}^* := \inf\big\{S_\Delta :\ \Delta \text{ razdioba pravokutnika } I\big\}.$$

Broj $\mathcal{I}_*$ nazivano *donjim Riemannovim integralom*, a broj $\mathcal{I}^*$ *gornjim Riemannovim integralom* funkcije f.

Kažemo da razdioba $\Delta' = \Delta_1' \times \Delta_2'$ *profinjuje* razdiobu $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$, i pišemo $\Delta \subseteq \Delta'$, ako je $\Delta_1 \subseteq \Delta_1'$ i $\Delta_2 \subseteq \Delta_2'$. Tada se, kao i u slučaju funkcija jedne varijable, pokazuje da vrijedi

$$s_\Delta \leq s_{\Delta'} \leq S_{\Delta'} \leq S_\Delta.$$

Odavde slijedi da za svake dvije razdiobe $\Delta' = \Delta_1' \times \Delta_2'$ i $\Delta'' = \Delta_1'' \times \Delta_2''$ vrijedi

$$s_{\Delta'} \leq S_{\Delta''}. \tag{45}$$

(Naime, stavimo li $\Delta_1 := \Delta_1' \cup \Delta_1''$ i $\Delta_2 := \Delta_2' \cup \Delta_2''$, tada je $\Delta := \Delta_1 \times \Delta_2$ profinjenje razdioba Δ' i Δ''. Stoga je $s_{\Delta'} \leq s_\Delta \leq S_\Delta \leq S_{\Delta''}$.)
Iz (45) slijedi

$$\mathcal{I}_* \leq \mathcal{I}^*.$$

Za omeđenu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je *integrabilna* (u Riemannovom smislu) na pravokutniku $I \subset \mathbb{R}^2$ ako je

$$\mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*.$$

Broj $\mathcal{I} := \mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$ zovemo *dvostrukim integralom* funkcije f na pravokutniku I i pišemo

$$\mathcal{I} = \iint_I f(x, y) dx dy.$$

Ovdje f nazivamo *podintegralnom funkcijom*, I *područjem integracije*, a $dxdy$ *elementom površine*.

Ako je funkcija f integrabilna na pravokutniku I, tada za svaku razdiobu Δ pravokutnika I vrijedi

$$s_\Delta \leq \iint_I f(x, y) dx dy \leq S_\Delta. \tag{46}$$

Štoviše, pokazuje se da je omeđena funkcija f integrabilna na pravokutniku I ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razdioba Δ pravokutnika I takva da je

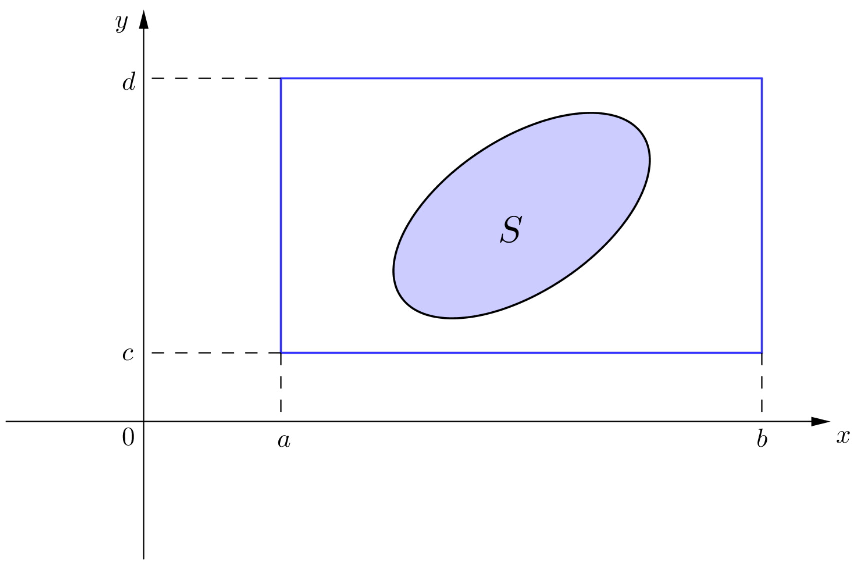
$$S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon. \tag{47}$$

Iz (44), (46) i (47) zaključujemo da za integrabilnu funkciju f na pravokutniku $I = [a, b] \times [c, d]$ postoje razdiobe $\Delta_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ segmenta $[a, b]$

i $\Delta_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ segmenta $[c, d]$, te točke $(s_i, t_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, takve da vrijedi

$$\iint_I f(x, y)dxdy \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(s_i, t_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Neka je sada funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ definirana na nekom omeđenom skupu $S \subset \mathbb{R}^2$, koji nije pravokutnik. Pretpostavimo da je f *omeđena* na skupu S. Dvostruki integral funkcije f na skupu S definiramo na sljedeći način. Budući da je skup S omeđen, to postoji pravokutnik $I = [a, b] \times [c, d]$ koji ga sadrži (slika 125).



Slika 125: Područje integracije S

Funkciju f zatim proširimo do funkcije $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ definirane na pravokutniku I formulom

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{ako } (x, y) \in S; \\ 0, & \text{ako } (x, y) \in I \setminus S. \end{cases}$$

Kako je funkcija f omeđena na skupu S, jasno je da je $\tilde{f}$ omeđena na pravokutniku I.

Ako je funkcija $\tilde{f}$ integrabilna na pravokutniku I, tada se *dvostruki integral* funkcije f na skupu S definira kao

$$\iint_S f(x, y)dxdy := \iint_I \tilde{f}(x, y)dxdy.$$

Svojstva dvostrukog integrala

Neka su funkcije $f : S \to \mathbb{R}$ i $g : S \to \mathbb{R}$ integrabilne na omeđenom skupu $S \subset \mathbb{R}^2$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.

(a) $\displaystyle\iint_S \big(f(x,y) + g(x,y)\big)dxdy = \iint_S f(x,y)dxdy + \iint_S g(x,y)dxdy.$

(b) $\displaystyle\iint_S kf(x,y)dxdy = k \iint_S f(x,y)dxdy \quad (k \in \mathbb{R}).$

(c) Ako je $f(x,y) \leq g(x,y)$ za sve $(x,y) \in S$, tada je

$$\iint_S f(x,y)dxdy \leq \iint_S g(x,y)dxdy.$$

6.2 Računanje dvostrukog integrala

Računanje dvostrukog integrala je teško ako koristimo samo njegovu definiciju. Dvostruki integral može se računati primjenom *Fubinijevog teorema*, koji kaže da se računanje dvostrukog integrala zapravo svodi na računanje dvaju "jednostrukih" integrala realne funkcije jedne realne varijable. Mi ćemo pritom za područje integracije uzimati skup S koji će imati jedan od sljedećih oblika:

(i) S je pravokutnik;

(ii) $S = \big\{(x,y) : a \leq x \leq b,\, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\big\}$, pri čemu su $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije takve da je $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ za svaki $x \in [a,b]$;

(iii) $S = \big\{(x,y) : c \leq y \leq d,\, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\big\}$, pri čemu su $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije takve da je $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ za svaki $y \in [c,d]$.

Slučaj (i) je najjednostavniji, a iako je sadržan i u (ii) i u (iii), posebno ćemo ga razmotriti.

Ako je funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna na skupu S, tada postoji

$$\iint_S f(x,y)dxdy.$$

Također, ako je $f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna na skupu $S = S_1 \cup S_2$, gdje su S_1 i S_2 skupovi oblika (i), (ii) ili (iii), koji su pritom ili disjunktni ili se sijeku samo po rubu, tada postoji $\iint_S f(x,y)dxdy$, a računa se kao

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_{S_1} f(x,y)dxdy + \iint_{S_2} f(x,y)dxdy.$$

Razmotrimo redom svaki od slučajeva (i), (ii) i (iii).

(i) Neka je $S = [a, b] \times [c, d]$, te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada se $\iint_S f(x, y)dxdy$ računa ovako. Za dani $x \in [a, b]$ promatramo funkciju $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ jedne varijable definiranu s

$$g(y) := f(x, y),$$

te zatim izračunamo određeni integral $\int_c^d g(y)dy$. Ako s $y \mapsto G(y) = F(x, y)$ označimo neku primitivnu funkciju funkcije g, tada je po Newton–Leibnizovoj formuli

$$\int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d g(y)dy = G(y)\Big|_{y=c}^{y=d} = F(x, y)\Big|_{y=c}^{y=d} = F(x, d) - F(x, c).$$

Drugim riječima, f smo promatrali kao funkciju koja ovisi samo o varijabli y, te ju integrirali na segmentu $[c, d]$. Dakle, pri integraciji smo x smatrali konstantom. Kao rezultat ovog "jednostrukog" integriranja dobili smo izraz $F(x, d) - F(x, c)$ koji ovisi samo o x. Sada uvodimo funkciju $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ jedne varijable definiranu s

$$h(x) := F(x, d) - F(x, c).$$

Da bismo izračunali dvostruki integral funkcije f na pravokutniku S, preostaje funkciju h integrirati po x na segmentu $[a, b]$. Dakle,

$$\iint_S f(x, y)dxdy = \int_a^b h(x)dx.$$

Prema tome,

$$\iint_S f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

Također, pišemo

$$\iint_S f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy,$$

smatrajući pritom da funkciju f najprije integriramo po y na segmentu $[c, d]$, a zatim dobiveni izraz, koji ovisi samo o x, integriramo po x na segmentu $[a, b]$.

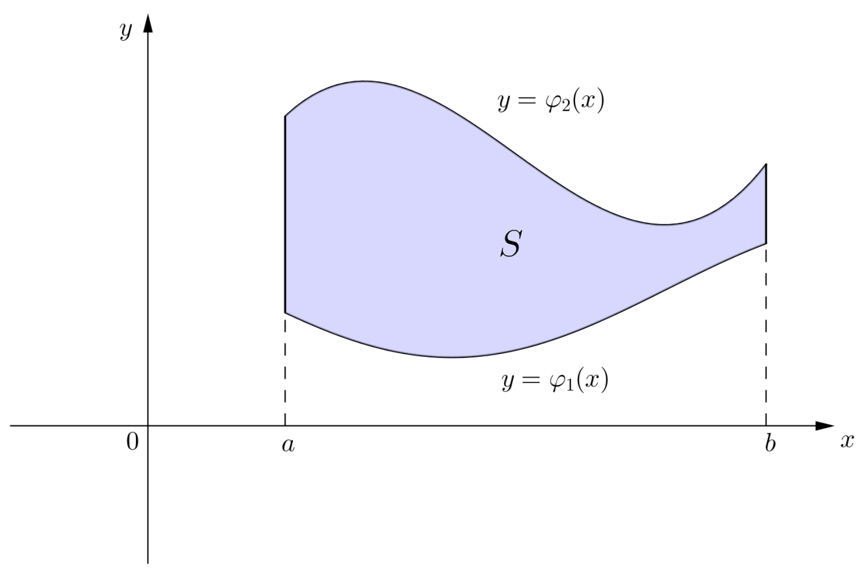
Do istog rezultata bismo došli da smo krenuli obrnutim redoslijedom, tj. funkciju f najprije integrirali po x na segmentu $[a, b]$ (pritom y smatramo konstantom), a zatim dobiveni izraz, koji ovisi samo o y, integrirali po y na segmentu $[c, d]$. Dakle,

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

i u ovom slučaju pišemo

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

(ii) Neka je $S = \big\{(x,y) : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\big\}$, pri čemu su $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije takve da je $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ za svaki $x \in [a,b]$ (slika 126).



Slika 126: Područje integracije $S = \{(x,y) :\ a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$

Tada se dvostruki integral neprekidne funkcije f na skupu S računa tako da se najprije izračuna "jednostruki" integral

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

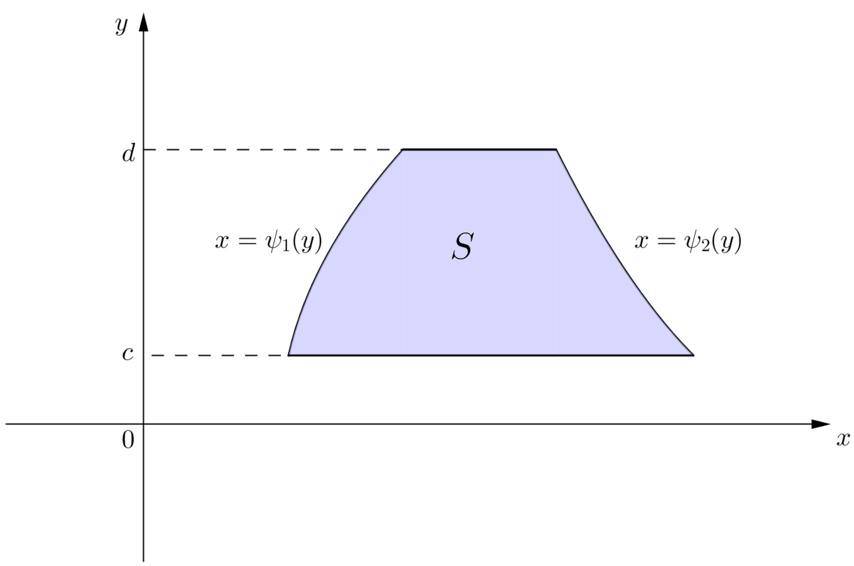
To znači da se funkcija f integrira po y na segmentu $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$, pri čemu $x \in [a, b]$ smatramo konstantom. Dobiveni izraz ovisit će samo o x i on se zatim integrira po x na segmentu $[a, b]$. Prema tome,

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Pišemo

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

(iii) Neka je $S = \big\{(x,y) : c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\big\}$, pri čemu su $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije takve da je $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ za svaki $y \in [c,d]$ (slika 127).



Slika 127: Područje integracije $S = \{(x,y) :\ c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$

Dvostruki integral neprekidne funkcije f na skupu S računamo tako da najprije funkciju f integriramo po x na segmentu $[\psi_1(y), \psi_2(y)]$, tj. izračunamo

$$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx,$$

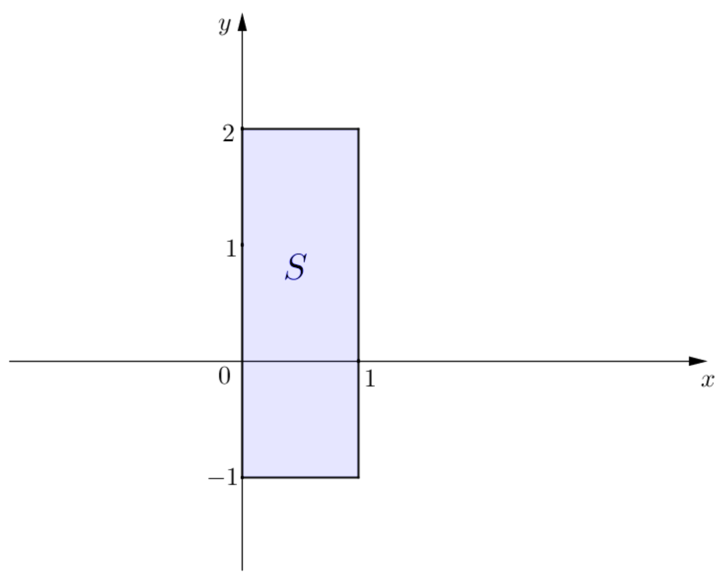
pri čemu $y \in [c,d]$ smatramo konstantom. Dobiveni izraz je funkcija koja ovisi samo o y i nju zatim integriramo po y na segmentu $[c,d]$. Prema tome,

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Pišemo

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Primjer 6.2.1. Izračunati $\iint_S (4x + 2x^2y)dxdy$, gdje je $S = [0,1] \times [-1,2]$.
Rješenje. Područje integracije S je pravokutnik skiciran na slici 128.



Slika 128: Područje integracije $S = [0,1] \times [-1,2]$

Funkciju $f(x,y) = 4x + 2x^2y$ najprije ćemo integrirati po y na segmentu $[-1,2]$, a zatim ćemo dobiveni izraz koji ovisi samo o x integrirati po x na segmentu $[0,1]$. Dakle,

$$\begin{aligned} \iint_S (4x + 2x^2y)dxdy &= \int_0^1 dx \int_{-1}^2 (4x + 2x^2y)dy \\ &= \int_0^1 (4xy + x^2y^2)\Big|_{y=-1}^{y=2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \big((8x+4x^2)-(-4x+x^2)\big)dx \\
&= \int_0^1 (3x^2+12x)dx = (x^3+6x^2)\Big|_0^1 = 1+6=7.
\end{aligned}$$

Dvostruki integral funkcije f na skupu S možemo izračunati i na način da funkciju f najprije integriramo po x na segmentu $[0,1]$, a zatim dobiveni izraz koji ovisi samo o y integriramo po y na segmentu $[-1,2]$. Kako rezultat ne ovisi o redoslijedu integracije, i u ovom će slučaju vrijednost dvostrukog integrala biti 7. Provjerimo to.

$$\begin{aligned}
\iint_S (4x+2x^2y)dxdy &= \int_{-1}^2 dy \int_0^1 (4x+2x^2y)dx \\
&= \int_{-1}^2 \left(2x^2+\frac{2}{3}x^3y\right)\Big|_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_{-1}^2 \left(2+\frac{2}{3}y-0\right)dy = \left(2y+\frac{1}{3}y^2\right)\Big|_{-1}^2 \\
&= \left(4+\frac{4}{3}\right)-\left(-2+\frac{1}{3}\right)=7.
\end{aligned}$$

Primjer 6.2.2. Izračunati $\iint_S e^{x-y}dxdy$, gdje je $S=[-3,2]\times[1,5]$.

Rješenje. Integriramo li funkciju $f(x,y)=e^{x-y}$ najprije po y na segmentu $[1,5]$, a zatim dobiveni izraz po x na segmentu $[-3,2]$, imamo

$$\begin{aligned}
\iint_S e^{x-y}dxdy &= \int_{-3}^2 dx \int_1^5 e^{x-y}dy \\
&= \int_{-3}^2 (-e^{x-y})\Big|_{y=1}^{y=5} dx \\
&= \int_{-3}^2 (-e^{x-5}+e^{x-1})dx \\
&= (-e^{x-5}+e^{x-1})\Big|_{-3}^2 = (-e^{-3}+e)-(-e^{-8}+e^{-4}) \\
&= e+e^{-8}-e^{-3}-e^{-4}.
\end{aligned}$$

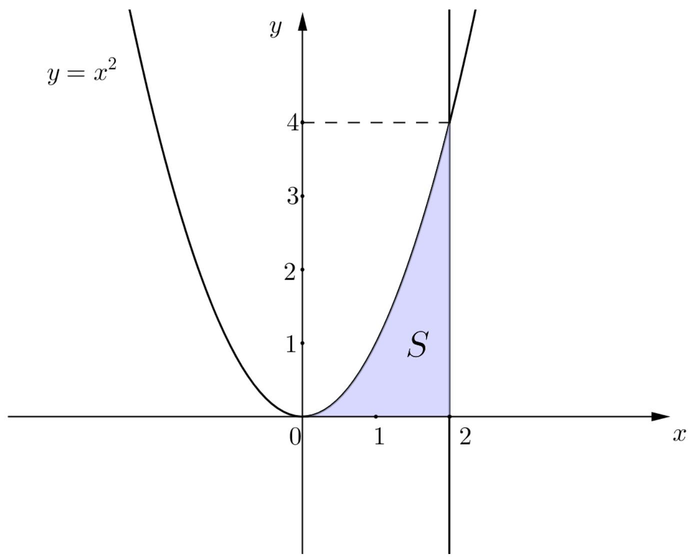
Pokažimo i da promjenom redoslijeda integracije dobivamo isti rezultat.

$$\begin{aligned}
\iint_S e^{x-y}dxdy &= \int_1^5 dy \int_{-3}^2 e^{x-y}dx \\
&= \int_1^5 e^{x-y}\Big|_{x=-3}^{x=2} dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^5 (e^{2-y} - e^{-3-y})dy \\
&= (-e^{2-y} + e^{-3-y})\Big|_1^5 = (-e^{-3} + e^{-8}) - (-e + e^{-4}) \\
&= e + e^{-8} - e^{-3} - e^{-4}.
\end{aligned}
$$

Primjer 6.2.3. Izračunati $\iint_S (3x-4y)dxdy$, gdje je područje integracije S omeđeno parabolom $y = x^2$, pravcem $x = 2$ i osi x.

Rješenje. Područje integracije S skicirano je na slici 129.



Slika 129: Područje integracije $S = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\}$

Dakle, $S = \big\{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\big\}$, gdje je $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = x^2$. Stoga je

$$
\begin{aligned}
\iint_S (3x-4y)dxdy &= \int_0^2 dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (3x-4y)dy \\
&= \int_0^2 dx \int_0^{x^2} (3x-4y)dy \\
&= \int_0^2 (3xy - 2y^2)\Big|_{y=0}^{y=x^2} dx \\
&= \int_0^2 (3x^3 - 2x^4)dx \\
&= \left(\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{5}x^5\right)\Big|_0^2 = 12 - \frac{64}{5} = -\frac{4}{5}.
\end{aligned}
$$

Osim na provedeni način, ovaj zadatak možemo riješiti i tako da podintegralnu funkciju integriramo najprije po x, a zatim po y. Naime, uočimo da se područje integracije S može zapisati kao

$$S = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 4,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

gdje je $\psi_1(y) = \sqrt{y}$, $\psi_2(y) = 2$. Stoga je

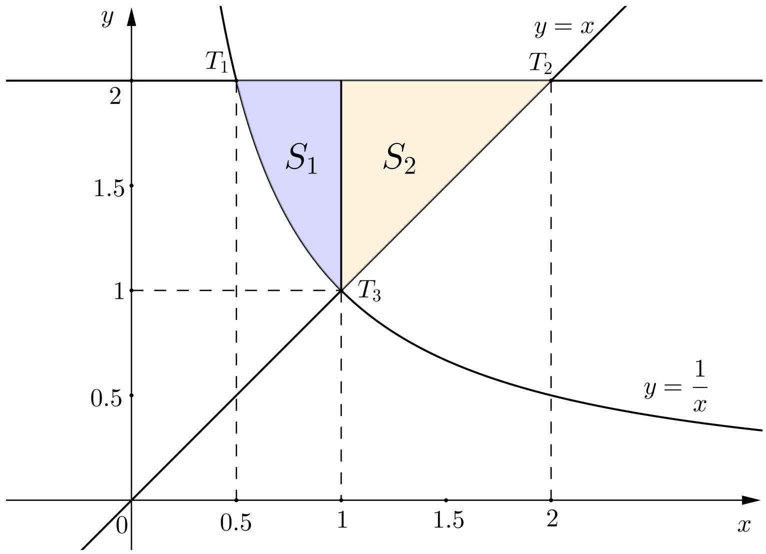
$$\begin{aligned}
\iint_S (3x - 4y)dxdy &= \int_0^4 dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} (3x - 4y)dx \\
&= \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{2} (3x - 4y)dx \\
&= \int_0^4 \left(\frac{3}{2}x^2 - 4xy\right)\Bigg|_{x=\sqrt{y}}^{x=2} dx \\
&= \int_0^4 \left((6 - 8y) - \left(\frac{3}{2}y - 4y\sqrt{y}\right)\right) dy \\
&= \int_0^4 \left(6 - \frac{19}{2}y + 4y^{\frac{3}{2}}\right) dy \\
&= \left(6y - \frac{19}{4}y^2 + \frac{8}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^4 = -\frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Primjer 6.2.4. Izračunati $\iint_S \frac{y}{x^2}dxdy$, gdje je područje integracije S omeđeno krivuljama $xy = 1$, $y = x$ i $y = 2$.

Rješenje. Nađimo točke presjeka danih krivulja. Hiperbola $xy = 1$ i pravac $y = 2$ sijeku se u točki $T_1(\frac{1}{2}, 2)$. Pravci $y = 2$ i $y = x$ sijeku se u točki $T_2(2, 2)$. Preostaje naći presjek hiperbole $xy = 1$ i pravca $y = x$. Uvrstimo li $y = x$ u jednadžbu $xy = 1$, imamo $x^2 = 1$, tj. $x = \pm 1$. Stoga se ove dvije krivulje sijeku u točkama $T_3(1, 1)$ i $T_4(-1, -1)$, s tim da točka T_4 ne pripada području integracije S.

Ovaj zadatak također možemo riješiti na dva načina. U prvom slučaju, tj. kada se podintegralna funkcija integrira najprije po y, a zatim po x, područje integracije S moramo podijeliti na dva područja S_1 i S_2, gdje je S_1 omeđeno hiperbolom $y = \frac{1}{x}$, te pravcima $x = 1$ i $y = 2$, a područje S_2 pravcima $x = 1$, $y = x$ i $y = 2$ (slika 130). Dakle,

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left\{(x, y) : \frac{1}{2} \leq x \leq 1,\ \frac{1}{x} \leq y \leq 2\right\}, \\
S_2 &= \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq 2\}.
\end{aligned}$$



Slika 130: Područje integracije $S = S_1 \cup S_2$

Kako je $S = S_1 \cup S_2$, to se $\iint_S \frac{y}{x^2} dxdy$ računa kao zbroj dvaju dvostrukih integrala. Dakle,

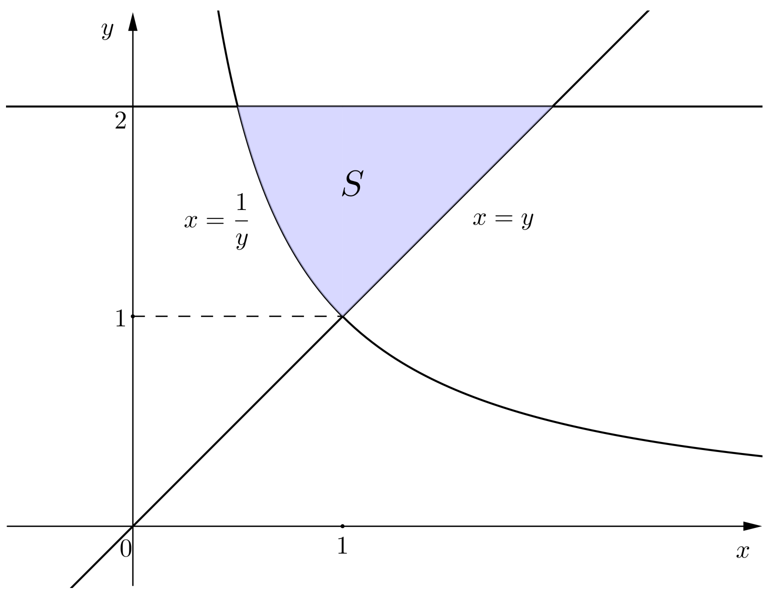
$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{y}{x^2} dxdy &= \iint_{S_1} \frac{y}{x^2} dxdy + \iint_{S_2} \frac{y}{x^2} dxdy \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{\frac{1}{x}}^{2} \frac{y}{x^2} dy + \int_{1}^{2} dx \int_{x}^{2} \frac{y}{x^2} dy \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{y^2}{2x^2} \bigg|_{y=\frac{1}{x}}^{y=2} dx + \int_{1}^{2} \frac{y^2}{2x^2} \bigg|_{y=x}^{y=2} dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2x^4} \right) dx + \int_{1}^{2} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2} \right) dx \\
&= \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{6x^3} \right) \bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} + \left(-\frac{2}{x} - \frac{x}{2} \right) \bigg|_{1}^{2} \\
&= \left(-2 + \frac{1}{6} + 4 - \frac{4}{3} \right) + \left(-1 - 1 + 2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

U drugom slučaju, tj. kada se podintegralna funkcija integrira najprije po x, a zatim po y, dvostruki integral po području

$$S = \left\{ (x, y) : 1 \leq y \leq 2, \ \frac{1}{y} \leq x \leq y \right\},$$

omeđenom hiperbolom $x = \frac{1}{y}$, te pravcima $x = y$ i $y = 2$ (v. sliku 131) računamo kao

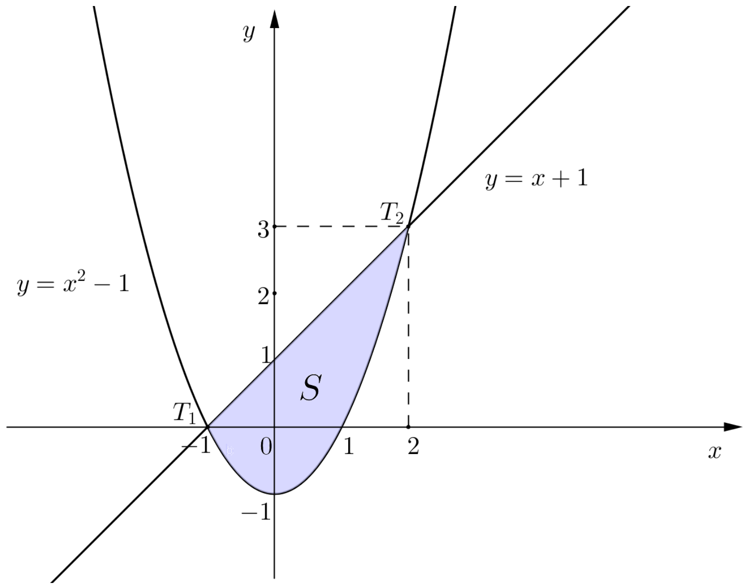
$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{y}{x^2}dxdy &= \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^{y} \frac{y}{x^2}dx \\
&= \int_1^2 y \cdot \frac{-1}{x}\bigg|_{x=\frac{1}{y}}^{x=y} dy \\
&= \int_1^2 (-1+y^2)dy \\
&= \left(-y + \frac{y^3}{3}\right)\bigg|_1^2 \\
&= \left(-2 + \frac{8}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$



Slika 131: Područje integracije $S = \left\{(x, y) : 1 \leq y \leq 2, \frac{1}{y} \leq x \leq y\right\}$

Primjer 6.2.5. Izračunati $\iint_S (x + 2y)dxdy$, gdje je područje integracije S omeđeno krivuljama $y = x^2 - 1$ i $y = x + 1$.

Rješenje. Nađimo točke presjeka parabole $y = x^2 - 1$ i pravca $y = x + 1$. Apscise traženih točaka su rješenja jednadžbe $x^2-1 = x+1$, tj. $x^2-x-2 = 0$. Ova kvadratna jednadžba ima dva realna rješenja $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$. Odavde je $y_1 = x_1 + 1 = 0$ i $y_2 = x_2 + 1 = 3$. Dakle, krivulje se sijeku u točkama $T_1(-1, 0)$ i $T_2(2, 3)$ (slika 132).



Slika 132: Područje integracije
$S = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 2,\ x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\}$

Dvostruki integral funkcije $f(x, y) = x + 2y$ na skupu

$$S = \Big\{(x, y) : -1 \leq x \leq 2,\ x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\Big\},$$

riješit ćemo tako da podintegralnu funkciju integriramo najprije po y, a zatim po x. Dakle,

$$\begin{aligned}
\iint_S (x + 2y)dxdy &= \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2-1}^{x+1} (x + 2y)dy \\
&= \int_{-1}^{2} (xy + y^2)\Big|_{y=x^2-1}^{y=x+1} dx \\
&= \int_{-1}^{2} \Big(x(x + 1) + (x + 1)^2 - x(x^2 - 1) - (x^2 - 1)^2\Big)dx \\
&= \int_{-1}^{2} (-x^4 - x^3 + 4x^2 + 4x)dx \\
&= \left(-\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right)\Bigg|_{-1}^{2} \\
&= \left(-\frac{32}{5} - 4 + \frac{32}{3} + 8\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 2\right) = \frac{153}{20}.
\end{aligned}$$

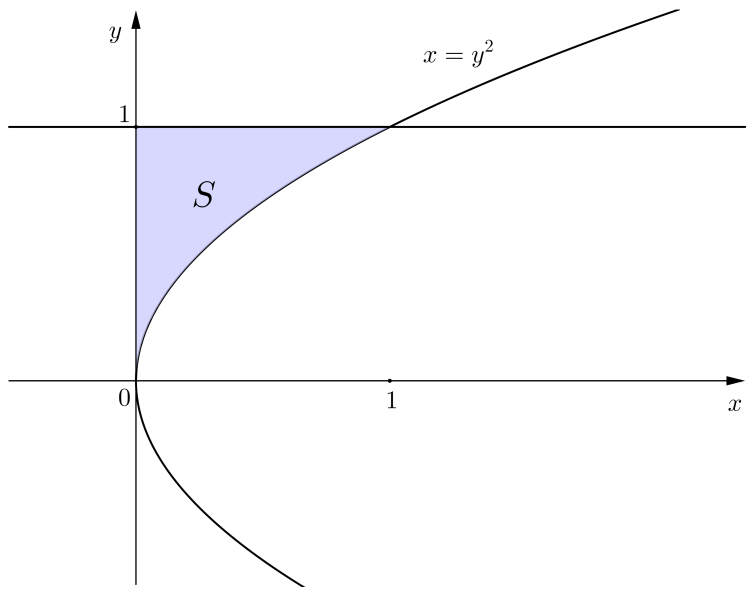
Primijetimo da zadatak možemo riješiti i tako da promijenimo redoslijed integracije, no u tom bismo slučaju područje integracije S morali podijeliti na dva dijela.

Primjer 6.2.6. Izračunati $\iint_S e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$, gdje je područje integracije S omeđeno parabolom $y^2 = x$, pravcem $y = 1$ i osi y.

Rješenje. Područje integracije

$$S = \left\{(x, y) : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y^2\right\}$$

skicirano je na slici 133.



Slika 133: Područje integracije $S = \{(x, y) :\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y^2\}$

Podintegralnu funkciju integrirat ćemo najprije po x, a zatim po y. Dakle,

$$\begin{aligned}
\iint_S e^{\frac{x}{y}}\,dxdy &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx \\
&= \int_0^1 ye^{\frac{x}{y}}\Big|_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 ye^y dy - \int_0^1 ydy \\
&= \int_0^1 ye^y dy - \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 = \int_0^1 ye^y dy - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Integral $\int_0^1 ye^y dy$ riješit ćemo metodom parcijalne integracije. Dakle,

$$\begin{aligned}\int_0^1 ye^y dy &= \begin{vmatrix} u = y & du = dy \\ dv = e^y dy & v = e^y \end{vmatrix} = ye^y\Big|_0^1 - \int_0^1 e^y dy \\ &= e - e^y\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1.\end{aligned}$$

Prema tome,

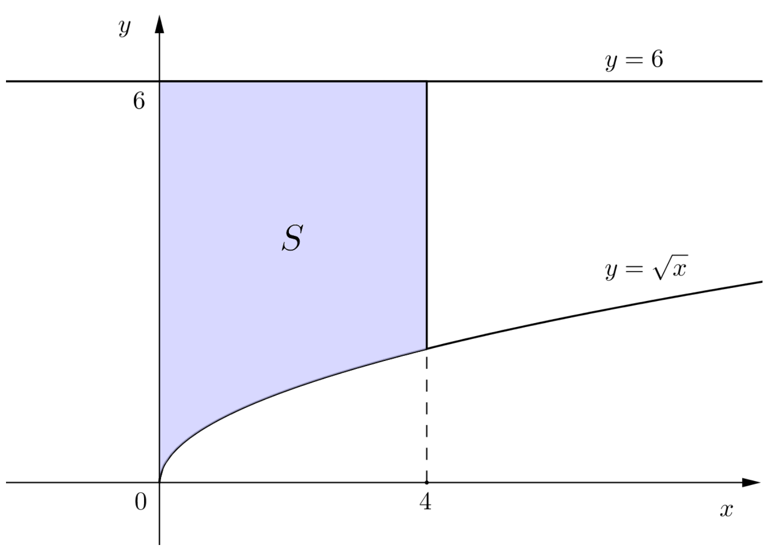
$$\iint_S e^{\frac{x}{y}} dxdy = \int_0^1 ye^y dy - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Primijetimo da $\iint_S e^{\frac{x}{y}} dxdy$ ne bismo mogli riješiti na način da podintegralnu funkciju integriramo najprije po y, a zatim po x. Naime, $\int e^{\frac{x}{y}} dy$ ne možemo elementarno integrirati.

Primjer 6.2.7. Promijeniti redoslijed integracije u dvostrukom integralu $\iint_S f(x,y)dxdy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^6 f(x,y)dy$.
Rješenje. Područje integracije

$$S = \left\{(x,y) : 0 \le x \le 4, \sqrt{x} \le y \le 6\right\}$$

skicirano je na slici 134.



Slika 134: Područje integracije $S = \{(x,y) :\ 0 \le x \le 4,\ \sqrt{x} \le y \le 6\}$

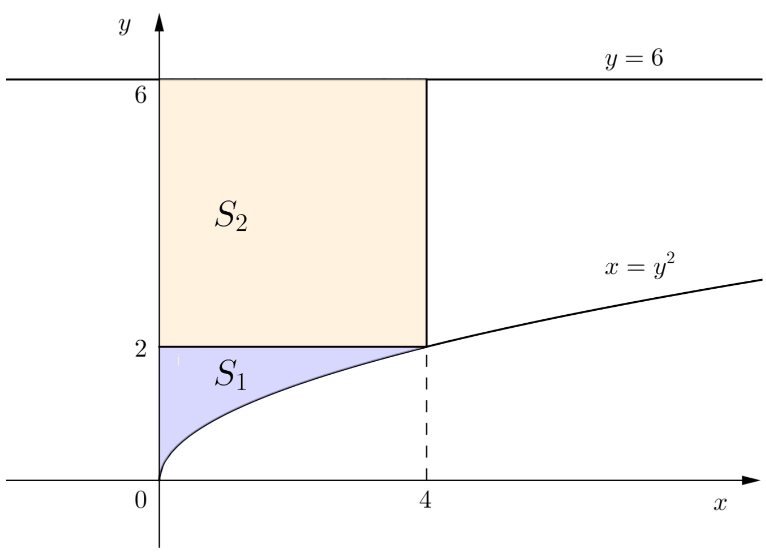
Želimo li promijeniti redoslijed integracije, tj. funkciju f integrirati najprije po x, a zatim po y, tada područje integracije S moramo podijeliti na dva područja S_1 i S_2 (v. sliku 135).

Iz $y = \sqrt{x}$ slijedi $x = y^2$, pa je

$$S_1 = \big\{(x, y) : 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq y^2\big\},$$
$$S_2 = \big\{(x, y) : 2 \leq y \leq 6,\ 0 \leq x \leq 4\big\}.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}\iint_S f(x,y)dxdy &= \iint_{S_1} f(x,y)dxdy + \iint_{S_2} f(x,y)dxdy\\ &= \int_0^2 dy \int_0^{y^2} f(x,y)dx + \int_2^6 dy \int_0^4 f(x,y)dx.\end{aligned}$$



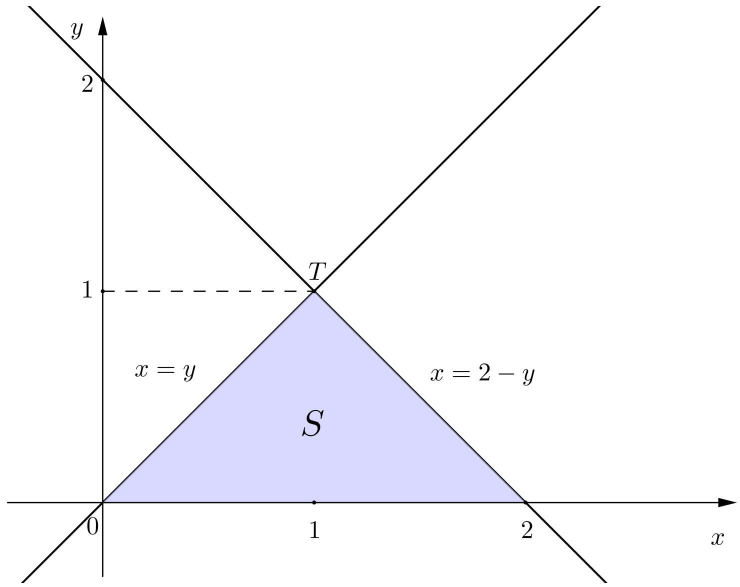
Slika 135: Područje integracije $S = S_1 \cup S_2$

Primjer 6.2.8. Promijeniti redoslijed integracije u dvostrukom integralu $\iint_S f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y)dx$.

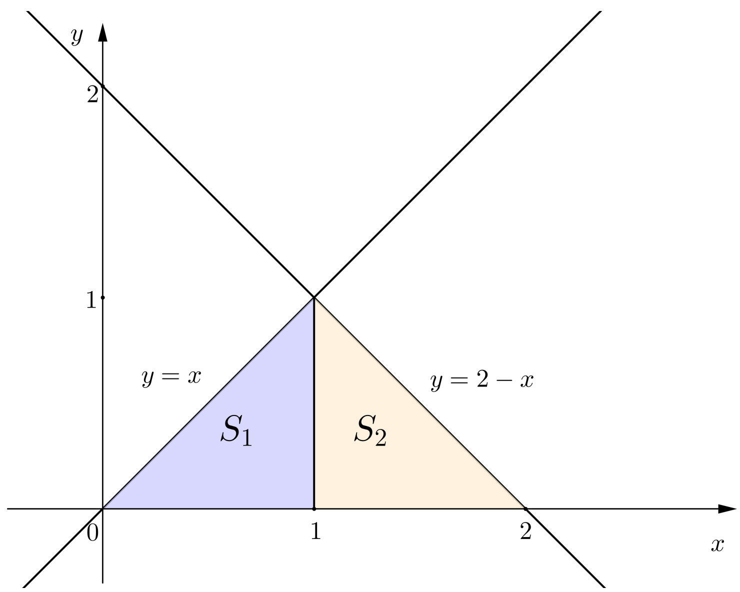
Rješenje. Područje integracije je skup

$$S = \big\{(x, y) : 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 2 - y\big\}.$$

Da bismo skicirali skup S, nađimo presjek pravaca $x = y$ i $x = 2-y$. Presjek je točka $T(1, 1)$. Skup S skiciran je na slici 136.



Slika 136: Područje integracije $S = \{(x, y) : \ 0 \leq y \leq 1, \ y \leq x \leq 2 - y\}$



Slika 137: Područje integracije $S = S_1 \cup S_2$

Ako funkciju f želimo integrirati najprije po y, a zatim po x, tada je jasno da područje integracije S moramo podijeliti na dva dijela S_1 i S_2 (v. sliku 137).

Iz $x = 2 - y$ slijedi $y = 2 - x$. Stoga je

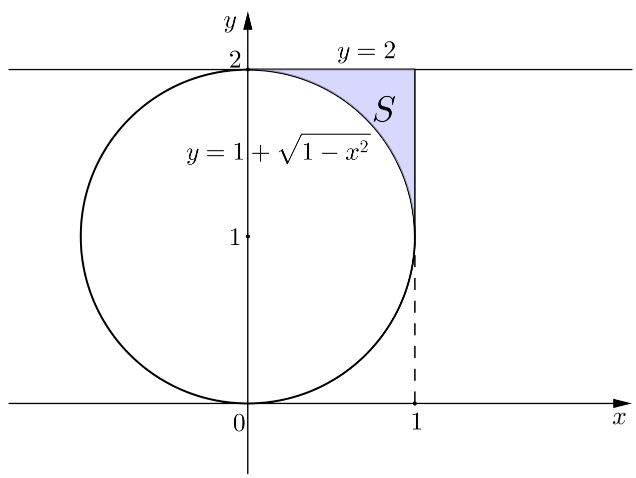
$$\begin{aligned} S_1 &= \big\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\big\}, \\ S_2 &= \big\{(x,y) : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2 - x\big\}. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} \iint_S f(x,y)dxdy &= \iint_{S_1} f(x,y)dxdy + \iint_{S_2} f(x,y)dxdy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy. \end{aligned}$$

Primjer 6.2.9. Promijeniti redoslijed integracije u dvostrukom integralu $\iint_S f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{1+\sqrt{1-x^2}}^2 f(x,y)dy$.
Rješenje. Područje integracije je skup

$$S = \Big\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 1 + \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 2\Big\}.$$



Slika 138: Područje integracije
$S = \Big\{(x,y) :\ 0 \leq x \leq 1,\ 1 + \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 2\Big\}$

Iz $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ slijedi $y - 1 = \sqrt{1 - x^2}$, pa je $(y-1)^2 = 1 - x^2$, odnosno $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Znamo da je $x^2 + (y-1)^2 = 1$ jednadžba kružnice polumjera $r = 1$ sa središtem u točki $S(0,1)$. Stoga je $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$, za

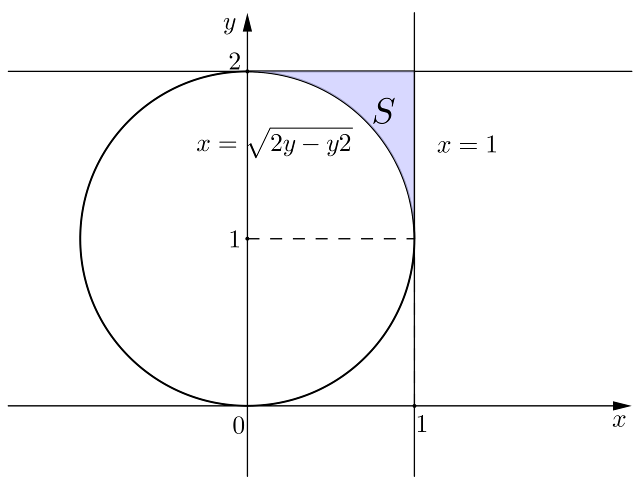
$0 \leq x \leq 1$, jednadžba "gornje desne" četvrtine kružnice $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Skup S skiciran je na slici 138.

Da bismo promijenili redoslijed integracije, moramo iz jednadžbe $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$ izraziti x kao funkciju od y. Pokazali smo da iz $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$ slijedi $x^2 + (y-1)^2 = 1$, odakle se dobije $x^2 = 1 - (y-1)^2 = 2y - y^2$, pa je $x = \pm\sqrt{2y - y^2}$. Kako je $0 \leq x \leq 1$, to je u našem slučaju $x = \sqrt{2y - y^2}$ (v. sliku 139). Dakle,

$$S = \Big\{(x,y) : 1 \leq y \leq 2,\ \sqrt{2y - y^2} \leq x \leq 1\Big\}.$$

Prema tome,

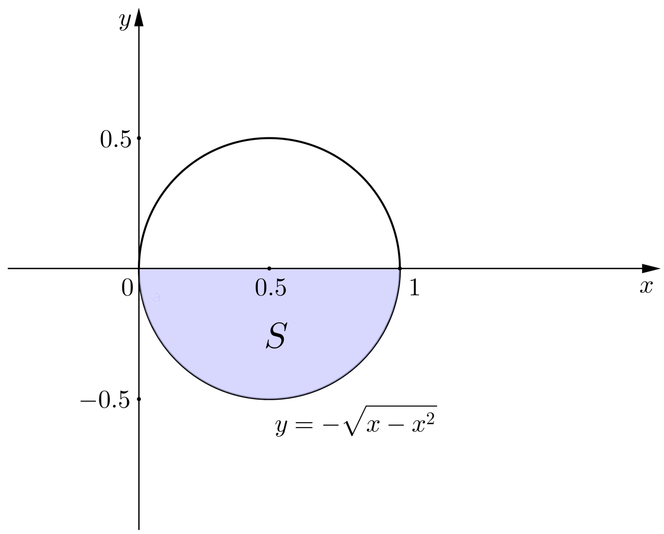
$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_1^2 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^1 f(x,y)dx.$$



Slika 139: Područje integracije $S = \Big\{(x,y) : 1 \leq y \leq 2,\ \sqrt{2y - y^2} \leq x \leq 1\Big\}$

Primjer 6.2.10. Promijeniti redoslijed integracije u dvostrukom integralu $\iint_S f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^0 f(x,y)dy$.
Rješenje. Područje integracije je skup

$$S = \Big\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{x - x^2} \leq y \leq 0\Big\}.$$



Slika 140: Područje integracije
$S = \left\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{x - x^2} \leq y \leq 0\right\}$

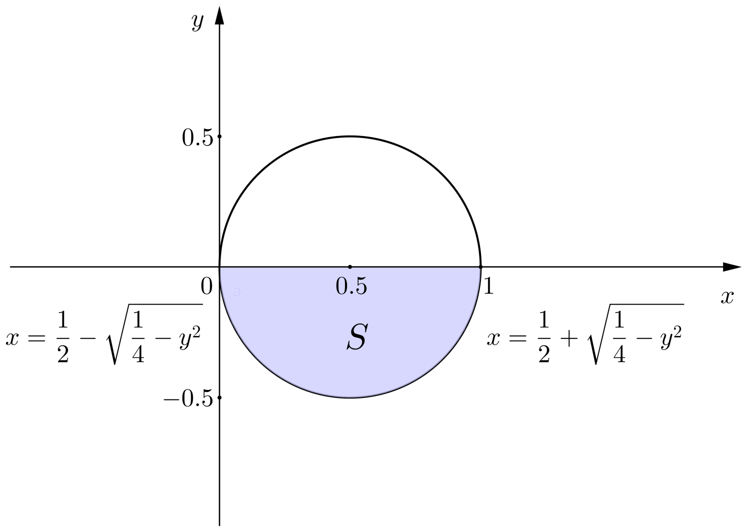
Iz $y = -\sqrt{x - x^2}$ slijedi $y^2 = x - x^2$, tj. $x^2 - x + y^2 = 0$, pa se svođenjem $x^2 - x$ na potpun kvadrat dobije $(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + y^2 = 0$, odnosno $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, a to je kružnica polumjera $r = \frac{1}{2}$ sa središtem u točki $S(\frac{1}{2}, 0)$. Stoga je $y = -\sqrt{x - x^2}$, za $0 \leq x \leq 1$, jednadžba njene "donje" polukružnice. Skup S skiciran je na slici 140.

Da bismo promijenili redoslijed integracije moramo iz jednadžbe $y = -\sqrt{x - x^2}$ izraziti x kao funkciju od y. Pokazali smo da iz $y = -\sqrt{x - x^2}$ slijedi $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, pa je stoga $(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - y^2$, odakle je $x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4} - y^2}$, tj. $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}$. Kako je $-\frac{1}{2} \leq y \leq 0$, to je $x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}$ jednadžba "donje lijeve", a $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}$ jednadžba "donje desne" četvrtine kružnice $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ (v. sliku 141). Dakle,

$$S = \left\{(x, y) : -\frac{1}{2} \leq y \leq 0, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}\right\}.$$

Prema tome,

$$\iint_S f(x, y)dxdy = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} dy \int_{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}}^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}} f(x, y)dx.$$



Slika 141: Područje integracije
$S = \left\{(x,y):\, -\frac{1}{2} \le y \le 0,\, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2} \le x \le \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}\right\}$

Primjer 6.2.11. Promijeniti redoslijed integracije u dvostrukom integralu $\iint_S f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$.

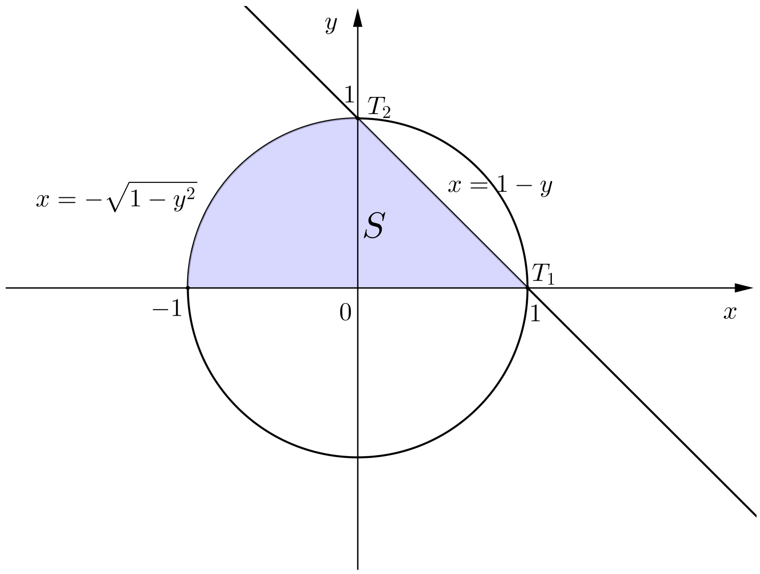
Rješenje. Područje integracije je skup

$$S = \left\{(x,y) : 0 \le y \le 1,\, -\sqrt{1-y^2} \le x \le 1-y\right\}.$$

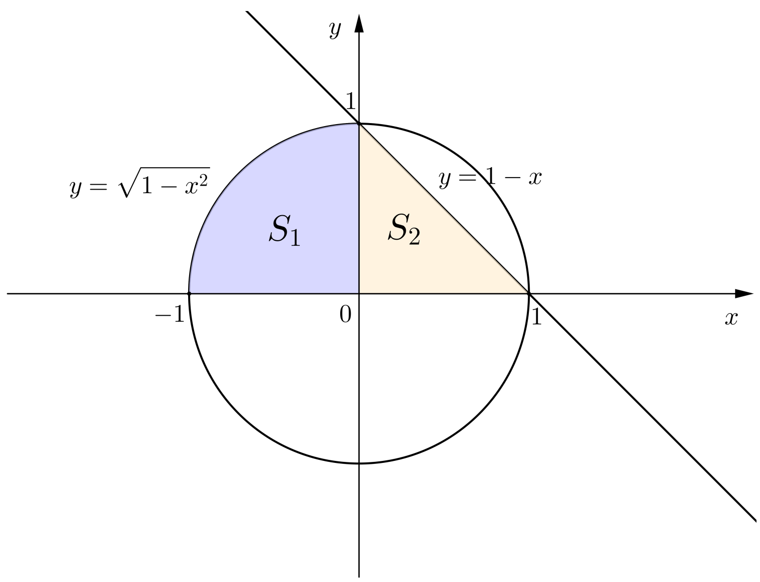
Iz $x = -\sqrt{1-y^2}$ slijedi $x^2 = 1-y^2$, tj. $x^2+y^2 = 1$. Stoga je $x = -\sqrt{1-y^2}$, za $0 \le y \le 1$, jednadžba "gornje lijeve" četvrtine kružnice polumjera $r = 1$ sa središtem u ishodištu $S(0,0)$. Nadalje, $x = 1-y$, tj. $x+y = 1$ je jednadžba pravca koji prolazi točkama $T_1(1,0)$ i $T_2(0,1)$ koje leže na kružnici $x^2+y^2 = 1$. Skup S skiciran je na slici 142.

Da bismo promijenili redoslijed integracije, skup S moramo podijeliti na dva skupa S_1 i S_2 (v. sliku 143). Iz jednadžbe $x = -\sqrt{1-y^2}$ izrazimo y kao funkciju od x. Kako je $x^2+y^2 = 1$, slijedi $y^2 = 1-x^2$, pa je $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Budući da je $0 \le y \le 1$, to je u našem slučaju $y = \sqrt{1-x^2}$. Osim toga, iz $x = 1-y$ slijedi $y = 1-x$. Dakle,

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{(x,y) : -1 \le x \le 0,\, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}, \\ S_2 &= \left\{(x,y) : 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1-x\right\}. \end{aligned}$$



Slika 142: Područje integracije
$S = \left\{(x, y) :\ 0 \le y \le 1,\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le 1-y\right\}$



Slika 143: Područje integracije $S = S_1 \cup S_2$

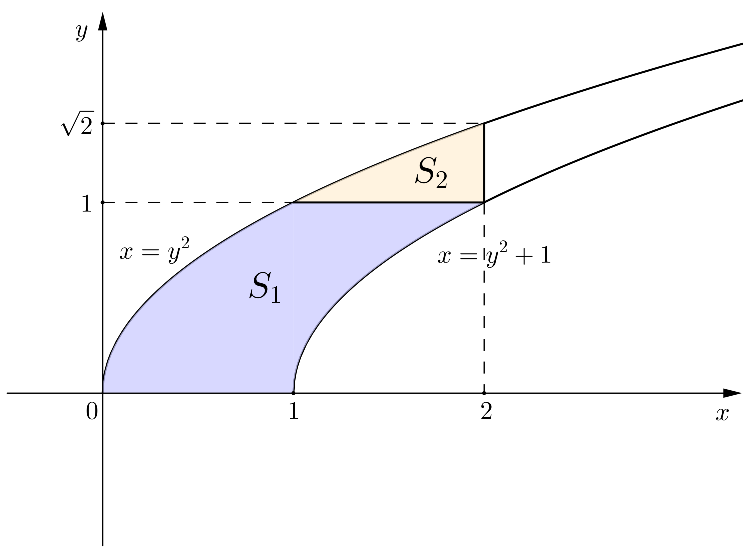
Prema tome,

$$\begin{aligned}\iint_S f(x,y)dxdy &= \iint_{S_1} f(x,y)dxdy + \iint_{S_2} f(x,y)dxdy \\ &= \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} f(x,y)dy.\end{aligned}$$

Primjer 6.2.12. Promijeniti redoslijed integracije u dvostrukom integralu $\iint_S f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y^2+1} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2}^{2} f(x,y)dx$.
Rješenje. Područje integracije je skup $S = S_1 \cup S_2$, gdje je

$$\begin{aligned}S_1 &= \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq y^2+1\}, \\ S_2 &= \{(x,y) : 1 \leq y \leq \sqrt{2},\ y^2 \leq x \leq 2\}.\end{aligned}$$

Skupovi S_1 i S_2 skicirani su na slici 144.



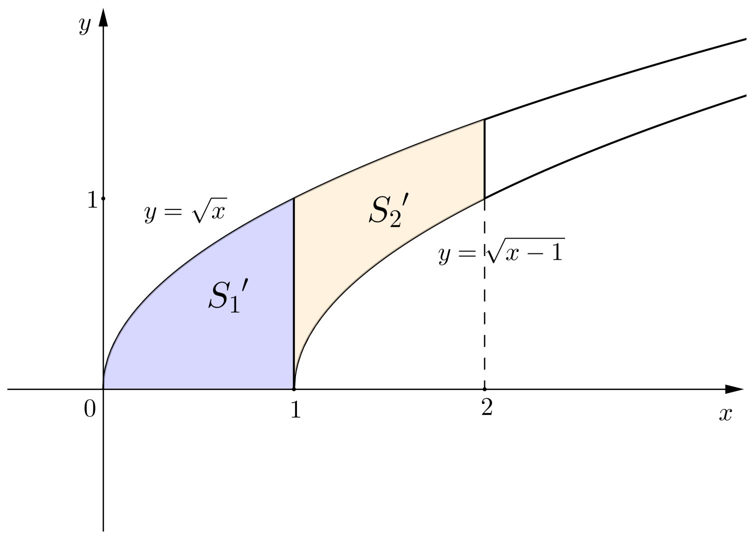
Slika 144: Područje integracije $S = S_1 \cup S_2$

Da bismo promijenili redoslijed integracije, skup S moramo podijeliti na skupove S_1' i S_2' (v. sliku 145). Kako je $y \geq 0$, to iz $x = y^2$ slijedi $y = \sqrt{x}$. Također, iz $x = y^2 + 1$ slijedi $y^2 = x - 1$, pa je $y = \sqrt{x-1}$. Stoga je

$$\begin{aligned}S_1' &= \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}, \\ S_2' &= \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2,\ \sqrt{x-1} \leq y \leq \sqrt{x}\}.\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}\iint_S f(x,y)dxdy &= \iint_{S_1{}'} f(x,y)dxdy + \iint_{S_2{}'} f(x,y)dxdy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.\end{aligned}$$



Slika 145: Područje integracije $S = S_1' \cup S_2'$

6.3 Dvostruki integral u polarnom koordinatnom sustavu

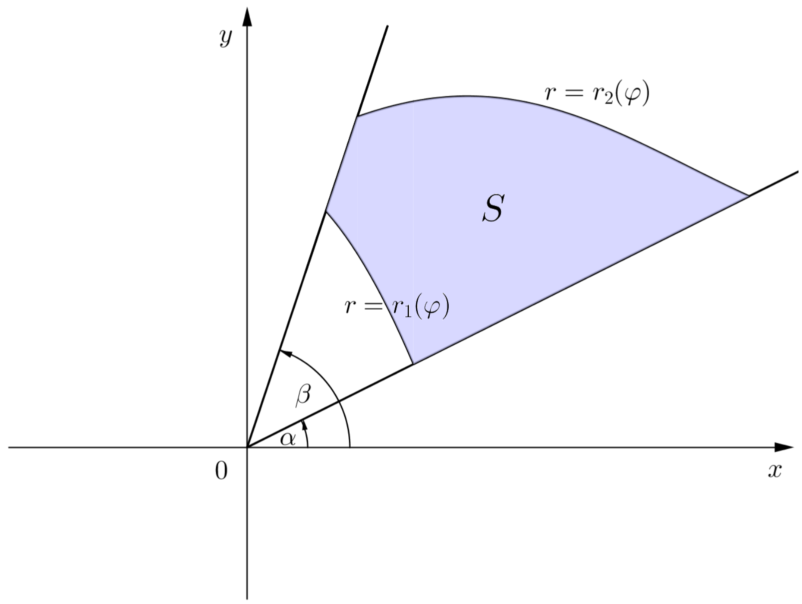
Znamo da se položaj točke u ravnini, osim pomoću pravokutnih koordinata, može opisati i polarnim koordinatama. Računanje dvostrukog integrala

$$\iint_S f(x,y)dxdy$$

neprekidne funkcije f na skupu S u nekim se slučajevima pojednostavljuje, ako se iz pravokutnog koordinatnog sustava prijeđe u polarni. Polarni koordinatni sustav prikladan je za skupove S "kružnog" tipa (krug, polukrug, kružni isječak i sl.), koji se mogu opisati kao

$$S = \{(r,\varphi) : \alpha \le \varphi \le \beta,\, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\},$$

pri čemu su $r = r_1(\varphi)$ i $r = r_2(\varphi)$ jednadžbe neprekidnih krivulja u polarnom koordinatnom sustavu, čiji smo pol smjestili u ishodište pravokutnog koordinatnog sustava, a za polarnu os izabrali pozitivni dio osi x (slika 146).



Slika 146: Područje integracije S

Ako su (x, y) pravokutne, a (r, φ) polarne koordinate točke T, tada je veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana jednadžbama

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Pokazuje se da vrijedi

$$\iint_S f(x, y)dxdy = \iint_S f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi,$$

pri čemu se računanje dvostrukog integrala $\iint_S f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$ svodi na računanje dvaju "jednostrukih" integrala. Naime,

$$\iint_S f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

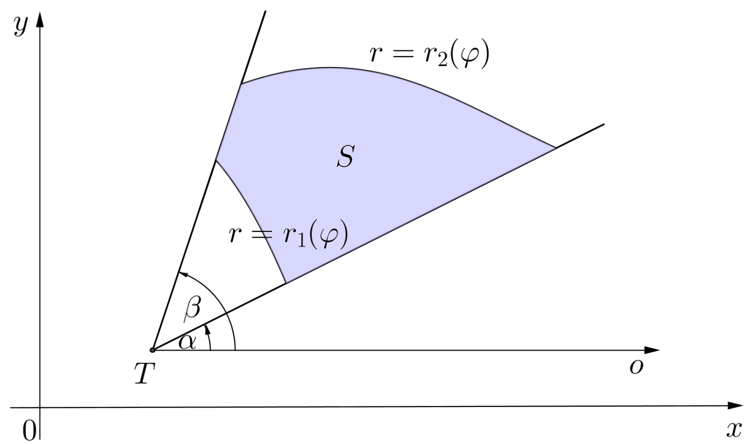
Prema tome, podintegralnu funkciju najprije integriramo po r na segmentu $[r_1(\varphi), r_2(\varphi)]$, a zatim dobivenu funkciju, koja ovisi o φ, integriramo po φ na segmentu $[\alpha, \beta]$.

Ako je pol polarnog koordinatnog sustava u točki $T(x_0, y_0)$ pravokutnog koordinatnog sustava, a polarna os polupravac iz točke T u pozitivnom smjeru osi x, onda je veza između pravokutnih i polarnih koordinata točke T dana jednadžbama

$$x - x_0 = r\cos\varphi, \quad y - y_0 = r\sin\varphi,$$

a $\iint_S f(x,y)dxdy$ na skupu $S = \{(r,\varphi) : \alpha \le \varphi \le \beta,\, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\}$ (slika 147) računa se kao

$$\begin{aligned}\iint_S f(x,y)dxdy &= \iint_S f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) r dr d\varphi \\ &= \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) r dr.\end{aligned}$$



Slika 147: Područje integracije S

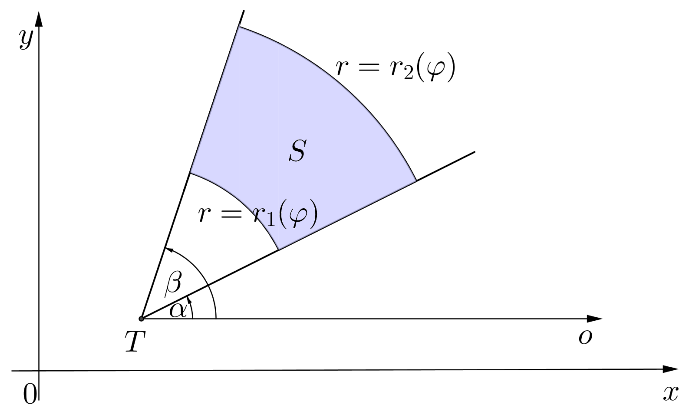
Posebno, ako je skup

$$S = \{(r,\varphi) : \alpha \le \varphi \le \beta,\, r_1 \le r \le r_2\}$$

isječak kružnog vijenca sa središtem u točki $T(x_0, y_0)$ (v. sliku 148), tada je

$$\begin{aligned}\iint_S f(x,y)dxdy &= \iint_S f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) r dr d\varphi \\ &= \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1}^{r_2} f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) r dr.\end{aligned}$$

Dakle, u tom se slučaju računanje dvostrukog integrala $\iint_S f(x,y)dxdy$ svodi na računanje dvaju "jednostrukih" integrala, koji imaju konstantne granice. Ovdje je svejedno kojim ćemo redoslijedom računati "jednostruke" integrale, tj. hoćemo li podintegralnu funkciju integrirati najprije po r, a zatim dobiveni izraz po φ, ili obrnuto, najprije po φ, a zatim po r.

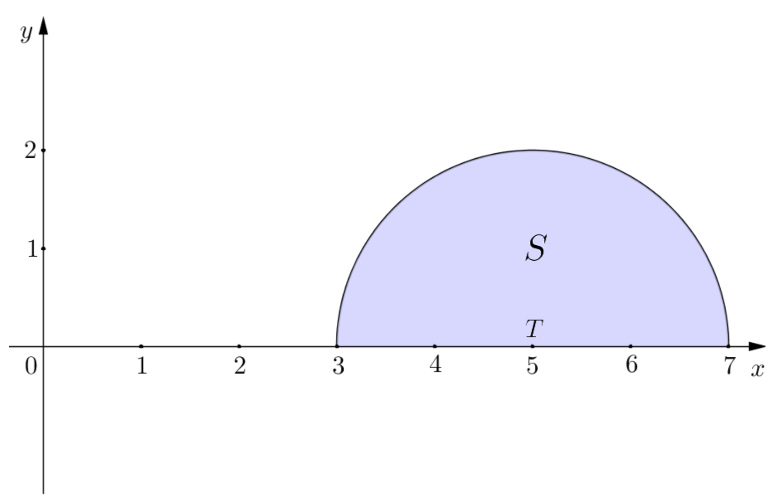


Slika 148: Područje integracije S je isječak kružnog vijenca.

Primjer 6.3.1. Izračunati $\iint_S y dx dy$, gdje je područje integracije S polukrug u prvom kvadrantu polumjera $R = 2$ sa središtem u točki $T(5, 0)$.

Rješenje. Budući da je područje integracije polukrug, ovaj zadatak riješit ćemo tako da pravokutni koordinatni sustav zamijenimo polarnim, čiji je pol točka $T(5, 0)$, a polarna os polupravac iz T u pozitivnom smjeru osi x. Tada je

$$S = \{(r, \varphi) : 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le r \le 2\}.$$



Slika 149: Područje integracije $S = \{(r, \varphi) : 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le r \le 2\}$

Veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana je jednadžbama

$$x - 5 = r\cos\varphi, \quad y - 0 = r\sin\varphi,$$

tj.

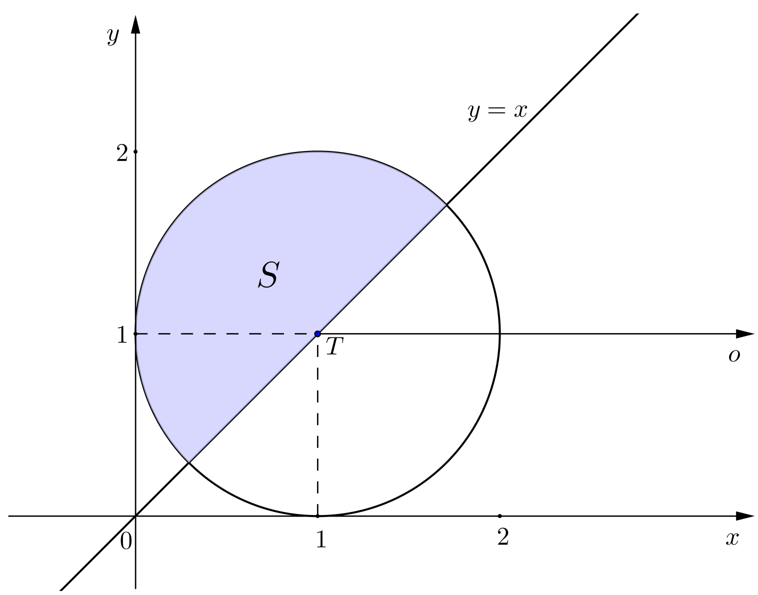
$$x = 5 + r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\iint_S y dx dy &= \iint_S r\sin\varphi\, r dr d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 r\sin\varphi\, r dr \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 r^2 \sin\varphi dr = \int_0^\pi \frac{1}{3} r^3 \sin\varphi \Big|_{r=0}^{r=2} d\varphi \\ &= \int_0^\pi \frac{8}{3}\sin\varphi d\varphi = -\frac{8}{3}\cos\varphi \Big|_0^\pi = -\frac{8}{3}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

Primjer 6.3.2. Izračunati $\iint_S x dx dy$, gdje je područje integracije S presjek kruga $(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1$ i poluravnine $y \ge x$.

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti tako da prijeđemo na polarni koordinatni sustav čiji je pol središte kruga $T(1,1)$, a polarna os polupravac iz T u pozitivnom smjeru osi x.



Slika 150: Područje integracije $S = \left\{(r,\varphi) : \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4},\ 0 \le r \le 1\right\}$

Pravac $y = x$ zatvara s pozitivnim dijelom osi x kut $\frac{\pi}{4}$. U polarnom koordinatnom sustavu je

$$S = \left\{ (r, \varphi) : \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}, \, 0 \leq r \leq 1 \right\}.$$

Veza između pravokutnih i polarnih koordinata je

$$x - 1 = r \cos \varphi, \quad y - 1 = r \sin \varphi,$$

odnosno

$$x = 1 + r \cos \varphi, \quad y = 1 + r \sin \varphi.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
\iint_S x dx dy &= \iint_S (1 + r \cos \varphi) r dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 (1 + r \cos \varphi) r dr \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 (r + r^2 \cos \varphi) dr \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{3} r^3 \cos \varphi \right) \Bigg|_{r=0}^{r=1} d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos \varphi \right) d\varphi \\
&= \left(\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{3} \sin \varphi \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5\pi}{4} + \frac{1}{3} \sin \frac{5\pi}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Napomenimo da je rješavanje ovog zadatka u pravokutnom koordinatnom sustavu komplicirano.

Primjer 6.3.3. Izračunati $\iint_S xy dx dy$, gdje je područje integracije S omeđeno kružnicom $x^2 + y^2 = 4x$, pravcem $y = x$ i osi x.

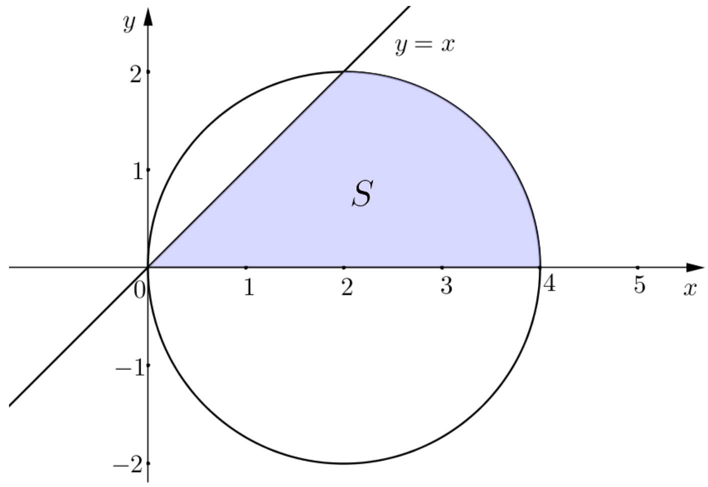
Rješenje. Da bismo našli središte i polumjer kružnice $x^2 + y^2 = 4x$, jednadžbu kružnice zapisat ćemo u kanonskom obliku. Dakle,

$$0 = x^2 - 4x + y^2 = (x - 2)^2 - 4 + y^2,$$

pa je

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

kanonski oblik jednadžbe kružnice $x^2 + y^2 = 4x$. Prema tome, zadana kružnica ima središte u točki $T(2, 0)$ i polumjer $R = 2$. Područje integracije S skicirano je na slici 151.



Slika 151: Područje integracije $S\left\{(r,\varphi) : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\, 0 \le r \le 4\cos\varphi\right\}$

Zadatak ćemo riješiti tako da prijeđemo na polarni koordinatni sustav, čije ćemo središte staviti u ishodište $O(0,0)$ pravokutnog koordinatnog sustava, a za polarnu os uzeti pozitivni dio osi x. Veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana je jednadžbama

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{48}$$

Budući da pravac $y = x$ zatvara kut $\frac{\pi}{4}$ s pozitivnim dijelom osi x, to za polarni kut φ točaka skupa S vrijedi $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Polarni radijus r je funkcija polarnog kuta φ. Dakle, $r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)$, gdje je $r_1(\varphi) = 0$, a $r_2(\varphi)$ jednadžba kružnice $x^2 + y^2 = 4x$ u polarnim koordinatama. Prema (48), jednadžba kružnice $x^2 + y^2 = 4x$ poprima oblik

$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 4r\cos\varphi,$$

odnosno

$$r^2 = 4r\cos\varphi,$$

pa je $r = 4\cos\varphi$. Dakle, $r_2(\varphi) = 4\cos\varphi$. Stoga je

$$S = \left\{(r,\varphi) : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\, 0 \le r \le 4\cos\varphi\right\}.$$

Prema tome,

$$
\begin{aligned}
\iint_S xydxdy &= \iint_S r\cos\varphi\, r\sin\varphi\, r dr d\varphi = \iint_S r^3 \cos\varphi \sin\varphi dr d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} r^3 \cos\varphi \sin\varphi dr \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} r^4 \cos\varphi \sin\varphi \Big|_{r=0}^{r=4\cos\varphi} d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} (4\cos\varphi)^4 \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \\
&= 64 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5\varphi \sin\varphi d\varphi \\
&= \left| \begin{array}{ll} t = \cos\varphi & \varphi = 0 \Rightarrow t = 1 \\ dt = -\sin\varphi d\varphi & \varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| \\
&= -64 \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^5 dt = 64 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 t^5 dt = 64 \cdot \frac{1}{6} t^6 \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \\
&= \frac{32}{3}\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{28}{3}.
\end{aligned}
$$

Ovaj zadatak mogli bismo riješiti i bez prijelaza na polarni koordinatni sustav. Naime, za y koordinate točaka skupa S vrijedi $0 \leq y \leq 2$. Iz $(x-2)^2 + y^2 = 4$ izrazimo x koordinate točaka "desne" polukružnice kao funkciju od y. Dobije se $x = 2 + \sqrt{4 - y^2}$. Stoga je

$$
S = \left\{ (x,y) : 0 \leq y \leq 2,\, y \leq x \leq 2 + \sqrt{4-y^2} \right\}.
$$

Prema tome,

$$
\begin{aligned}
\iint_S xydxdy &= \int_0^2 dy \int_y^{2+\sqrt{4-y^2}} xydx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 y \Big|_{x=y}^{x=2+\sqrt{4-y^2}} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\left(2 + \sqrt{4-y^2}\right)^2 y - y^3 \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(4y + 4y\sqrt{4-y^2} + (4-y^2)y - y^3 \right) dy \\
&= \int_0^2 \left(4y + 2y\sqrt{4-y^2} - y^3 \right) dy
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= 4\cdot\frac{y^2}{2}\bigg|_0^2+\int_0^2 2y\sqrt{4-y^2}dy-\frac{1}{4}y^4\bigg|_0^2\\
&= 4+\int_0^2 2y\sqrt{4-y^2}dy=\left|\begin{array}{ll} t=4-y^2 & y=0\Rightarrow t=4\\ dt=-2ydy & y=2\Rightarrow t=0\end{array}\right|\\
&= 4-\int_4^0\sqrt{t}dt=4+\int_0^4 t^{\frac{1}{2}}dt=4+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^4=4+\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}=\frac{28}{3}.
\end{aligned}$$

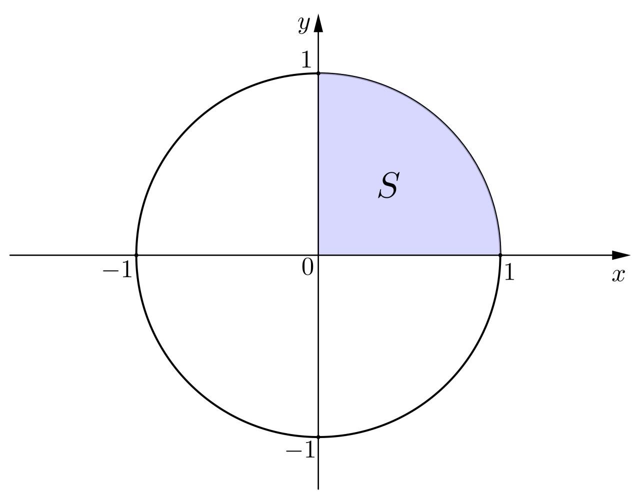
Primjer 6.3.4. Izračunati $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sin(x^2+y^2)dy$.

Rješenje. Funkcija $y\mapsto\sin(x^2+y^2)$ se ne može elementarno integrirati. Stoga integral $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sin(x^2+y^2)dy$ ne možemo izračunati na način da najprije podintegralnu funkciju integriramo po y. Promjena redoslijeda integracije nam ovdje ne pomaže, budući da bismo u tom slučaju podintegralnu funkciju trebali integrirati po x, no $x\mapsto\sin(x^2+y^2)$ se ne može elementarno integrirati.

Uočimo da je područje integracije skup

$$S=\left\{(x,y):0\le x\le 1,\,0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\},$$

što je četvrtina kruga u prvom kvadrantu polumjera $R=1$ sa središtem u ishodištu $O(0,0)$.



Slika 152: Područje integracije $S=\left\{(r,\varphi):0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\,0\le r\le 1\right\}$

Zadatak ćemo riješiti tako da pravokutni koordinatni sustav zamijenimo polarnim čiji je pol u ishodištu $O(0,0)$, a polarna os pozitivni dio osi x. Tada je

$$S = \left\{(r,\varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},\, 0 \leq r \leq 1\right\}.$$

Veza između pravokutnih i polarnih koordinata je

$$x = r\cos\varphi, \quad y = \sin\varphi.$$

Dakle, $x^2 + y^2 = r^2$, pa je $\sin(x^2+y^2) = \sin(r^2)$. Prema tome,

$$\iint_S \sin(x^2+y^2)dxdy = \iint_S r\sin(r^2)drd\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r\sin(r^2)dr.$$

Određeni integral $\int_0^1 r\sin(r^2)dr$ izračunat ćemo metodom supstitucije varijable. Dakle,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r\sin(r^2)dr &= \left|\begin{array}{ll} t = r^2 & r = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dt = 2rdr & r = 1 \Rightarrow t = 1 \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin t dt \\
&= -\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}(\cos 1 - \cos 0) = \frac{1}{2}(1-\cos 1).
\end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned}
\iint_S \sin(x^2+y^2)dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r\sin(r^2)dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1-\cos 1)d\varphi \\
&= \frac{1}{2}(1-\cos 1)\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}(1-\cos 1).
\end{aligned}$$

6.4 Primjena dvostrukog integrala na izračunavanje volumena tijela i površine lika

Neka je na pravokutniku $I = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ zadana integrabilna nenegativna realna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ dviju varijabli. Zanima nas geometrijsko značenje dvostrukog integrala

$$\iint_I f(x,y)dxdy$$

funkcije f na pravokutniku I.

Graf funkcije f, tj. skup

$$G(f) = \left\{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in I\right\},$$

predstavlja plohu u prostoru. Kako je $f(x,y) \geq 0$ za svaki par $(x,y) \in I$, to se ova ploha nalazi iznad xy-ravnine. Označimo s

$$T = \big\{(x,y,z) : (x,y) \in I,\, 0 \leq z \leq f(x,y)\big\}$$

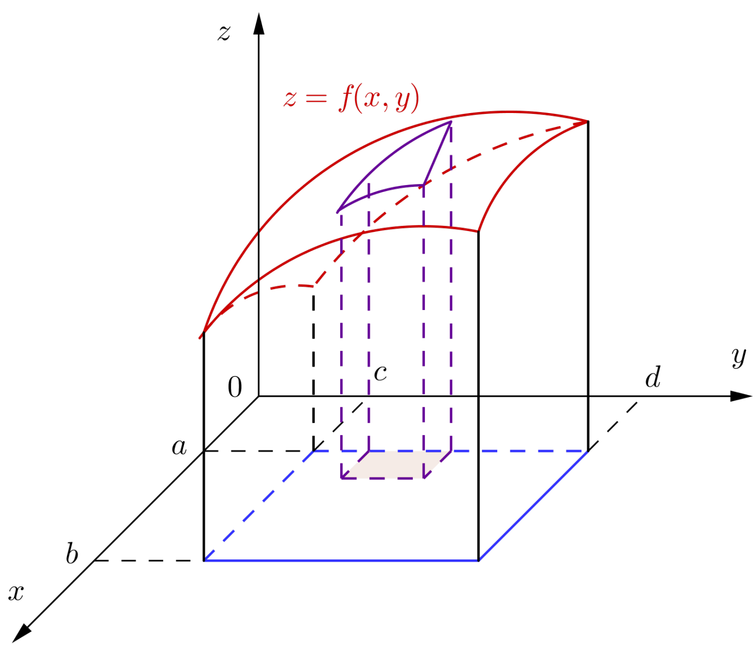
skup točaka prostora koji je omeđen pravokutnikom I, plohom $z = f(x,y)$, te uspravnom valjkastom plohom kojoj je rub pravokutnika I nivo-krivulja. Skup T nazivamo *pseudovaljkom*.

Neka je $\Delta_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ razdioba segmenta $[a,b]$, a $\Delta_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ razdioba segmenta $[c,d]$. Razdiobom $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ pravokutnik I podijeljen je na pravokutnike

$$I_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Ovoj razdiobi odgovara rastavljanje pseudovaljka T na mn manjih pseudovaljaka (v. sliku 153)

$$T_{ij} = \big\{(x,y,z) : (x,y) \in I_{ij},\, 0 \leq z \leq f(x,y)\big\}, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$



Slika 153: Rastavljanje pseudovaljka T na manje pseudovaljke T_{ij}

Stavimo

$$m_{ij} = \inf_{(x,y) \in I_{ij}} f(x,y), \quad M_{ij} = \sup_{(x,y) \in I_{ij}} f(x,y), \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Označimo s

$$P(I_{ij}) := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n,$$

površinu pravokutnika I_{ij}. Tada $m_{ij}P(I_{ij})$ predstavlja volumen kvadra upisanog pseudovaljku T_{ij}, a $M_{ij}P(I_{ij})$ volumen kvadra opisanog pseudovaljku T_{ij} (slike 154 i 155). Označimo li s $V(T_{ij})$ volumen pseudovaljka T_{ij} imamo

$$m_{ij}P(I_{ij}) \leq V(T_{ij}) \leq M_{ij}P(I_{ij}), \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

Odavde slijedi

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}P(I_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} V(T_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}P(I_{ij}). \tag{49}$$

Kako je

$$V(T) := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} V(T_{ij})$$

volumen pseudovaljka T, $s_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}P(I_{ij})$ donji integralni zbroj, a $S_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}P(I_{ij})$ gornji integralni zbroj funkcije f, to je prema (49)

$$s_\Delta \leq V(T) \leq S_\Delta$$

za svaku razdiobu Δ pravokutnika I. Odavde slijedi

$$\mathcal{I}_* \leq V(T) \leq \mathcal{I}^*,$$

gdje je

$$\mathcal{I}_* := \sup\big\{s_\Delta : \Delta \text{ razdioba pravokutnika } I\big\},$$
$$\mathcal{I}^* := \inf\big\{S_\Delta : \Delta \text{ razdioba pravokutnika } I\big\}.$$

Znamo da je funkcija f integrabilna na pravokutniku I ako je

$$\mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*.$$

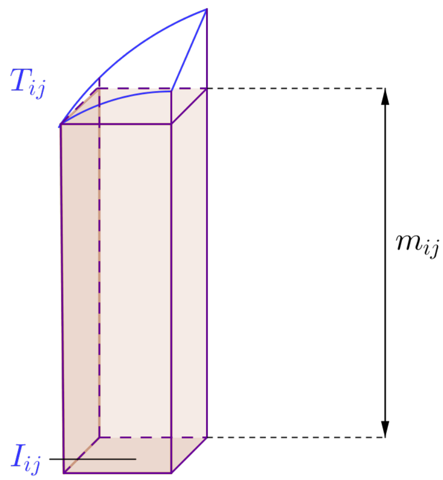
U tom slučaju broj $\mathcal{I} := \mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$ zovemo dvostrukim integralom funkcije f na pravokutniku I i označavamo ga s $\iint_I f(x,y)dxdy$.

Prema tome, za integrabilnu nenegativnu funkciju f na pravokutniku I, *volumen* $V(T)$ *pseudovaljka*

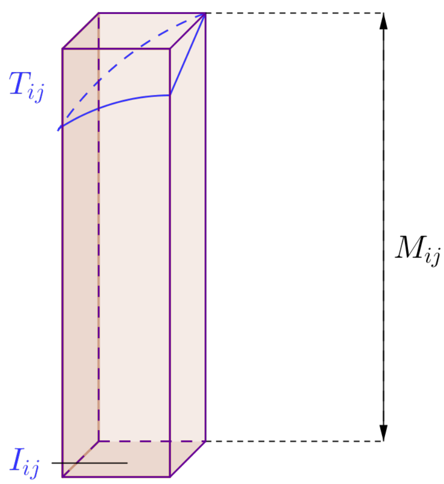
$$T = \big\{(x,y,z) : (x,y) \in I, \, 0 \leq z \leq f(x,y)\big\}$$

definira se kao

$$V(T) := \iint_I f(x,y)dxdy.$$



Slika 154: Kvadar upisan pseudovaljku T_{ij}



Slika 155: Kvadar opisan pseudovaljku T_{ij}

Uzmimo sada da je funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ integrabilna na omeđenom skupu $S \subset \mathbb{R}^2$. Neka je $f(x, y) \geq 0$ za svaki $(x, y) \in S$. Želimo izračunati volumen $V(T_{f,S})$ pseudovaljka

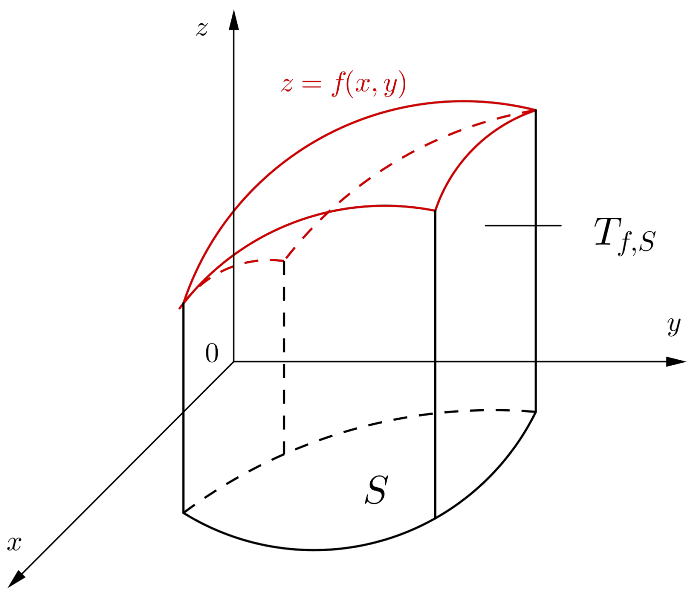
$$T_{f,S} = \big\{(x, y, z) : (x, y) \in S,\, 0 \leq z \leq f(x, y)\big\}.$$

Postupamo na sljedeći način. Neka je $I \subset \mathbb{R}^2$ proizvoljan pravokutnik koji sadrži skup S. Označimo s $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ proširenje funkcije f na pravokutnik I koje u svakoj točki skupa $I \setminus S$ poprima vrijednost jednaku nuli. Pokazali smo da je volumen $V(T_{\tilde{f},I})$ pseudovaljka

$$T_{\tilde{f},I} = \big\{(x, y, z) : (x, y) \in I,\, 0 \leq z \leq \tilde{f}(x, y)\big\}$$

jednak

$$V(T_{\tilde{f},I}) := \iint_I \tilde{f}(x, y)dxdy.$$



Slika 156: Pseudovaljak $T_{f,S}$

Budući da je $\tilde{f}(x, y) = 0$ za svaki $(x, y) \in I \setminus S$, tj. visina pseudovaljka $T_{\tilde{f},I}$ nad područjem $I \setminus S$ jednaka je nuli, to je $V(T_{f,S}) = V(T_{\tilde{f},I})$. Konačno, znamo da se dvostruki integral funkcije f na skupu S definira kao

$$\iint_S f(x, y)dxdy := \iint_I \tilde{f}(x, y)dxdy.$$

Prema tome, za integrabilnu nenegativnu funkciju f na omeđenom skupu S, *volumen* $V(T_{f,S})$ *pseudovaljka*

$$T_{f,S} = \big\{(x, y, z) : (x, y) \in S,\, 0 \leq z \leq f(x, y)\big\}$$

definira se kao

$$V(T_{f,S}) := \iint_S f(x,y)dxdy.$$

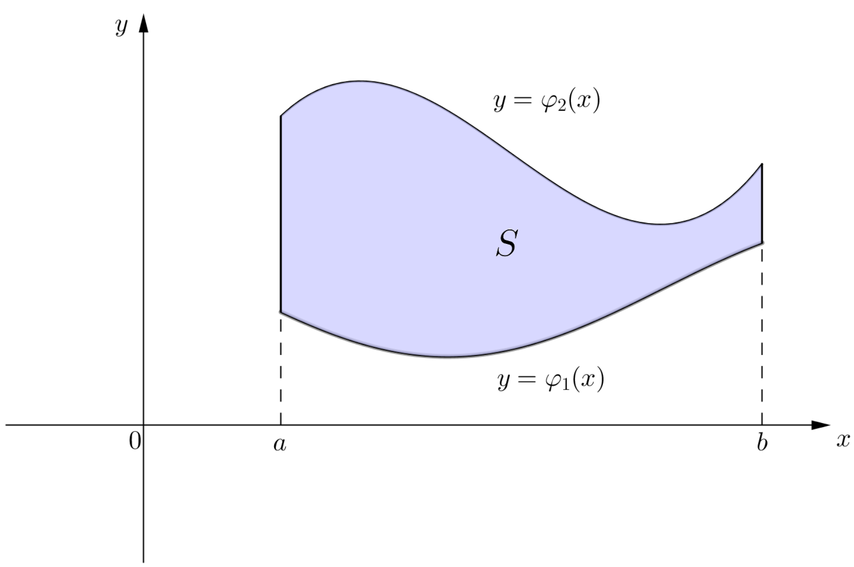
Posebno, ako je $f(x,y) = 1$ za svaki $(x,y) \in S$, onda pseudovaljak $T_{f,S}$ ima konstantnu visinu koja iznosi jedan. To znači da je volumen $V(T_{f,S})$ pseudovaljka $T_{f,S}$ zapravo jednak površini $P(S)$ područja integracije S. Dakle,

$$P(S) = \iint_S dxdy.$$

Ako je $S = \big\{(x,y) : a \leq x \leq b,\, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\big\}$, pri čemu su $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije takve da je $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ za svaki $x \in [a,b]$, tada je

$$\begin{aligned} P(S) &= \iint_S dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy = \int_a^b y\Big|_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} dx \\ &= \int_a^b \big(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\big)dx, \end{aligned}$$

a to je izraz za izračunavanje površine lika S koji smo već ranije upoznali.



Slika 157: Područje integracije
$S = \big\{(x,y) : a \leq x \leq b,\, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\big\}$

U polarnom koordinatnom sustavu izraz za izračunavanje površine $P(S)$ lika S glasi

$$P(S) = \iint_S r dr d\varphi.$$

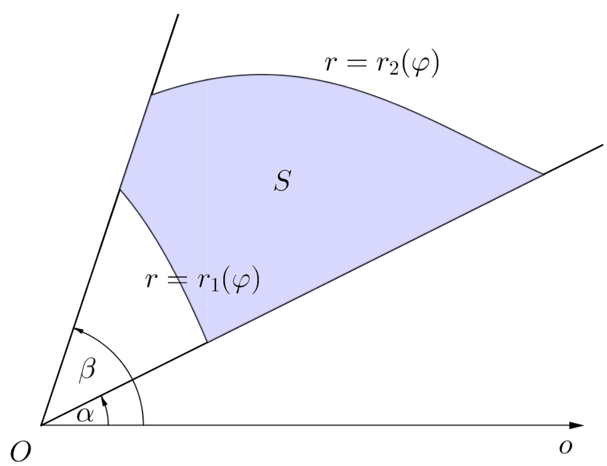
Ako je

$$S = \big\{(r,\varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta,\, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\big\},$$

pri čemu su $r = r_1(\varphi)$ i $r = r_2(\varphi)$ jednadžbe neprekidnih krivulja u polarnom koordinatnom sustavu, onda je

$$\begin{aligned} P(S) &= \iint_S r dr d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 \Big|_{r=r_1(\varphi)}^{r=r_2(\varphi)} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \big(r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)\big) d\varphi, \end{aligned}$$

što nam je također poznati izraz za izračunavanje površine lika S.



Slika 158: Područje integracije
$S = \big\{(r,\varphi) :\ \alpha \leq \varphi \leq \beta,\, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\big\}$

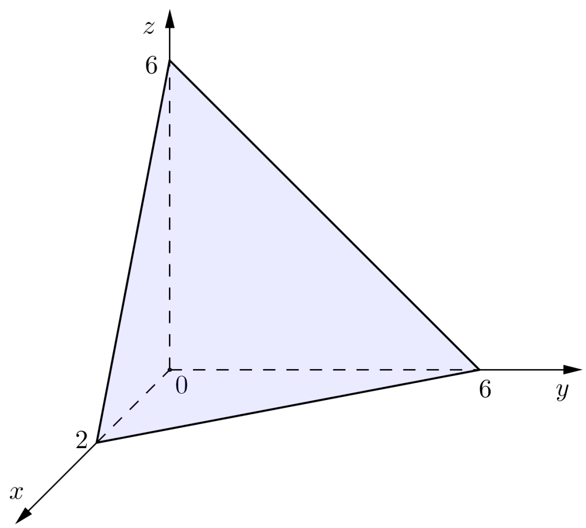
Primjer 6.4.1. Izračunati volumen tijela omeđenog koordinatnim ravninama $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i ravninom $3x + y + z = 6$.

Rješenje. Ravnina $3x + y + z = 6$ na koordinatnim osima x, y i z odsijeca redom odsječke 2, 6 i 6. Tijelo T čiji volumen želimo izračunati skicirano je na slici 159. Uočimo da ravnina $3x + y + z = 6$ siječe koordinatnu ravninu $z = 0$ po pravcu $3x + y = 6$. Stoga je volumen V tijela T jednak

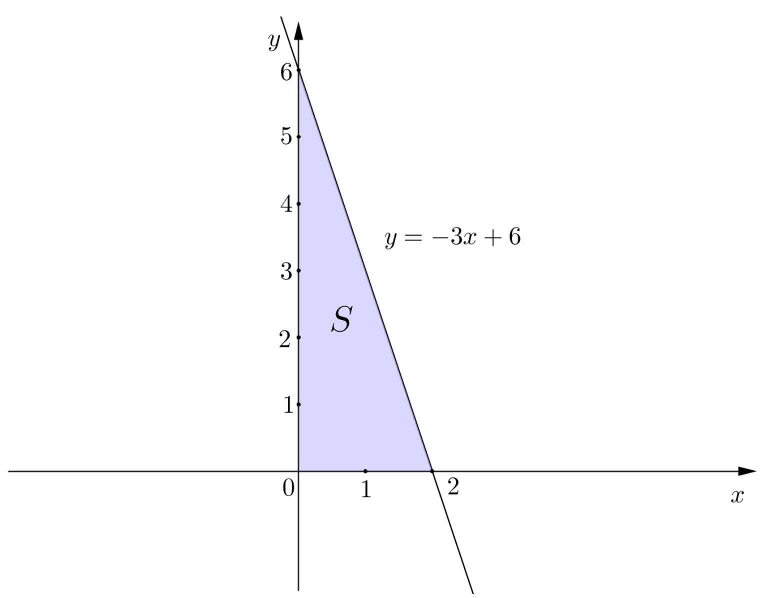
$$V = \iint_S f(x,y) dx dy,$$

gdje je $f(x,y) = z = 6 - 3x - y$ nenegativna funkcija na području integracije

$$S = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq -3x + 6\}.$$



Slika 159: Tijelo omeđeno koordinatnim ravninama i ravninom $3x + y + z = 6$



Slika 160: Područje integracije $S = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq -3x + 6\}$

Prema tome,

$$
\begin{aligned}
V = \iint_S f(x,y)dxdy &= \iint_S (6-3x-y)dxdy \\
&= \int_0^2 dx \int_0^{-3x+6} (6-3x-y)dy \\
&= \int_0^2 \left(6y - 3xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=-3x+6} dx \\
&= \int_0^2 \left(6(-3x+6) - 3x(-3x+6) - \frac{1}{2}(-3x+6)^2\right)dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{9}{2}x^2 - 18x + 18\right) dx \\
&= \left(\frac{3}{2}x^3 - 9x^2 + 18x\right)\Big|_0^2 = 12 - 36 + 36 = 12.
\end{aligned}
$$

Primjer 6.4.2. Izračunati volumen tijela omeđenog eliptičkim paraboloidom $z = x^2 + 3y^2$, ravninom $x + y = 1$ i koordinatnim ravninama.

Rješenje. Volumen tijela jednak je

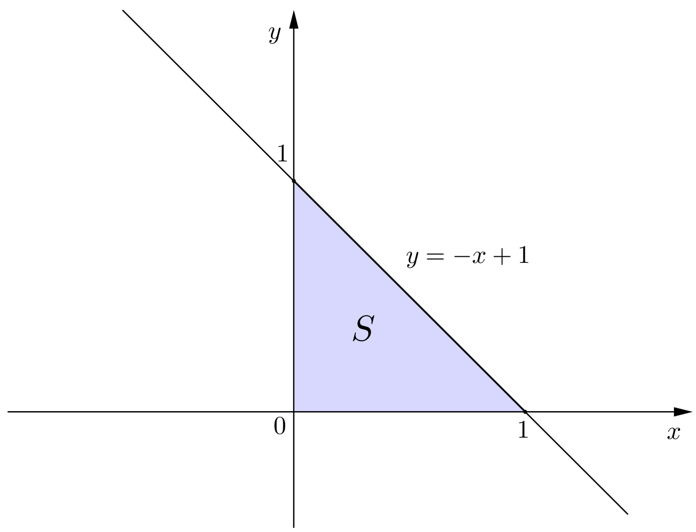
$$V = \iint_S f(x,y)dxdy,$$

gdje je $f(x,y) = z = x^2 + 3y^2$ nenegativna funkcija, a područje integracije skup

$$S = \big\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq -x+1\big\}.$$

Dakle,

$$
\begin{aligned}
V = \iint_S f(x,y)dxdy &= \iint_S (x^2+3y^2)dxdy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} (x^2+3y^2)dy \\
&= \int_0^1 (x^2y + y^3)\Big|_{y=0}^{y=-x+1} dx \\
&= \int_0^1 \big(x^2(-x+1) + (-x+1)^3\big)\, dx \\
&= \int_0^1 (-2x^3 + 4x^2 - 3x + 1)dx \\
&= \left(-\frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$



Slika 161: Područje integracije $S = \big\{(x, y) : 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le -x + 1\big\}$

Primjer 6.4.3. Izračunati volumen tijela omeđenog plohama $z = x^2+y^2+1$, $y = x^2$, $y = 1$ i $z = 0$.

Rješenje. Pseudovaljak čiji volumen želimo izračunati omeđen je odozgo eliptičkim paraboloidom $z = x^2 + y^2 + 1$, odozdo ravninom $z = 0$, a sa strane uspravnom valjkastom plohom čija je nivo-krivulja rub skupa

$$S = \big\{(x, y) : -1 \le x \le 1,\, x^2 \le y \le 1\big\}.$$

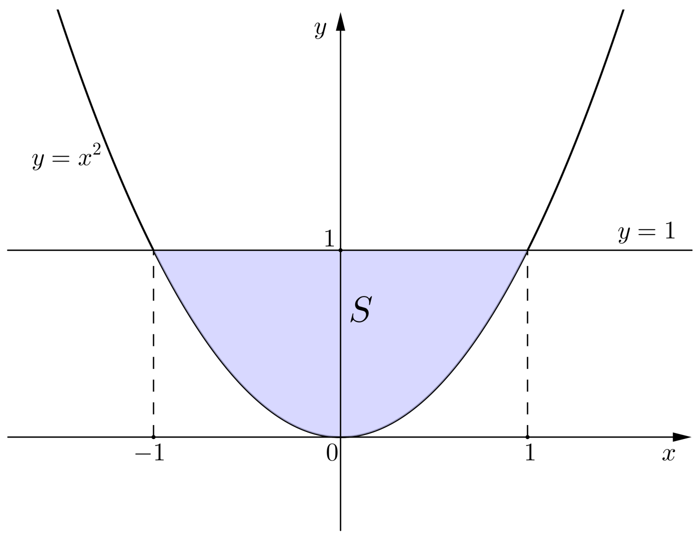
Stoga je volumen pseudovaljka jednak

$$V = \iint_S f(x, y)dxdy,$$

gdje je $f(x, y) = z = x^2 + y^2 + 1$ nenegativna funkcija, a područje integracije skup S. Prema tome,

$$\begin{aligned} V = \iint_S f(x, y)dxdy &= \iint_S (x^2 + y^2 + 1)dxdy \\ &= \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2 + 1)dy \\ &= \int_{-1}^{1} \left(x^2y + \frac{1}{3}y^3 + y\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{1}{3}+1-x^4-\frac{1}{3}x^6-x^2\right)dx\\
&= \int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{3}x^6-x^4+\frac{4}{3}\right)dx\\
&= \left(-\frac{1}{21}x^7-\frac{1}{5}x^5+\frac{4}{3}x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{76}{35}.
\end{aligned}$$



Slika 162: Područje integracije $S=\left\{(x,y):-1\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1\right\}$

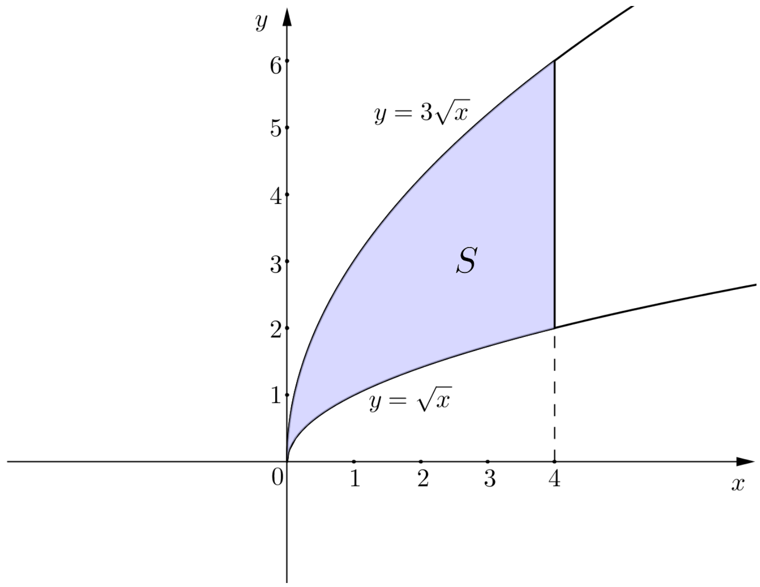
Primjer 6.4.4. Izračunati volumen tijela omeđenog plohama $y=\sqrt{x}$, $y=3\sqrt{x}$, $2x+z=8$ i $z=0$.

Rješenje. Ravnina $2x+z=8$ siječe ravninu $z=0$ po pravcu $x=4$. Pseudovaljak čiji volumen želimo izračunati omeđen je odozgo ravninom $2x+z=8$, odozdo ravninom $z=0$, a sa strane plohama $y=\sqrt{x}$ i $y=3\sqrt{x}$. Volumen pseudovaljka je

$$V=\iint_S f(x,y)dxdy,$$

gdje je $f(x,y)=z=8-2x$ nenegativna funkcija na području integracije

$$S=\left\{(x,y):0\le x\le 4,\ \sqrt{x}\le y\le 3\sqrt{x}\right\}.$$



Slika 163: Područje integracije $S = \big\{(x, y) : \ 0 \leq x \leq 4, \ \sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\big\}$

Prema tome,

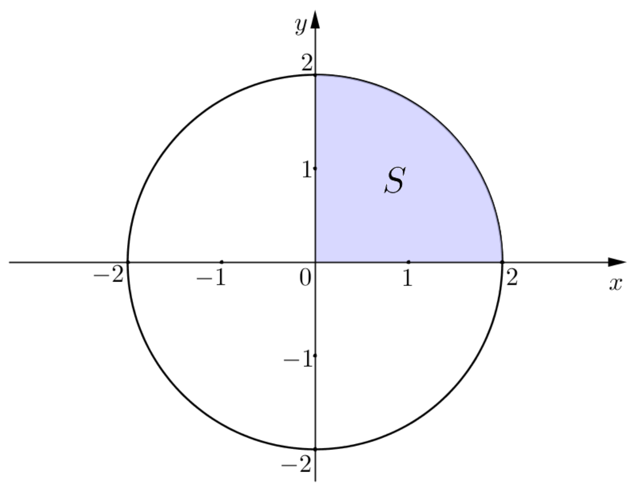
$$
\begin{aligned}
V = \iint_S f(x,y)dxdy &= \iint_S (8-2x)dxdy \\
&= \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} (8-2x)dy \\
&= \int_0^4 (8y - 2xy)\Big|_{y=\sqrt{x}}^{y=3\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^4 \big(24\sqrt{x} - 6x\sqrt{x} - 8\sqrt{x} + 2x\sqrt{x}\big)\, dx \\
&= \int_0^4 \left(16x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}}\right) dx \\
&= \left(\frac{32}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{512}{15}.
\end{aligned}
$$

Primjer 6.4.5. Izračunati volumen tijela koje se nalazi u prvom oktantu, a omeđeno je plohama $x^2 + y^2 = 4$, $2x + y + 3z = 10$, $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$.

Rješenje. Nivo-krivulja cilindra $x^2 + y^2 = 4$ je kružnica polumjera $R = 2$ sa središtem u ishodištu xy-ravnine. Odsječci koje ravnina $2x + y + 3z = 10$ odsijeca na koordinatnim osima x, y i z iznose redom 5, 10 i $\frac{10}{3}$. Ta ravnina siječe xy-ravninu po pravcu $2x + y = 10$. Uočimo da taj pravac ne presijeca kružnicu $x^2 + y^2 = 4$. Iz $2x + y + 3z = 10$ dobivamo $f(x, y) = z = \frac{1}{3}(10 - 2x - y)$. Stoga je volumen tijela omeđenog zadanim plohama

$$V = \iint_S f(x, y) dx dy,$$

gdje je S četvrtina kruga $x^2 + y^2 \leq 4$ u prvom kvadrantu xy-ravnine (slika 164).



Slika 164: Područje integracije $S = \left\{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq r \leq 2\right\}$

Da bismo izračunali volumen prijeći ćemo na polarni koordinatni sustav čiji pol ćemo smjestiti u ishodište $O(0, 0)$, a za polarnu os uzeti pozitivni dio osi x. Tada je

$$S = \left\{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq r \leq 2\right\},$$

a veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana je jednadžbama

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
V = \iint_S f(x,y)dxdy &= \iint_S \frac{1}{3}(10 - 2r\cos\varphi - r\sin\varphi)rdrd\varphi \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 (10r - 2r^2\cos\varphi - r^2\sin\varphi)dr \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(5r^2 - \frac{2}{3}r^3\cos\varphi - \frac{1}{3}r^3\sin\varphi\right)\Big|_{r=0}^{r=2} d\varphi \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(20 - \frac{16}{3}\cos\varphi - \frac{8}{3}\sin\varphi\right) d\varphi \\
&= \frac{1}{3}\left(20\varphi - \frac{16}{3}\sin\varphi + \frac{8}{3}\cos\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{3}\left(10\pi - \frac{16}{3}\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{3} = \frac{1}{3}(10\pi - 8).
\end{aligned}$$

Primjer 6.4.6. Izračunati volumen tijela omeđenog plohama $x^2+y^2-6x-4y+12=0$, $x+y+z=10$ i $z=0$.

Rješenje. Svođenjem jednadžbe $x^2+y^2-6x-4y+12=0$ na kanonski oblik dobije se $(x-3)^2+(y-2)^2=1$, pa je stoga nivo-krivulja cilindra $x^2+y^2-6x-4y+12=0$ kružnica polumjera $R=1$ sa središtem u točki $T(3,2)$. Ravnina $x+y+z=10$ odsijeca na koordinatnim osima x, y i z odsječke 10, a xy-ravninu siječe po pravcu $x+y=10$. Pravac $x+y=10$ ne siječe kružnicu $(x-3)^2+(y-2)^2=1$. Stoga je volumen tijela omeđenog zadanim plohama jednak

$$V = \iint_S f(x,y)dxdy,$$

gdje je $f(x,y)=z=10-x-y$, a S krug $(x-3)^2+(y-2)^2 \le 1$ u xy-ravnini.

Prijelazom na polarni koordinatni sustav čiji pol je $T(3,2)$, a polarna os polupravac iz točke T u pozitivnom smjeru osi x, dobije se (v. sliku 165)

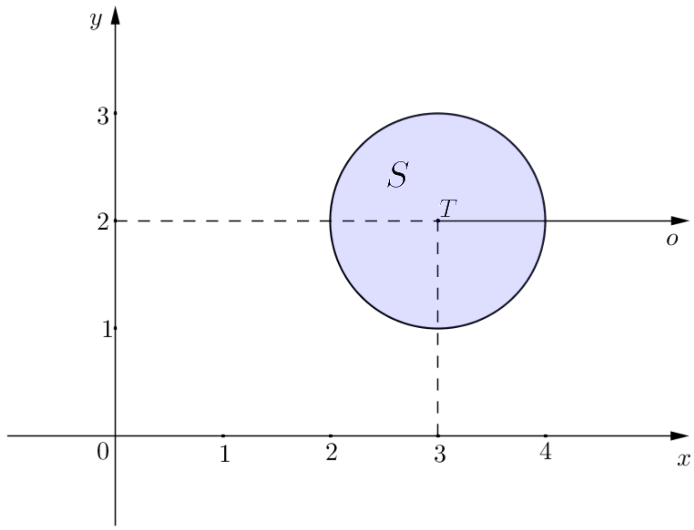
$$S = \big\{(r,\varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1\big\}.$$

Veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana je jednadžbama

$$x = 3 + r\cos\varphi, \quad y = 2 + r\sin\varphi.$$

Odavde slijedi

$$z = 10 - x - y = 10 - (3 + r\cos\varphi) - (2 + r\sin\varphi) = 5 - r\cos\varphi - r\sin\varphi.$$



Slika 165: Područje integracije $S = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1\}$

Stoga je

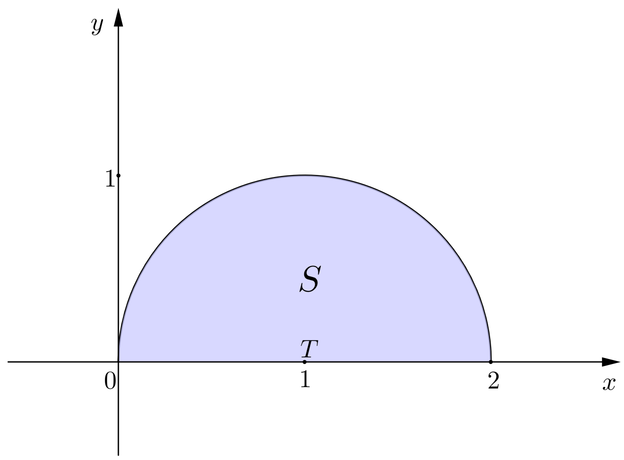
$$
\begin{aligned}
V = \iint_S f(x,y)dxdy &= \iint_S (5 - r\cos\varphi - r\sin\varphi) r dr d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (5r - r^2\cos\varphi - r^2\sin\varphi) dr \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2}r^2 - \frac{1}{3}r^3\cos\varphi - \frac{1}{3}r^3\sin\varphi \right) \Bigg|_{r=0}^{r=1} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3}\cos\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi \right) d\varphi \\
&= \left(\frac{5}{2}\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi + \frac{1}{3}\cos\varphi \right) \Bigg|_0^{2\pi} \\
&= \left(5\pi + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} = 5\pi.
\end{aligned}
$$

Primjer 6.4.7. Izračunati volumen tijela omeđenog plohama $x^2 + y^2 = 2x$, $y - z = 0$ i $z = 0$.

Rješenje. Kanonski oblik jednadžbe kružnice $x^2 + y^2 = 2x$ glasi $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Stoga je nivo-krivulja cilindra $x^2 + y^2 = 2x$ kružnica polumjera $R = 1$ sa središtem u točki $T(1, 0)$. Ravnina $y - z = 0$ siječe xy-ravninu po pravcu $y = 0$. Volumen tijela omeđenog zadanim plohama je

$$V = \iint_S f(x, y)dxdy,$$

gdje je $f(x, y) = z = y$, a S polukrug u prvom kvadrantu xy-ravnine, polumjera $R = 1$ sa središtem u $T(1, 0)$ (slika 166).



Slika 166: Područje integracije $S = \{(r, \varphi) : 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le r \le 1\}$

Prijelazom na polarni koordinatni sustav s polom $T(1, 0)$ i polarnom osi iz točke T u pozitivnom smjeru osi x, imamo

$$S = \{(r, \varphi) : 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le r \le 1\}.$$

Veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana je jednadžbama

$$x = 1 + r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Odavde je $z = y = r\sin\varphi$. Prema tome,

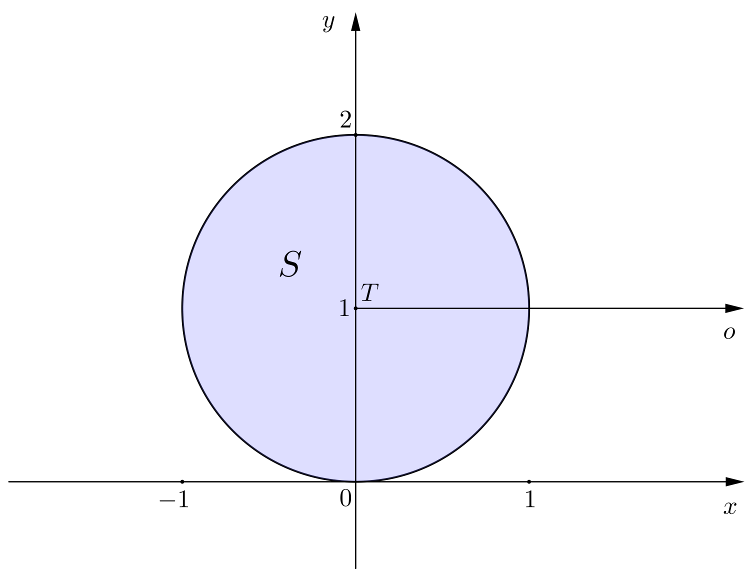
$$\begin{aligned} V = \iint_S f(x, y)dxdy &= \iint_S r\sin\varphi \cdot rdrd\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 r^2 \sin\varphi dr \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{3}r^3 \sin\varphi \Big|_{r=0}^{r=1} d\varphi = \int_0^\pi \frac{1}{3}\sin\varphi\, d\varphi \\ &= -\frac{1}{3}\cos\varphi \Big|_0^\pi = -\frac{1}{3}(-1-1) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Primjer 6.4.8. Izračunati volumen tijela omeđenog plohama $x^2+y^2=4z$, $x^2+y^2=2y$ i $z=0$.

Rješenje. Kanonski oblik jednadžbe kružnice $x^2+y^2=2y$ je $x^2+(y-1)^2=1$, odakle zaključujemo da je nivo-krivulja cilindra $x^2+y^2=2y$ kružnica polumjera $R=1$ sa središtem u $T(0,1)$. Dakle, tražimo volumen tijela omeđenog odozdo krugom $x^2+(y-1)^2\leq 1$, odozgo eliptičkim paraboloidom $x^2+y^2=4z$, a sa strane cilindrom $x^2+y^2=2y$. Volumen iznosi

$$V=\iint_S f(x,y)dxdy,$$

gdje je $f(x,y)=z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$, a S krug $x^2+(y-1)^2\leq 1$.



Slika 167: Područje integracije $S=\big\{(r,\varphi): 0\leq\varphi\leq 2\pi,\, 0\leq r\leq 1\big\}$

Prijelazom na polarni koordinatni sustav čiji je pol $T(0,1)$, a polarna os polupravac iz T u pozitivnom smjeru osi x, imamo

$$S=\big\{(r,\varphi): 0\leq\varphi\leq 2\pi,\, 0\leq r\leq 1\big\}.$$

Veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana je jednadžbama

$$x=r\cos\varphi,\quad y=1+r\sin\varphi.$$

Odavde je

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{4}(x^2+y^2) = \frac{1}{4}\big(r^2\cos^2\varphi + (1+r\sin\varphi)^2\big) \\ &= \frac{1}{4}(r^2\cos^2\varphi + 1 + 2r\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi) = \frac{1}{4}(r^2+2r\sin\varphi+1). \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} V = \iint_S f(x,y)dxdy &= \iint_S \frac{1}{4}(r^2+2r\sin\varphi+1)rdrd\varphi \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^3+2r^2\sin\varphi+r)dr \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}r^4+\frac{2}{3}r^3\sin\varphi+\frac{1}{2}r^2\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\varphi \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\sin\varphi+\frac{1}{2}\right)d\varphi \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\sin\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\varphi-\frac{2}{3}\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{3}{8}\pi. \end{aligned}$$

Primjer 6.4.9. Izračunati volumen tijela omeđenog plohama $x^2+y^2=25$, $z=\frac{1}{4}y^2$ i $z=0$.

Rješenje. Nivo-krivulja cilindra $x^2+y^2=25$ je kružnica polumjera $R=5$ sa središtem u ishodištu $O(0,0)$. Dakle, tražimo volumen tijela omeđenog odozdo krugom $x^2+y^2\leq 25$, odozgo plohom $z=\frac{1}{4}y^2$ koju dobijemo translacijom parabole $z=\frac{1}{4}y^2$ u yz-ravnini duž osi x, te sa strane cilindrom $x^2+y^2=25$. Tada je volumen tijela

$$V=\iint_S f(x,y)dxdy,$$

gdje je $f(x,y)=z=\frac{1}{4}y^2$, a S krug $x^2+y^2\leq 25$.

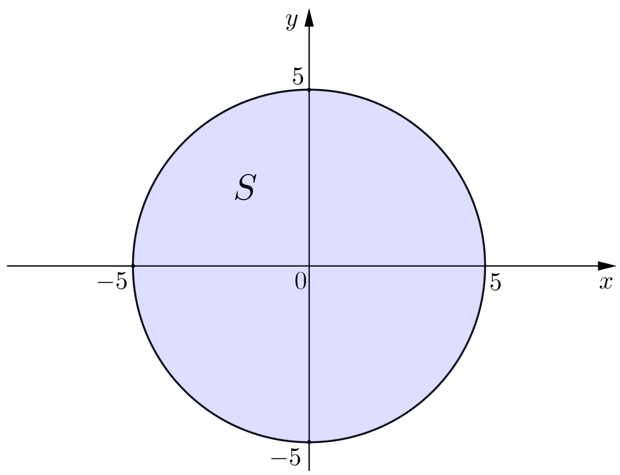
Prijeđimo na polarni koordinatni sustav s polom u ishodištu xy-ravnine i polarnom osi u pozitivnom smjeru osi x. Tada je

$$S=\big\{(r,\varphi): 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ 0\leq r\leq 5\big\}.$$

Veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana je jednadžbama

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi.$$

Odavde je $z=\frac{1}{4}r^2\sin^2\varphi$.



Slika 168: Područje integracije $S = \big\{(r, \varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi,\, 0 \le r \le 5\big\}$

Volumen tijela iznosi

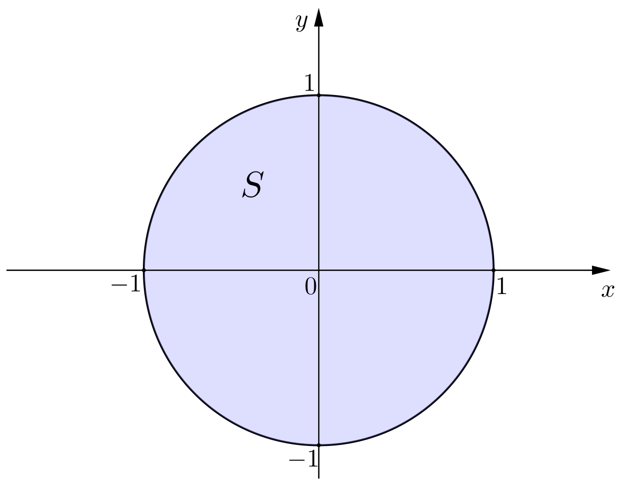
$$\begin{aligned}
V = \iint_S f(x,y)dxdy &= \iint_S \frac{1}{4}r^2 \sin^2\varphi \cdot r dr d\varphi \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 r^3 \sin^2\varphi \, dr \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}r^4 \sin^2\varphi \Big|_{r=0}^{r=5} d\varphi \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\cdot 625 \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{625}{16}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \\
&= \frac{625}{16}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\big(1-\cos(2\varphi)\big)d\varphi \\
&= \frac{625}{32}\int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{625}{32}\int_0^{2\pi}\cos(2\varphi)d\varphi \\
&= \frac{625}{32}\varphi\Big|_0^{2\pi} - \frac{625}{32}\cdot\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\Big|_0^{2\pi} = \frac{625}{16}\pi.
\end{aligned}$$

Primjer 6.4.10. Izračunati volumen tijela omeđenog plohama $x^2 + y^2 = 1$ i $z^2 = x^2 + y^2 + 1$.

Rješenje. Traži se volumen tijela omeđenog odozdo i odozgo dvoplošnim hiperboloidom $z^2 = x^2 + y^2 + 1$, a sa strane cilindrom $x^2 + y^2 = 1$. Zbog simetričnosti volumen je jednak

$$V = 2 \iint_S f(x,y)dxdy,$$

gdje je $f(x,y) = z = \sqrt{x^2+y^2+1}$, a S krug $x^2+y^2 \le 1$.



Slika 169: Područje integracije $S = \big\{(r,\varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1\big\}$

Prijeđimo na polarni koordinatni sustav s polom $O(0,0)$ i polarnom osi u pozitivnom smjeru osi x. Tada je

$$S = \big\{(r,\varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1\big\}.$$

Veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana je jednadžbama

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Odavde je $z = \sqrt{x^2+y^2+1} = \sqrt{r^2+1}$. Stoga je volumen tijela

$$\begin{aligned} V = 2\iint_S f(x,y)dxdy &= 2\iint_S \sqrt{r^2+1}\cdot r dr d\varphi \\ &= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{r^2+1}\, dr. \end{aligned}$$

Određeni integral $\int_0^1 r\sqrt{r^2+1}\,dr$ riješit ćemo metodom supstitucije varijable. Dakle,

$$\begin{aligned}\int_0^1 r\sqrt{r^2+1}\,dr &= \left|\begin{array}{ll} t=r^2+1 & r=0\Rightarrow t=1\\ dt=2rdr & r=1\Rightarrow t=2\end{array}\right| = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned} V &= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{r^2+1}\,dr = 2\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)d\varphi\\ &= \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi.\end{aligned}$$

Primjer 6.4.11. Izračunati volumen tijela unutar sfere $x^2+y^2+z^2=4$ i izvan cilindra $x^2+y^2=1$.

Rješenje. Sfera $x^2+y^2+z^2=4$ presijeca xy-ravninu po kružnici $x^2+y^2=4$. Traženi volumen jednak je

$$V = 2\iint_S f(x,y)dxdy,$$

gdje je $f(x,y)=z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, a S kružni vijenac čiji je unutarnji polumjer jednak $R_1=1$, a vanjski $R_2=2$ (slika 170).

Prijeđimo na polarni koordinatni sustav s polom u ishodištu i polarnom osi u pozitivnom smjeru osi x. Tada je

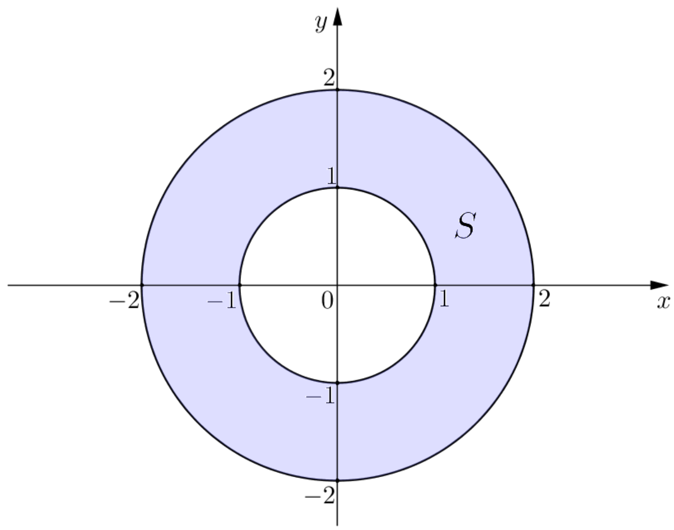
$$S=\big\{(r,\varphi): 0\le\varphi\le 2\pi,\ 1\le r\le 2\big\}.$$

Veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana je jednadžbama

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi.$$

Stoga je $z=\sqrt{4-x^2-y^2}=\sqrt{4-r^2}$. Volumen tijela je

$$\begin{aligned} V=2\iint_S f(x,y)dxdy &= 2\iint_S\sqrt{4-r^2}\cdot rdrd\varphi\\ &= 2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^2 r\sqrt{4-r^2}\,dr.\end{aligned}$$



Slika 170: Područje integracije $S = \{(r,\varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 1 \le r \le 2\}$

Određeni integral $\int_1^2 r\sqrt{4-r^2}\,dr$ riješit ćemo metodom supstitucije varijable. Dakle,

$$\begin{aligned}\int_1^2 r\sqrt{4-r^2}\,dr &= \left|\begin{array}{ll} t=4-r^2 & r=1\Rightarrow t=3 \\ dt=-2rdr & r=2\Rightarrow t=0\end{array}\right| = -\frac{1}{2}\int_3^0 \sqrt{t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Odavde je

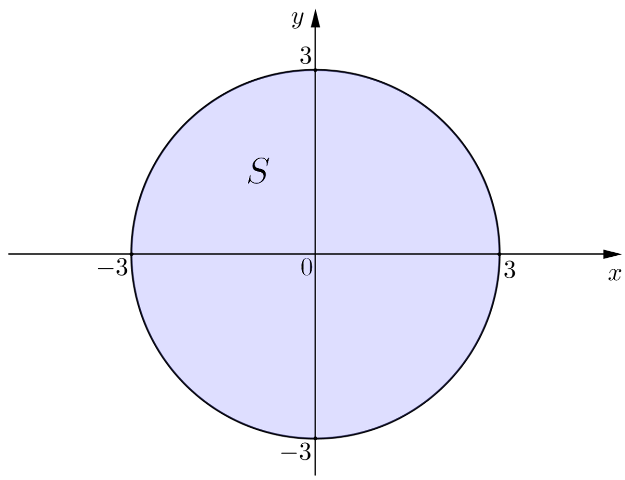
$$V = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r\sqrt{4-r^2}\,dr = 2\int_0^{2\pi}\sqrt{3}\,d\varphi = 2\sqrt{3}\,\varphi\bigg|_0^{2\pi} = 4\sqrt{3}\,\pi.$$

Primjer 6.4.12. Izračunati volumen tijela omeđenog plohama $z=\sqrt{x^2+y^2}$ i $z=3$.

Rješenje. Ravnina $z=3$ presijeca stožac $z=\sqrt{x^2+y^2}$ po kružnici $x^2+y^2=9$. Traženi volumen jednak je razlici $V=V_1-V_2$, gdje je

$$V_1 = \iint_S 3dxdy, \quad V_2 = \iint_S \sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

a S krug polumjera $R=3$ sa središtem u ishodištu.



Slika 171: Područje integracije $S = \{(r,\varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi,\, 0 \le r \le 3\}$

Prijeđimo na polarni koordinatni sustav s polom u ishodištu i polarnom osi u pozitivnom smjeru osi x. Tada je

$$S = \{(r,\varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi,\, 0 \le r \le 3\}.$$

Veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana je jednadžbama

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

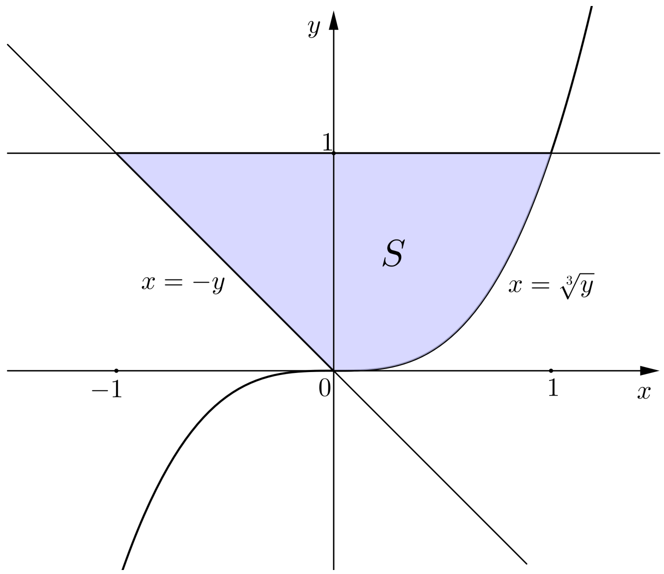
pa je $\sqrt{x^2+y^2} = r$. Volumen tijela jednak je

$$\begin{aligned} V = V_1 - V_2 &= \iint_S \left(3 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = \iint_S (3-r) r dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (3r - r^2)\, dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}r^2 - \frac{1}{3}r^3\right)\Big|_{r=0}^{r=3} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{27}{2} - 9\right) d\varphi = \frac{9}{2}\,\varphi\Big|_0^{2\pi} = 9\pi. \end{aligned}$$

Primjer 6.4.13. Izračunati površinu lika omeđenog krivuljama $y = x^3$, $y = -x$ i $y = 1$.

Rješenje. Iz $y = x^3$ slijedi $x = \sqrt[3]{y}$. Područje integracije je skup

$$S = \{(x,y) : 0 \le y \le 1,\, -y \le x \le \sqrt[3]{y}\}.$$



Slika 172: Područje integracije $S = \{(x,y) : \ 0 \leq y \leq 1, \ -y \leq x \leq \sqrt[3]{y}\}$

Sada je

$$\begin{aligned} P = \iint_S dxdy &= \int_0^1 dy \int_{-y}^{\sqrt[3]{y}} dx = \int_0^1 x \Big|_{x=-y}^{x=\sqrt[3]{y}} dy \\ &= \int_0^1 (\sqrt[3]{y} + y) dy = \left(\frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

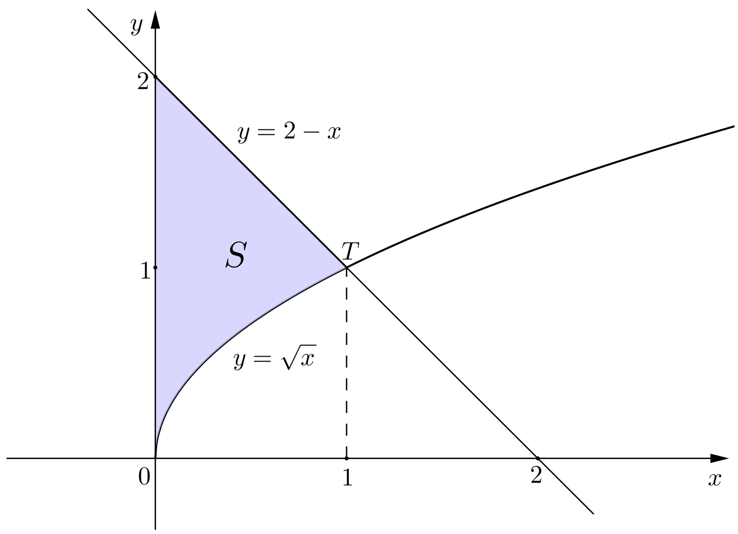
Primjer 6.4.14. Izračunati površinu lika omeđenog krivuljama $y = \sqrt{x}$, $x + y = 2$ i $x = 0$.

Rješenje. Nađimo točke u kojima se sijeku krivulje $y = \sqrt{x}$ i $x + y = 2$. Iz $x + \sqrt{x} = 2$ slijedi $\sqrt{x} = 2 - x$ odakle se kvadriranjem dobije $x = 4 - 4x + x^2$, tj. $x^2 - 5x + 4 = 0$. Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = 1$ i $x_2 = 4$. Međutim, $x_2 = 4$ nije rješenje jednadžbe $\sqrt{x} = 2 - x$. Za $x_1 = 1$ dobije se $y_1 = \sqrt{x_1} = 1$, pa se krivulje sijeku u točki $T(1,1)$. Površina zadanog lika

$$S = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \ \sqrt{x} \leq y \leq 2 - x\}$$

(slika 173) jednaka je

$$\begin{aligned} P = \iint_S dxdy &= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} dy = \int_0^1 y \Big|_{y=\sqrt{x}}^{y=2-x} dx = \int_0^1 (2 - x - \sqrt{x}) dx \\ &= \left(2x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$



Slika 173: Područje integracije $S = \big\{(x,y) :\, 0 \leq x \leq 1,\, \sqrt{x} \leq y \leq 2-x\big\}$

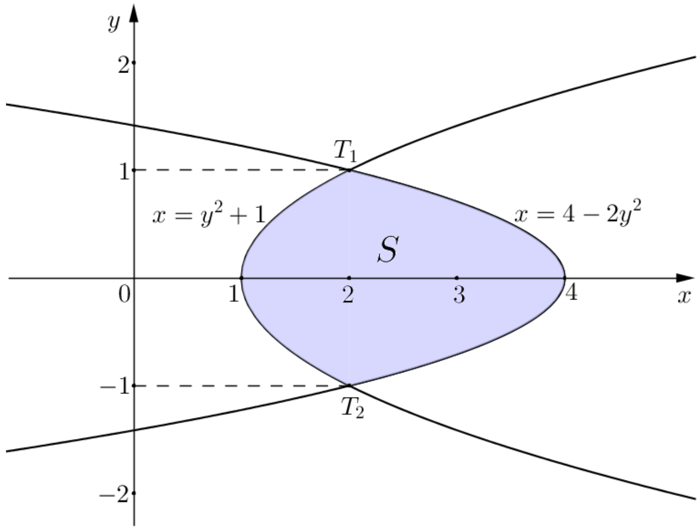
Primjer 6.4.15. Izračunati površinu lika omeđenog parabolama $y^2 = x-1$ i $2y^2 = 4-x$.

Rješenje. Nađimo točke u kojima se sijeku dane parabole. Uvrstimo li $y^2 = x-1$ u jednadžbu $2y^2 = 4-x$, dobije se $2(x-1) = 4-x$ odakle slijedi $x = 2$. Sada je $y^2 = 1$, tj. $y = \pm 1$. Prema tome, parabole se sijeku u točkama $T_1(2,1)$ i $T_2(2,-1)$. Površina zadanog lika

$$S = \big\{(x,y) : -1 \leq y \leq 1,\, y^2+1 \leq x \leq 4-2y^2\big\}$$

(slika 174) iznosi

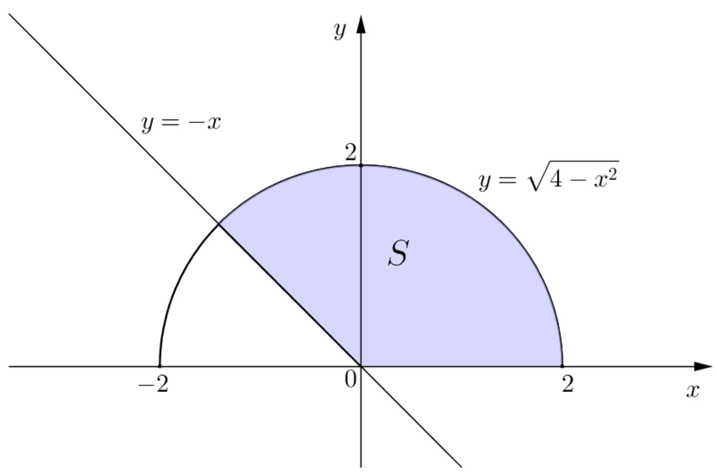
$$\begin{aligned} P = \iint_S dxdy &= \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2+1}^{4-2y^2} dx = \int_{-1}^{1} x \Big|_{x=y^2+1}^{x=4-2y^2} dy \\ &= \int_{-1}^{1} \big((4-2y^2)-(y^2+1)\big)dy = \int_{-1}^{1} (3-3y^2)dy \\ &= (3y-y^3)\Big|_{-1}^{1} = (3-1)-(-3+1) = 4. \end{aligned}$$



Slika 174: Područje integracije
$S = \{(x, y) : -1 \le y \le 1,\, y^2 + 1 \le x \le 4 - 2y^2\}$

Primjer 6.4.16. Izračunati površinu lika omeđenog krivuljama $y = -x$, $y = \sqrt{4 - x^2}$ i pozitivnim dijelom osi x.

Rješenje. Lik S čiju površinu želimo izračunati skiciran je na slici 175.



Slika 175: Područje integracije $S = \{(r, \varphi) : 0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{4},\, 0 \le r \le 2\}$

Pravac $y = -x$ zatvara s pozitivnim dijelom osi x kut $\frac{3\pi}{4}$. Prijelazom na polarni koordinatni sustav s polom u ishodištu i polarnom osi u pozitivnom smjeru osi x, dobije se

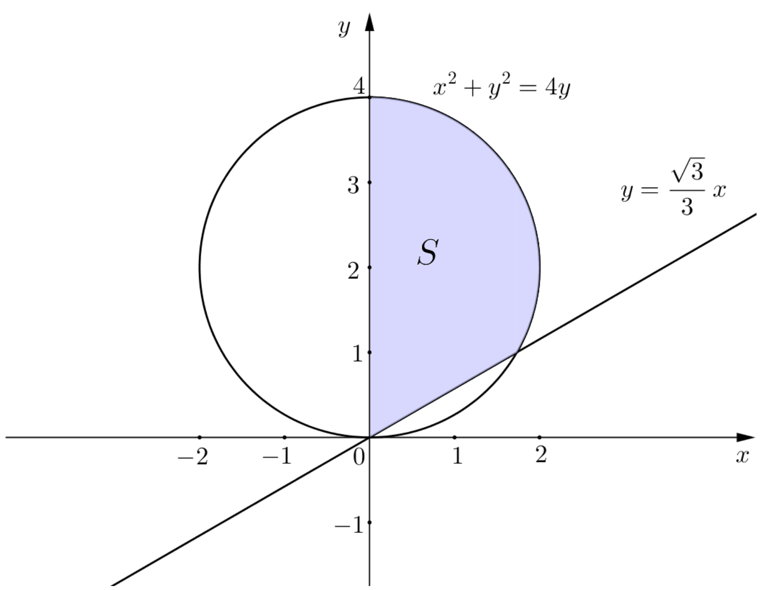
$$S = \left\{ (r,\varphi) : 0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{4},\ 0 \le r \le 2 \right\}.$$

Stoga je površina lika S jednaka

$$\begin{aligned} P = \iint_S r dr d\varphi &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^2 r dr = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 \Big|_{r=0}^{r=2} d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} \cdot 4\, d\varphi = 2\varphi \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Primjer 6.4.17. Izračunati površinu lika omeđenog krivuljama $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $x^2 + y^2 = 4y$ i osi y.

Rješenje. Kanonski oblik jednadžbe kružnice $x^2 + y^2 = 4y$ glasi $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. Pravac $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ zatvara s pozitivnim dijelom osi x kut φ_0 za koji je $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$; dakle $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$. Lik S čiju površinu računamo skiciran je na slici 176.



Slika 176: Područje integracije $S = \left\{ (r,\varphi) : \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 4\sin\varphi \right\}$

Da bismo izračunali traženu površinu prijeći ćemo na polarni koordinatni sustav s polom u ishodištu i polarnom osi u pozitivnom smjeru osi x. Veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana je jednadžbama

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Jednadžba kružnice $x^2 + y^2 = 4y$ u polarnim koordinatama glasi

$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 4r\sin\varphi,$$

tj. $r^2 = 4r\sin\varphi$, odnosno $r = 4\sin\varphi$. Za polarni kut φ točaka skupa S vrijedi $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Polarni radijus r je funkcija polarnog kuta φ. Za točke skupa S vrijedi $0 \le r \le 4\sin\varphi$. Dakle, površina lika

$$S = \left\{(r,\varphi) : \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\, 0 \le r \le 4\sin\varphi\right\}$$

iznosi

$$\begin{aligned}
P = \iint_S r\,dr\,d\varphi &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{4\sin\varphi} r\,dr = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \Big|_{r=0}^{r=4\sin\varphi} d\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot 16\sin^2\varphi\, d\varphi = 8\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\, d\varphi \\
&= 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\varphi)d\varphi = 4\varphi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\sin(2\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 2\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Primjer 6.4.18. Izračunati površinu lika omeđenog krivuljama $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$, $y = x$ i osi x.

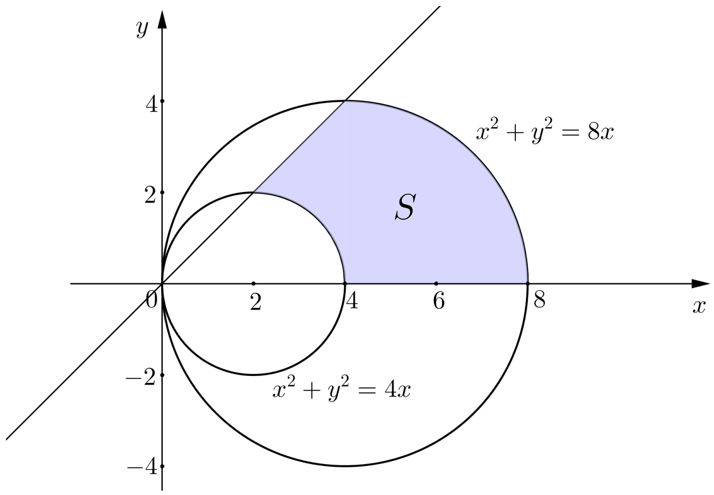
Rješenje. Kanonski oblik jednadžbe kružnice $x^2+y^2 = 4x$ je $(x-2)^2+y^2 = 4$, a kružnice $x^2 + y^2 = 8x$ je $(x-4)^2 + y^2 = 16$. Lik S čiju površinu računamo skiciran je na slici 177.

Prijeći ćemo na polarni koordinatni sustav s polom u ishodištu i polarnom osi u pozitivnom smjeru osi x. Kako je veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana jednadžbama

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

to jednadžba kružnice $x^2+y^2 = 4x$ u polarnim koordinatama glasi $(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 4r\cos\varphi$, tj. $r = 4\cos\varphi$, a jednadžba $x^2+y^2 = 8x$ poprima oblik $(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 8r\cos\varphi$, odnosno $r = 8\cos\varphi$. Stoga je

$$S = \left\{(r,\varphi) : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\, 4\cos\varphi \le r \le 8\cos\varphi\right\}.$$



Slika 177: Područje integracije
$S = \left\{(r, \varphi) : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\, 4\cos\varphi \le r \le 8\cos\varphi\right\}$

Površina lika S iznosi

$$\begin{aligned}
P = \iint_S r dr d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 \bigg|_{r=4\cos\varphi}^{r=8\cos\varphi} d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\left(64\cos^2\varphi - 16\cos^2\varphi\right) d\varphi \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi\, d\varphi = 24\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2\varphi)}{2} d\varphi \\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi + 12\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\varphi) d\varphi \\
&= 12\varphi\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + 6\sin(2\varphi)\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\pi + 6\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 3\pi + 6.
\end{aligned}$$

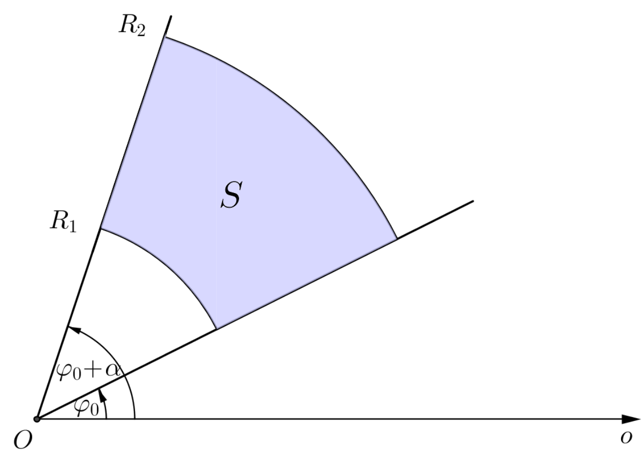
Primjer 6.4.19. Izračunati površinu isječka kružnog vijenca kojem je središnji kut α, unutarnji polumjer R_1, a vanjski R_2.

Rješenje. Površina isječka kružnog vijenca (slika 178)

$$S = \left\{(r, \varphi) : \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0 + \alpha,\, R_1 \le r \le R_2\right\}$$

jednaka je

$$\begin{aligned}
P=\iint_S r dr d\varphi &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\alpha} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} r dr = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\alpha} \frac{1}{2} r^2 \Big|_{r=R_1}^{r=R_2} d\varphi \\
&= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\alpha} \frac{1}{2}\left(R_2^2-R_1^2\right) d\varphi = \frac{1}{2}\left(R_2^2-R_1^2\right)\varphi \Big|_{\varphi_0}^{\varphi_0+\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\left(R_2^2-R_1^2\right)(\varphi_0+\alpha-\varphi_0) = \frac{1}{2}\left(R_2^2-R_1^2\right)\alpha.
\end{aligned}$$



Slika 178: Područje integracije S je isječak kružnog vijenca.

7 Elementi teorije polja

U točki 3.1 spomenuli smo kako je neke (fizikalne) veličine kao vrijeme, masu, površinu, temperaturu itd. dovoljno opisati samo skalarom (brojem), dok je za veličine poput sile, brzine, akceleracije itd. potrebno koristiti vektore. Upravo ta potreba za različitim prikazom određenih fizikalnih veličina dovodi do potrebe i za proučavanjem različitih vrsta funkcija.

Uzmimo primjerice temperaturu koja je skalarna veličina. Svakoj točki u prostoru možemo pridružiti njenu temperaturu. Time smo zapravo definirali funkciju koja točke trodimenzionalnog prostora preslikava u neki podskup skupa realnih brojeva. S druge strane, promatramo li brzinu vjetra, tada svakoj točki u prostoru pridružujemo vektor koji pokazuje u kojem smjeru vjetar puše, pri čemu duljina vektora označava iznos brzine vjetra. Takva funkcija preslikava točke trodimenzionalnog prostora u točke trodimenzionalnog prostora, tj. vektore. Ako se materijalna točka giba u prostoru, njezine se koordinate mijenjaju u vremenu, pa se gibanje opisuje funkcijom koja točke brojevnog pravca (desno od ishodišta) preslikava u točke trodimenzionalnog prostora. Primjeri ukazuju na potrebu uvođenja i analize funkcija kojima je domena i/ili slika podskup od $\mathbb{R}^3$.

U sljedećim točkama razmatramo funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$.

7.1 Vektorska funkcija

Za zadanu bazu $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ vektorskog prostora V^3, znamo da se svaki vektor $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ može poistovijetiti s točkom (x,y,z) trodimenzionalnog prostora $\mathbb{R}^3$ (v. točku 3.3). Uz tu identifikaciju vektorsku funkciju realne varijable definiramo na sljedeći način.

Vektorska funkcija realne varijable je preslikavanje $\vec{r}$ koje parametru $t\in D\subseteq\mathbb{R}$ pridružuje vektor $\vec{r}(t)$. Skup D zovemo domenom vektorske funkcije $\vec{r}$ i pišemo $\vec{r}:D\to\mathbb{R}^3$.

Pomoću vektorskih funkcija možemo opisati razne fizikalne probleme. Tako se primjerice zakon gibanja materijalne točke u prostoru u ovisnosti o vremenu t zadaje vektorskom funkcijom $t\mapsto\vec{r}(t)$.

Primjer jedne vektorske funkcije definirane za sve $t\in\mathbb{R}$ je

$$\vec{r}(t)=t\vec{i}+(t+1)\vec{j}+t^2\vec{k}.$$

Vrijednost te funkcije za $t=1$ je $\vec{r}(1)=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, što odgovara točki $(1,2,1)\in\mathbb{R}^3$.

U pravokutnom koordinatnom sustavu u $\mathbb{R}^3$ vektor je zadan s tri komponente pa iz toga proizlazi da se vektorska funkcija zadaje kao

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

gdje su $x = x(t)$, $y = y(t)$ i $z = z(t)$ realne funkcije realne varijable. Koristeći već spomenutu identifikaciju skupova V^3 i $\mathbb{R}^3$, vektorsku funkciju možemo zapisati i na sljedeći način

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Dakle, vektorska se funkcija zadaje pomoću tri realne funkcije realne varijable, što nam omogućava primjenu poznatih činjenica o realnim funkcijama realne varijable na vektorske funkcije, te olakšava uvođenje i razumijevanje analognih pojmova kao što su limes, neprekidnost, derivacija, integral i sl.

Graf vektorske funkcije $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ je skup

$$G(\vec{r}) = \big\{(t, x(t), y(t), z(t)) : t \in D\big\}.$$

Vidimo da je $G(\vec{r})$ podskup od $\mathbb{R}^4$, tj. nalazi se u 4-dimenzionalnom prostoru, te ga je kao takvoga nemoguće nacrtati. No, unatoč tome možemo zamišljati krivulju koju opisuje vrh vektora $\vec{r}(t)$ kada mijenjamo parametar $t \in D \subseteq \mathbb{R}$. Tu krivulju zovemo *putanjom* ili *trajektorijom* funkcije $\vec{r}$. Pritom izraz $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ za vektorsku funkciju $\vec{r}$ shvaćamo kao parametarski zadanu jednadžbu krivulje u prostoru:

$$\left\{ \begin{array}{c} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right. , \quad t \in D.$$

Ako je $z(t) = 0$ za svaki $t \in D \subseteq \mathbb{R}$, tada imamo parametarski zadanu jednadžbu krivulje u xy-ravnini. Ponekad je moguće takvu parametarsku jednadžbu krivulje u ravnini zapisati u eksplicitnom obliku kao $y = f(x)$.

Pogledajmo primjere nekih trajektorija.

Primjer 7.1.1. Nacrtati trajektoriju funkcije $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$.

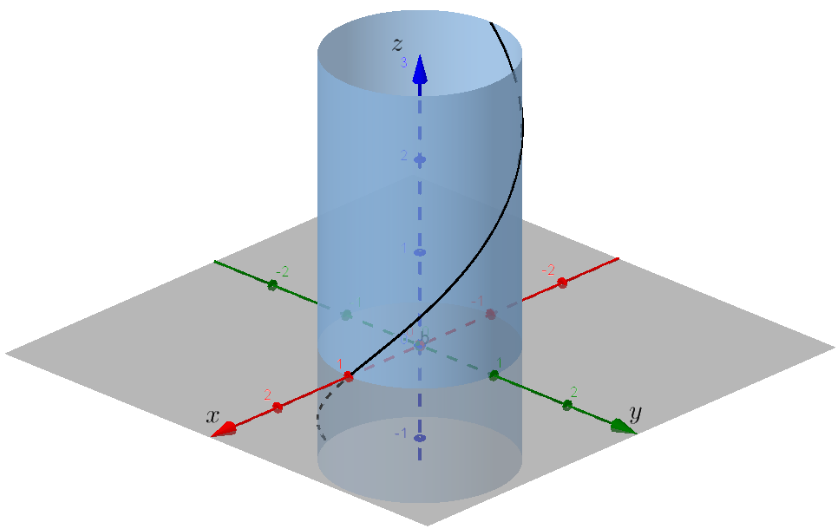
Rješenje. Iz vektorskog zapisa funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ čitamo da su koordinatne funkcije

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = t.$$

Primjećujemo da povećavanjem parametra t, z koordinata također (linearno) raste. Za svaku vrijednost parametra t, koordinatne funkcije $x = x(t)$ i $y = y(t)$ zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

pa je stoga trajektorija zavojnica (spirala) koja se proteže duž cilindra zadanog jednadžbom $x^2 + y^2 = 1$ (v. sliku 179).



Slika 179: Zavojnica

Primjer 7.1.2. Naći putanju materijalne točke koja se giba po zakonu

$$\vec{r}(t) = (1 + 2t)\vec{i} + (t + 3)\vec{j} + (2 - 2t)\vec{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Rješenje. Iz vektorskog zapisa pročitamo koordinatne funkcije:

$$x(t) = 1 + 2t, \quad y(t) = t + 3, \quad z(t) = 2 - 2t.$$

Jasno je da se ovdje radi o parametarskom obliku jednadžbe pravca. Izražavanjem parametra t u svakoj od jednadžbi dobivamo kanonsku jednadžbu pravca

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-2},$$

koji je ujedno putanja (ili trajektorija) po kojoj se točka giba.

Primjer 7.1.3. Naći krivulju zadanu jednadžbom $\vec{r}(t) = (2t+1)\vec{i} + t^2\vec{j}$, $t \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Iz $x = x(t) = 2t+1$ slijedi $t = \frac{x-1}{2}$, što uvrštavanjem u $y = y(t) = t^2$ daje

$$y = \frac{1}{4}(x-1)^2,$$

tj. jednadžbu parabole u xy-ravnini.

Primjer 7.1.4. Naći vektorsku funkciju $\vec{r} = \vec{r}(t)$ čija je putanja kružnica $x^2 + y^2 = 4$.

Rješenje.

$$x^2 + y^2 = 4 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \Longleftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1.$$

Stavimo li npr. $\frac{x}{2} = \sin t$ i $\frac{y}{2} = \cos t$, posljednja jednažba bit će zadovoljena za svaki $t \in \mathbb{R}$. Time smo dobili parametarske jednadžbe $x(t) = 2\sin t$ i $y(t) = 2\cos t$, iz čega slijedi vektorska jednadžba kružnice

$$\vec{r}(t) = 2\sin t\vec{i} + 2\cos t\vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi\rangle.$$

Primijetimo da postupak parametrizacije nije jedinstven, jer smo npr. mogli staviti $\frac{x}{2} = \cos(3t)$ i $\frac{y}{2} = \sin(3t)$, što bi dalo drugačiju jednadžbu iste kružnice.

Pojam limesa, neprekidnosti i derivacije vektorske funkcije

Pojmovi limesa, neprekidnosti i derivacije vektorske funkcije prirodno se prenose s realnih funkcija realne varijable.

Neka je dana vektorska funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$ definirana na nekom otvorenom intervalu I oko točke t_0, osim možda u točki t_0. Za vektor $\vec{c}$ kažemo da je *limes vektorske funkcije* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ u točki t_0 ako vrijedi

$$\lim_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{c}| = 0.$$

Tada pišemo

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{c}.$$

Dakle, $\vec{c}$ je vektor kojemu teži funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$ kada $t \to t_0$.

Zapišemo li vektorsku funkciju kao $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, tada se računanje limesa ove funkcije svodi na računanje triju limesa realnih funkcija $x = x(t)$, $y = y(t)$ i $z = z(t)$. Vrijedi

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t \to t_0} x(t)\vec{i} + \lim_{t \to t_0} y(t)\vec{j} + \lim_{t \to t_0} z(t)\vec{k},$$

uz pretpostavku da sva tri limesa s desne strane gornje jednakosti postoje.

Primjer 7.1.5. Izračunati $\lim_{t\to 2}\vec{r}(t)$ za vektorsku funkciju $\vec{r}(t) = \frac{t^2-4}{t-2}\,\vec{i} + (t+1)\vec{j} + e^{t-2}\vec{k}$.

Rješenje. Potrebno je izračunati odgovarajuće limese koordinatnih funkcija:

$$x(t) = \frac{t^2-4}{t-2}, \quad y(t) = t+1, \quad z(t) = e^{t-2}.$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 2} x(t) &= \lim_{t\to 2}\frac{t^2-4}{t-2} = \lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t+2)}{t-2} = \lim_{t\to 2}(t+2) = 4,\\
\lim_{t\to 2} y(t) &= \lim_{t\to 2}(t+1) = 3,\\
\lim_{t\to 2} z(t) &= \lim_{t\to 2} e^{t-2} = e^0 = 1,
\end{aligned}$$

slijedi

$$\lim_{t\to 2}\vec{r}(t) = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}.$$

Koristeći komponentni zapis vektorske funkcije možemo analogno definirati i pojam neprekidnosti, te derivaciju vektorske funkcije.

Neka je $r = \vec{r}(t)$ vektorska funkcija definirana na nekom otvorenom intervalu I oko točke t_0. Kažemo da je vektorska funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *neprekidna u točki* t_0 ako je

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$

Ako je $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, tada je $\vec{r} = \vec{r}(t)$ neprekidna u točki t_0 ako i samo ako su realne funkcije $x = x(t)$, $y = y(t)$ i $z = z(t)$ neprekidne u t_0, tj. vrijedi

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x(t_0), \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = y(t_0), \quad \lim_{t\to t_0} z(t) = z(t_0).$$

Analogno prirastu realnih funkcija realne varijable, definira se *prirast vektorske funkcije* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ u točki t_0 kao vektor

$$\Delta\vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0).$$

U skladu s tim, *derivacija vektorske funkcije* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *u točki* $t_0 \in I$, u oznaci $\vec{r}\,'(t_0)$ ili $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$, definira se kao

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

pod uvjetom da taj limes postoji. U tom slučaju kažemo da je vektorska funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *derivabilna* ili *diferencijabilna* u točki t_0.

Ekvivalentno, koristeći komponentni zapis $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, slijedi

$$\vec{r}\,'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k},$$

ako derivacije komponentnih funkcija u točki t_0 postoje.

Ako postoji derivacija vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ za svaki $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, tada je $t \mapsto \vec{r}\,'(t)$ također vektorska funkcija zadana na I, koju označavamo s $\vec{r}\,'$ odnosno $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

Kao i kod realnih funkcija realne varijable, računanje derivacija višeg reda svodi se na uzastopno deriviranje, tj. $\dfrac{d^n\vec{r}}{dt^n} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d^{n-1}\vec{r}}{dt^{n-1}}\right)$, za $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Primjer 7.1.6. Izračunati derivaciju vektorske funkcije $\vec{r}(t) = \left(2^t + 3\right)\vec{i} + \ln(t^2+5)\vec{j} + \operatorname{arctg}\frac{t}{2}\,\vec{k}$.

Rješenje. Prvo ćemo zapisati koordinatne funkcije i izračunati njihove derivacije:

$$\begin{aligned}
x(t) = 2^t + 3 &\implies x'(t) = 2^t \ln 2,\\
y(t) = \ln\left(t^2+5\right) &\implies y'(t) = \frac{2t}{t^2+5},\\
z(t) = \operatorname{arctg}\frac{t}{2} &\implies z'(t) = \frac{2}{4+t^2}.
\end{aligned}$$

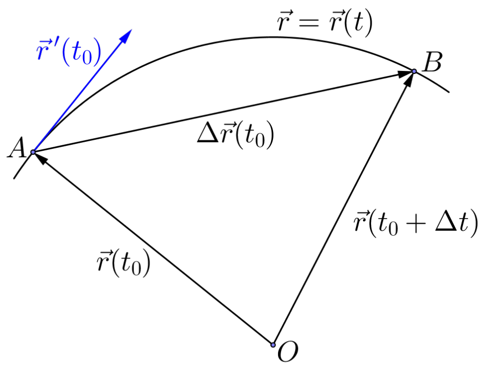
Stoga je derivacija $\vec{r}\,'$ vektorske funkcije $\vec{r}$ jednaka

$$\vec{r}\,'(t) = (2^t \ln 2)\vec{i} + \frac{2t}{t^2+5}\vec{j} + \frac{2}{4+t^2}\vec{k}\ .$$

Geometrijsko značenje derivacije

Znamo da je vrijednost derivacije realne funkcije realne varijable u točki koeficijent smjera tangente na graf te funkcije u zadanoj točki. Derivacija vektorske funkcije u nekoj konkretnoj točki (što je vektor!) također ima geometrijsko značenje. Ako s $\vec{r}(t_0)$ označimo vektor položaja točke A, a s $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$ vektor položaja točke B (koje leže na trajektoriji vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$), onda je $\Delta\vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ vektor smjera sekante koja prolazi kroz točke A i B.

Vektor $\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ ima isti smjer kao i $\Delta\vec{r}(t_0)$, te kada $\Delta t \to 0$ točka B približava se (po trajektoriji vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$) točki A, a sekanta kroz točke A i B teži prema tangenti u točki A. Prema tome, derivacija $\vec{r}\,'(t_0)$ vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ za $t = t_0$ je *vektor smjera tangente* na trajektoriju vektorske funkcije u točki $\vec{r}(t_0)$ (slika 180).



Slika 180: Geometrijsko značenje derivacije

Kinematičko značenje derivacije

Ako parametar t ima značenje vremena, a vektorska funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$ je zakon gibanja materijalne točke u prostoru, tada pojam derivacije vektorske funkcije također dobiva određeno značenje. Naime, $\Delta\vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ je tada vektor koji označava u kojem smjeru, te koliko se materijalna točka pomaknula u vremenu Δt. Stoga je $\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ vektor srednje brzine u vremenu Δt. Pustimo li da $\Delta t \to 0$, tada je vektor srednje brzine sve bliži vektoru stvarne brzine u trenutku t_0. Prema tome,

$$\vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \vec{r}\,'(t_0),$$

tj. prva derivacija funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ u trenutku t_0 je *vektor brzine materijalne točke u trenutku* t_0, u oznaci $\vec{v}(t_0)$. To znači da je derivacija zakona gibanja $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektorska funkcija brzine materijalne točke, tj. $\vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t)$.

Derivacija vektorske funkcije $\vec{v} = \vec{v}(t)$ u trenutku t_0 je *vektor akceleracije materijalne točke u trenutku u* t_0, u oznaci $\vec{a}(t_0)$. Dakle,

$$\vec{a}(t_0) = \vec{v}\,'(t_0).$$

Prema tome, druga derivacija zakona gibanja $\vec{r} = \vec{r}(t)$ je vektorska funkcija akceleracije materijalne točke, tj. $\vec{r}\,''(t) = \vec{v}\,'(t) = a(t)$.

Primjer 7.1.7. Izračunati $\vec{r}\,'(0)$ i naći jednadžbu tangente na trajektoriju vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ u točki $\vec{r}(0)$ za sljedeće funkcije:

(a) $\vec{r}(t) = (e^t + 1)\vec{i} + (e^{2t} + 1)\vec{j} + (e^{t^2} + 1)\vec{k}$,

(b) $\vec{r}(t) = \cos(2t)\vec{i} + \sin(2t)\vec{j} + t\vec{k}$.

Rješenje. (a) Koordinatne funkcije su

$$x(t) = e^t + 1, \quad y(t) = e^{2t} + 1, \quad z(t) = e^{t^2} + 1,$$

a pripadne derivacije

$$x'(t) = e^t, \quad y'(t) = 2e^{2t}, \quad z'(t) = 2te^{t^2}.$$

Prema tome,

$$\vec{r}\,'(0) = x'(0)\vec{i} + y'(0)\vec{j} + z'(0)\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j}.$$

Tangenta dodiruje trajektoriju u točki

$$\vec{r}(0) = (x(0), y(0), z(0)) = (2, 2, 2).$$

S obzirom da je $\vec{r}\,'(0)$ vektor smjera tangente na trajektoriju u točki $\vec{r}(0)$, slijedi da je kanonski oblik jednadžbe tangente

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{0}.$$

(b) Analogno kao i u (a) dijelu zadatka potrebno je izračunati $\vec{r}(0)$ i $\vec{r}\,'(0)$. Imamo

$$\begin{aligned} x(t) = \cos(2t) &\implies x'(t) = -2\sin(2t), \\ y(t) = \sin(2t) &\implies y'(t) = 2\cos(2t), \\ z(t) = t &\implies z'(t) = 1. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} \vec{r}(0) &= (x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 0), \\ \vec{r}\,'(0) &= x'(0)\vec{i} + y'(0)\vec{j} + z'(0)\vec{k} = 2\vec{j} + \vec{k}. \end{aligned}$$

Tangenta je pravac koji prolazi točkom $\vec{r}(0)$ i ima vektor smjera $\vec{r}\,'(0)$, pa stoga kanonski oblik jednadžbe tangente glasi

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

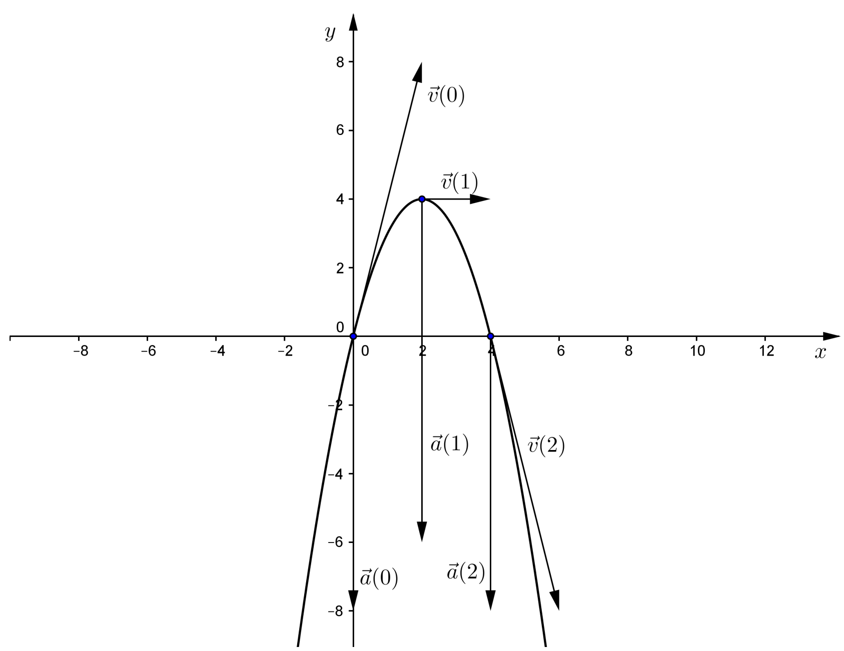
Primjer 7.1.8. Jednadžba gibanja materijalne točke dana je vektorskom funkcijom $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (8t - 4t^2)\vec{j}$.

(a) Po kojoj krivulji se kreće materijalna točka?

(b) Naći vektore brzine i akceleracije materijalne točke, te njihove iznose.

(c) Nacrtati krivulju po kojoj se giba materijalna točka, te vektore brzine i akceleracije u trenutcima $t = 0, 1, 2$.

Rješenje. (a) Primijetimo da je $z(t) = 0$ za svaki t, pa se gibanje materijalne točke odvija u xy-ravnini. Iz $x = x(t) = 2t$ slijedi $t = \frac{x}{2}$ što uvrštavanjem u $y = y(t) = 8t - 4t^2$ daje $y = -x^2 + 4x$, tj. čestica se giba po paraboli s nultočkama $x_1 = 0$ i $x_2 = 4$.



Slika 181: Putanja materijalne točke

(b) Vektorska funkcija brzine materijalne točke je

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = 2\vec{i} + (8 - 8t)\vec{j},$$

pa je iznos brzine $|\vec{v}(t)| = \sqrt{4 + (8 - 8t)^2}$, iz čega vidimo da se i smjer i iznos brzine gibanja materijalne točke mijenjaju u ovisnosti o trenutku t.

Akceleracija je derivacija brzine, pa slijedi

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = -8\vec{j},$$

a iznos akceleracije je $|\vec{a}(t)| = 8$. Dakle, akceleracija je konstantna, tj. ne ovisi o trenutku t.

(c)

$$\begin{aligned}
t = 0 \quad &\Rightarrow \quad \vec{r}(0) = \vec{0}, \quad \vec{v}(0) = 2\vec{i} + 8\vec{j}, \\
t = 1 \quad &\Rightarrow \quad \vec{r}(1) = 2\vec{i} + 4\vec{j}, \quad \vec{v}(1) = 2\vec{i}, \\
t = 2 \quad &\Rightarrow \quad \vec{r}(2) = 4\vec{i}, \quad \vec{v}(2) = 2\vec{i} - 8\vec{j}.
\end{aligned}$$

Neka su $\vec{r} = \vec{r}(t)$ i $\vec{s} = \vec{s}(t)$ vektorske funkcije, $u = u(t)$ realna funkcija, te $k \in \mathbb{R}$, $\vec{c} \in V^3$. Tada se definiraju sljedeće operacije s funkcijama:

1. zbrajanje i oduzimanje vektorskih funkcija

   $(\vec{r} \pm \vec{s})(t) = \vec{r}(t) \pm \vec{s}(t)$,

2. množenje vektorske funkcije skalarom

   $(k \cdot \vec{r})(t) = k\,\vec{r}(t)$,

3. skalarno množenje vektorske funkcije vektorom

   $(\vec{c} \cdot \vec{r})(t) = \vec{c} \cdot \vec{r}(t)$,

4. vektorsko množenje vektorske funkcije vektorom

   $(\vec{c} \times \vec{r})(t) = \vec{c} \times \vec{r}(t)$,

5. množenje realne i vektorske funkcije

   $(u \cdot \vec{r})(t) = u(t)\,\vec{r}(t)$,

6. skalarno množenje vektorskih funkcija

   $(\vec{r} \cdot \vec{s})(t) = \vec{r}(t) \cdot \vec{s}(t)$,

7. vektorsko množenje vektorskih funkcija

   $(\vec{r} \times \vec{s})(t) = \vec{r}(t) \times \vec{s}(t)$.

Uočimo da su $t \mapsto (\vec{c} \cdot \vec{r})(t)$ i $t \mapsto (\vec{r} \cdot \vec{s})(t)$ realne funkcije realne varijable, dok su ostale funkcije vektorske.

Za deriviranje ovih funkcija vrijede sljedeća pravila:

1. $\dfrac{d}{dt}(\vec{r} \pm \vec{s}) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \pm \dfrac{d\vec{s}}{dt}$,
2. $\dfrac{d}{dt}(k \cdot \vec{r}) = k\dfrac{d\vec{r}}{dt}$,
3. $\dfrac{d}{dt}(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \vec{c} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt}$,
4. $\dfrac{d}{dt}(\vec{c} \times \vec{r}) = \vec{c} \times \dfrac{d\vec{r}}{dt}$,
5. $\dfrac{d}{dt}(u \cdot \vec{r}) = \dfrac{du}{dt}\vec{r} + u\dfrac{d\vec{r}}{dt}$,
6. $\dfrac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{s}) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{s} + \vec{r} \cdot \dfrac{d\vec{s}}{dt}$,
7. $\dfrac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{s}) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{s} + \vec{r} \times \dfrac{d\vec{s}}{dt}$.

Primijetimo da su ova pravila u skladu s poznatim pravilima za deriviranje realnih funkcija realne varijable, što nije iznenađujuće budući da se deriviranje vektorske funkcije svodi na deriviranje triju realnih funkcija.

Diferencijal vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ definiramo kao

$$d\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t)dt,$$

što je analogno definiciji diferencijala realne funkcije realne varijable. Diferencijal je vektor istog smjera kao i $\vec{r}\,'(t)$, te predstavlja dobru aproksimaciju promjene vrijednosti vektorske funkcije $\vec{r}(t)$ za male promjene parametra t, tj.

$$d\vec{r}(t) \approx \Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

za male $dt = \Delta t$. Računanje diferencijala svodi se na deriviranje vektorske funkcije, tj. ako je $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, onda je

$$d\vec{r}(t) = (x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k})dt.$$

Primjer 7.1.9. Dane su funkcije $u(t) = t^2$, $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \sin t\vec{j} - \ln t\vec{k}$, $\vec{s}(t) = \vec{i} + \sqrt{t}\vec{j} + t^3\vec{k}$ i vektor $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Naći $3\vec{r}(t)$, $(\vec{c} \cdot \vec{r})(t)$, $(\vec{c} \times \vec{r})(t)$, $(u \cdot \vec{r})(t)$, $(\vec{r} \cdot \vec{s})(t)$ i $(\vec{r} \times \vec{s})(t)$ i njihove derivacije.

Rješenje.

$$\begin{aligned} 3\vec{r}(t) &= 3t\vec{i} + 3\sin t\vec{j} - 3\ln t\vec{k}, \\ (\vec{c} \cdot \vec{r})(t) &= (2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) \cdot (t\vec{i} + \sin t\vec{j} - \ln t\vec{k}) = 2t - \sin t + \ln t, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\vec{c}\times\vec{r})(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ t & \sin t & -\ln t \end{vmatrix} \\
&= (\ln t+\sin t)\vec{i}-(t-2\ln t)\vec{j}+(2\sin t+t)\vec{k}, \\
(u\cdot\vec{r})(t) &= t^3\vec{i}+t^2\sin t\vec{j}-t^2\ln t\vec{k}, \\
(\vec{r}\cdot\vec{s})(t) &= (t\vec{i}+\sin t\vec{j}-\ln t\vec{k})\cdot(\vec{i}+\sqrt{t}\vec{j}+t^3\vec{k}) \\
&= t+\sqrt{t}\sin t-t^3\ln t, \\
(\vec{r}\times\vec{s})(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & \sin t & -\ln t \\ 1 & \sqrt{t} & t^3 \end{vmatrix} \\
&= (t^3\sin t+\sqrt{t}\ln t)\vec{i}-(t^4+\ln t)\vec{j}+(t\sqrt{t}-\sin t)\vec{k}.
\end{aligned}
$$

Derivacije funkcija iznose redom:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(3\vec{r})(t) &= \frac{d}{dt}(3t\vec{i}+3\sin t\vec{j}-3\ln t\vec{k}) = 3\vec{i}+3\cos t\vec{j}-\frac{3}{t}\vec{k}, \\
\frac{d}{dt}(\vec{c}\cdot\vec{r})(t) &= \frac{d}{dt}(2t-\sin t+\ln t) = 2-\cos t+\frac{1}{t}, \\
\frac{d}{dt}(\vec{c}\times\vec{r})(t) &= \frac{d}{dt}\big((\ln t+\sin t)\vec{i}-(t-2\ln t)\vec{j}+(2\sin t+t)\vec{k})\big) \\
&= \left(\frac{1}{t}+\cos t\right)\vec{i}-\left(1-\frac{2}{t}\right)\vec{j}+(2\cos t+1)\vec{k}, \\
\frac{d}{dt}(u\cdot\vec{r})(t) &= \frac{d}{dt}\big(t^3\vec{i}+t^2\sin t\vec{j}-t^2\ln t\,\vec{k}\big) \\
&= 3t^2\vec{i}+(2t\sin t+t^2\cos t)\vec{j}-(2t\ln t+t)\vec{k}, \\
\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{s})(t) &= \frac{d}{dt}\big(t+\sqrt{t}\sin t-t^3\ln t\big) \\
&= 1+\frac{1}{2\sqrt{t}}\sin t+\sqrt{t}\cos t-3t^2\ln t-t^2, \\
\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{s})(t) &= \frac{d}{dt}\big((t^3\sin t+\sqrt{t}\ln t)\vec{i}-(t^4+\ln t)\vec{j}+(t\sqrt{t}-\sin t)\vec{k})\big) \\
&= \left(3t^2\sin t+t^3\cos t+\frac{1}{2\sqrt{t}}\ln t+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\vec{i} \\
&- \left(4t^3+\frac{1}{t}\right)\vec{j}+\left(\frac{3}{2}\sqrt{t}-\cos t\right)\vec{k}.
\end{aligned}
$$

Do istih se rezultata može doći primjenom pravila za derivaciju umnoška funkcija. Zaista,

$$
\frac{d}{dt}(3\vec{r})(t) = 3\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = 3\left(\vec{i}+\cos t\vec{j}-\frac{1}{t}\vec{k}\right) = 3\vec{i}+3\cos t\vec{j}-\frac{3}{t}\vec{k},
$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{c}\cdot\vec{r})(t)=\vec{c}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}(t)=(2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})\cdot\left(\vec{i}+\cos t\vec{j}-\frac{1}{t}\vec{k}\right)=2-\cos t+\frac{1}{t},$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\vec{c}\times\vec{r})(t) &= \vec{c}\times\frac{d\vec{r}}{dt}(t)=(2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})\times\left(\vec{i}+\cos t\vec{j}-\frac{1}{t}\vec{k}\right)\\
&= \left(\frac{1}{t}+\cos t\right)\vec{i}-\left(1-\frac{2}{t}\right)\vec{j}+(2\cos t+1)\vec{k},\\
\frac{d}{dt}(u\cdot\vec{r})(t) &= \frac{du}{dt}(t)\vec{r}(t)+u(t)\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\\
&= 2t(t\vec{i}+\sin t\vec{j}-\ln t\vec{k})+t^2\left(\vec{i}+\cos t\vec{j}-\frac{1}{t}\vec{k}\right)\\
&= 3t^2\vec{i}+(2t\sin t+t^2\cos t)\vec{j}-(2t\ln t+t)\vec{k},\\
\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{s})(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\cdot\vec{s}(t)+\vec{r}(t)\cdot\frac{d\vec{s}}{dt}(t)\\
&= \left(\vec{i}+\cos t\vec{j}-\frac{1}{t}\vec{k}\right)\cdot(\vec{i}+\sqrt{t}\vec{j}+t^3\vec{k})\\
&+ (t\vec{i}+\sin t\vec{j}-\ln t\vec{k})\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{j}+3t^2\vec{k}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2\sqrt{t}}\sin t+\sqrt{t}\cos t-3t^2\ln t-t^2,\\
\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{s})(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\times\vec{s}(t)+\vec{r}(t)\times\frac{d\vec{s}}{dt}(t)\\
&= \left(\vec{i}+\cos t\vec{j}-\frac{1}{t}\vec{k}\right)\times(\vec{i}+\sqrt{t}\vec{j}+t^3\vec{k})\\
&+ (t\vec{i}+\sin t\vec{j}-\ln t\vec{k})\times\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{j}+3t^2\vec{k}\right)\\
&= \left(3t^2\sin t+t^3\cos t+\frac{1}{2\sqrt{t}}\ln t+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\vec{i}\\
&- \left(4t^3+\frac{1}{t}\right)\vec{j}+\left(\frac{3}{2}\sqrt{t}-\cos t\right)\vec{k}.
\end{aligned}$$

Pojam integrala vektorske funkcije

Pojmovi neodređenog i određenog integrala vektorske funkcije prirodno se prenose s realnih funkcija realne varijable.

Primitivna funkcija vektorske funkcije $\vec{r}=\vec{r}(t)$ je vektorska funkcija $\vec{R}=\vec{R}(t)$ koja ima svojstvo da je $\vec{R}\,'(t)=\vec{r}(t)$.

Ako je $\vec{R}=\vec{R}(t)$ primitivna funkcija vektorske funkcije $\vec{r}=\vec{r}(t)$, onda je i svaka funkcija oblika

$$t\mapsto\vec{R}(t)+\vec{c},$$

gdje je $\vec{c} \in V^3$ proizvoljni vektor, također primitivna funkcija funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Nadalje, svake se dvije primitivne funkcije vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ razlikuju za neki vektor $\vec{c} \in V^3$.

Skup svih primitivnih funkcija funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ nazivamo *neodređenim integralom* funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ i označavamo s

$$\int \vec{r}(t)dt = \left\{\vec{R}(t) + \vec{c} : \vec{c} \in V^3\right\},$$

gdje je $\vec{R} = \vec{R}(t)$ jedna primitivna funkcija funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Kraće zapisujemo

$$\int \vec{r}(t)dt = \vec{R}(t) + \vec{c}.$$

Kako je

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

izračunavanje neodređenog integrala svodi se na integriranje komponentnih funkcija $x = x(t)$, $y = y(t)$ i $z = z(t)$, tj.

$$\vec{R}(t) = \int \vec{r}(t)dt = \vec{i}\int x(t)dt + \vec{j}\int y(t)dt + \vec{k}\int z(t)dt + \vec{c}\ .$$

Isto tako, svojstva neodređenog integrala vektorske funkcije proizlaze iz svojstava neodređenog integrala realnih funkcija, tj. vrijedi:

1. $\displaystyle\int (\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t))dt = \int \vec{r}_1(t)dt \pm \int \vec{r}_2(t)dt,$

2. $\displaystyle\int k\vec{r}(t)dt = k\int \vec{r}(t)dt \quad (k \in \mathbb{R}),$

3. $\displaystyle\int \vec{c}\cdot\vec{r}(t)dt = \vec{c}\cdot\int \vec{r}(t)dt \quad (\vec{c} \in V^3),$

4. $\displaystyle\int \vec{c}\times\vec{r}(t)dt = \vec{c}\times\int \vec{r}(t)dt \quad (\vec{c} \in V^3).$

Primjer 7.1.10. Naći brzinu $\vec{v} = \vec{v}(t)$ i zakon gibanja $\vec{r} = \vec{r}(t)$ materijalne točke, ako je akceleracija dana s $\vec{a}(t) = \sin t\,\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$, te znamo da je $\vec{v}(0) = -2\vec{i}$ i $\vec{r}(0) = \vec{0}$.

Rješenje. Sjetimo se da je akceleracija $\vec{a} = \vec{a}(t)$ derivacija brzine $\vec{v} = \vec{v}(t)$, iz čega slijedi $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt$, tj.

$$\vec{v}(t) = \vec{i}\int \sin t dt + \vec{j}\int 2tdt + \vec{k}\int 3t^2dt = -\cos t\,\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k} + \vec{v}_1,$$

gdje je $\vec{v}_1$ konstantan vektor kojeg ćemo odrediti iz uvjeta $\vec{v}(0) = -2\vec{i}$. Kako je

$$\vec{v}(0) = -\vec{i} + \vec{v}_1 = -2\vec{i},$$

slijedi $\vec{v}_1 = -\vec{i}$. Dakle,

$$\vec{v}(t) = (-1 - \cos t)\,\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}.$$

Analogno, brzina $\vec{v} = \vec{v}(t)$ je derivacija zakona gibanja $\vec{r} = \vec{r}(t)$, pa slijedi $\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt$, tj.

$$\vec{r}(t) = \vec{i}\int(-1-\cos t)dt + \vec{j}\int t^2dt + \vec{k}\int t^3dt = (-t-\sin t)\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + \frac{t^4}{4}\vec{k} + \vec{r}_1,$$

gdje je $\vec{r}_1$ konstantan vektor kojeg ćemo odrediti iz uvjeta $\vec{r}(0) = \vec{0}$. Kako je

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_1 = \vec{0},$$

to je zakon gibanja dan s

$$\vec{r}(t) = (-t - \sin t)\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + \frac{t^4}{4}\vec{k}.$$

Pojam *određenog integrala* vektorske funkcije analogan je pojmu određenog integrala realnih funkcija, te i ovdje vrijedi Newton–Leibnizova formula. Dakle, *određeni integral* vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ u granicama od t_1 do t_2 je vektor

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{r}(t)dt = \vec{R}(t_2) - \vec{R}(t_1),$$

gdje je $\vec{R} = \vec{R}(t)$ primitivna funkcija funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Primjer 7.1.11. Za vektorsku funkciju $\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + t^3\vec{j} - 2\vec{k}$ naći $\int \vec{r}(t)dt$ i $\int_{-1}^{1} \vec{r}(t)dt$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int \vec{r}(t)dt &= \vec{i}\int(t^2-1)dt + \vec{j}\int t^3dt - 2\vec{k}\int dt \\
&= \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\vec{i} + \frac{t^4}{4}\vec{j} - 2t\vec{k} + \vec{c}, \\
\int_{-1}^{1} \vec{r}(t)dt &= \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_{-1}^{1}\vec{i} + \frac{t^4}{4}\Bigg|_{-1}^{1}\vec{j} - 2t\Bigg|_{-1}^{1}\vec{k} \\
&= -\frac{4}{3}\vec{i} - 4\vec{k}.
\end{aligned}$$

7.2 Skalarno i vektorsko polje

U poglavlju 5 proučavali smo realne funkcije više varijabli, tj. funkcije

$$f : A \to \mathbb{R},$$

koje uređenoj n-torci $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ pridružuju realan broj, u oznaci $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$. Takva preslikavanja zovemo *skalarnim poljima* i ona su od iznimne važnosti u raznim primjenama matematike (npr. u fizici i raznim inženjerskim strukama).

Najčešće se koriste skalarna polja u prostorima dimenzije $n = 2$ i $n = 3$. Primjerice, funkcija koja svakoj točki u prostoru pridružuje njenu temperaturu je skalarno polje. Isto tako, funkcija koja svakoj točki u prostoru pridružuje gustoću okoline u kojoj se ta točka nalazi je također primjer skalarnog polja.

Za razumijevanje izgleda i ponašanja skalarnog polja znatno nam pomažu tzv. *nivo-plohe*. Nivo-plohu skalarnog polja f čine sve točke $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ koje zadovoljavaju jednadžbu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k$, gdje je $k \in \mathrm{Im}(f)$ konstanta. Dakle, nivo-ploha je ploha na kojoj skalarno polje ima konstantnu vrijednost.

Primjer 7.2.1. Za zadano skalarno polje f i zadani nivo $k \in \mathbb{R}$ naći nivo-plohe ako je:

(a) $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2$, $k = -1, 0, 3$,

(b) $f(x, y, z) = x + y$, $k = 0, 1, 2$,

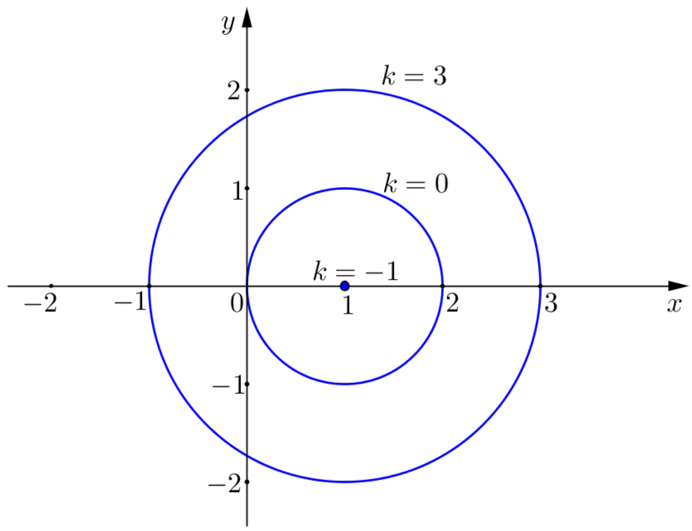
(c) $f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2$, $k = 8, 12$.

Rješenje. (a) U ovom primjeru f je skalarno polje iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$, pa će nivo-plohe zapravo biti nivo-krivulje u xy-ravnini.

Iz $f(x, y) = k$, za $k = -1$ slijedi $x^2 - 2x + y^2 = -1$, što je ekvivalentno s $(x - 1)^2 + y^2 = 0$. Jedino rješenje ove jednadžbe je točka $(1, 0)$.

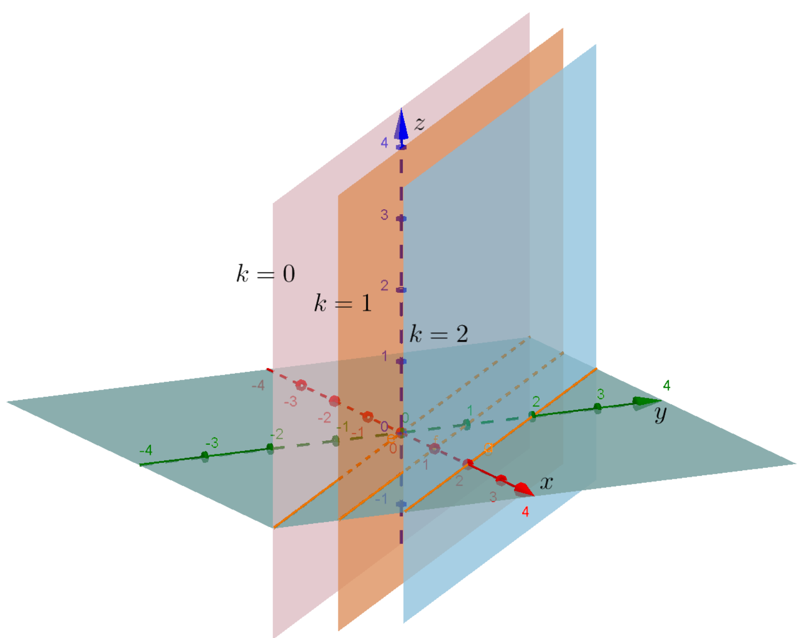
Za $k = 0$ imamo $x^2 - 2x + y^2 = 0$, odnosno $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, što je jednadžba kružnice polumjera $r = 1$ sa središtem u točki $(1, 0)$.

Za $k = 3$ imamo $x^2 - 2x + y^2 = 3$, odnosno $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, što je jednadžba kružnice polumjera $r = 2$ sa središtem u točki $(1, 0)$. Dobivene nivo-krivulje prikazane su na slici 182.



Slika 182: Nivo-krivulje skalarnog polja $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2$

(b) Ovdje je skalarno polje f zadano na $\mathbb{R}^3$, tako da će nivo-plohe biti plohe u $\mathbb{R}^3$ (slika 183).



Slika 183: Nivo-plohe skalarnog polja $f(x, y, z) = x + y$

Iz $f(x, y, z) = k$, za $k = 0$ slijedi $x + y = 0$, tj. dobije se jednadžba ravnine koja je paralelna sa z-osi, te siječe xy-ravninu po pravcu $y = -x$.

Za $k = 1$ dobije se $x + y = 1$, što je jednadžba ravnine koja je paralelna sa z-osi, te siječe xy-ravninu po pravcu $y = 1 - x$.

Za $k = 2$ dobije se $x + y = 2$, što je jednadžba ravnine koja je paralelna sa z-osi, te siječe xy-ravninu po pravcu $y = 2 - x$.

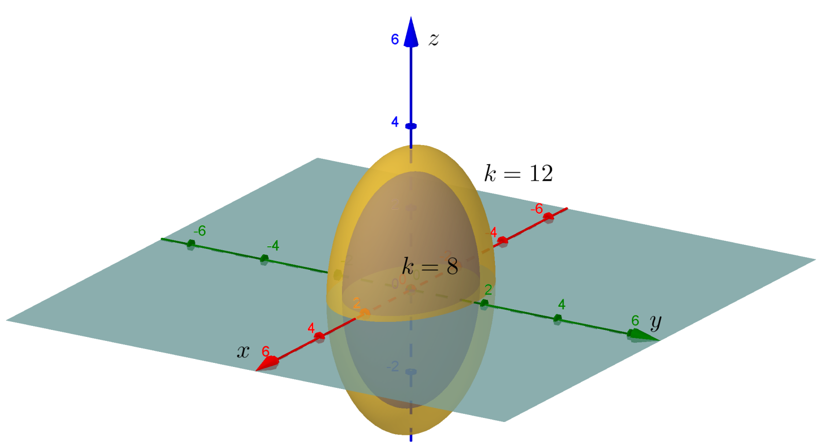
Uočimo da su nivo-plohe paralelene ravnine koje su okomite na xy-ravninu koju sijeku po pravcima $y = k - x$.

(c) U ovom primjeru je skalarno polje f također zadano na $\mathbb{R}^3$, tako da će nivo-plohe biti plohe u $\mathbb{R}^3$.

Iz $f(x, y, z) = k$, za $k = 8$ slijedi $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 8$, tj. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{8} = 1$, što je jednadžba elipsoida sa središtem u $(0, 0, 0)$ i odsječcima 2,$\sqrt{2}$ i $2\sqrt{2}$ na x,y i z-osi redom.

Za $k = 12$ imamo $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 12$, tj. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{12} = 1$, što je jednadžba elipsoida sa središtem u $(0, 0, 0)$ i odsječcima $\sqrt{6}$,$\sqrt{3}$ i $2\sqrt{3}$ na x,y i z-osi redom.

Općenito, za $k > 0$ nivo-plohe su elipsoidi sa središtem u $(0, 0, 0)$ i odsječcima $\sqrt{\frac{k}{2}}$,$\sqrt{\frac{k}{4}}$ i $\sqrt{k}$ na x,y i z-osi redom.



Slika 184: Nivo-plohe skalarnog polja $f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2$

Kao što se pojavila potreba za proučavanjem skalarnih polja, tako se prirodno javila i potreba za proučavanjem preslikavanja koja točkama u prostoru pridružuju točke u prostoru, odnosno vektore. Primjerice, ukoliko svakoj točki u prostoru pridružimo vektor koji pokazuje smjer brzine vjetra u toj točki, definirali smo preslikavanje koje točkama iz $\mathbb{R}^3$ pridružuje točke iz $\mathbb{R}^3$, odnosno vektore. Osim primjera iz meteorologije, postoji još čitav niz primjera gdje se pojavljuje takav tip preslikvanja, kao što je npr. djelovanje tlačne sile u prostoru ili sila općenito itd. Za grafički prikaz takvih preslikavanja koristimo mapu ispunjenu vektorima, pa stoga takva preslikavanja nazivamo *vektorskim poljima*. Formalno, *vektorsko polje* je vektorska funkcija triju realnih varijabli, tj. funkcija

$$\vec{f} : A \to \mathbb{R}^3, \quad A \subseteq \mathbb{R}^3.$$

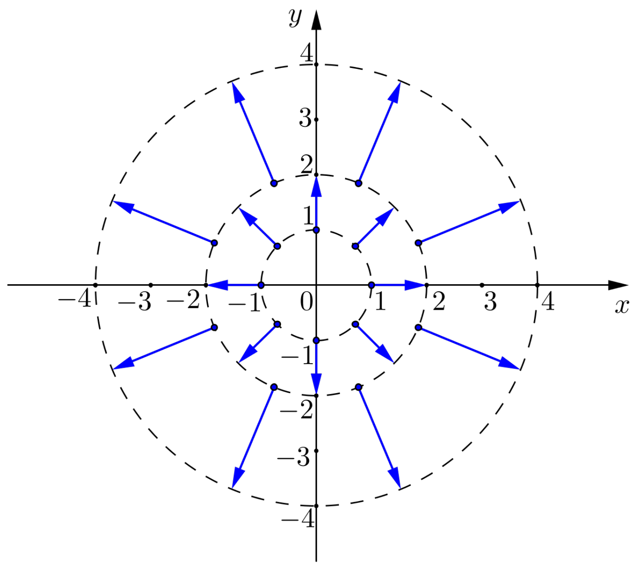
Zadavanje vektorskog polja svodi se na zadavanje triju skalarnih polja. Naime, budući da vektorsko polje preslikava točke skupa $A \subseteq \mathbb{R}^3$ u vektore (uz identifikaciju skupova V^3 i $\mathbb{R}^3$), možemo ga koordinatno zapisati kao

$$\vec{f}(x, y, z) = f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k},$$

gdje su f_x, f_y, $f_z : A \to \mathbb{R}$ realne funkcije triju realnih varijabli, tj. skalarna polja. Dakle, zadavanjem triju skalarnih polja f_x, f_y i f_z zadali smo i vektorsko polje $\vec{f}$.

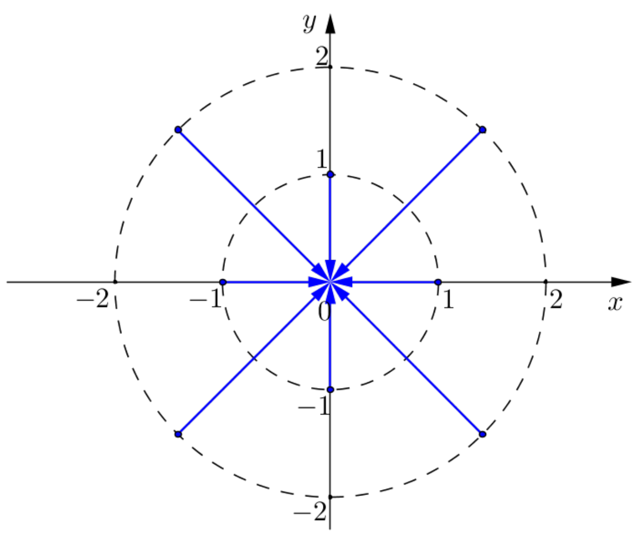
Primjer 7.2.2. Pomoću mapa ispunjenih vektorima prikazati sljedeća vektorska polja:
(a) $\vec{f}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j}$, (b) $\vec{f}(x, y, z) = -x\vec{i} - y\vec{j}$.
Rješenje. Uočimo da ova vektorska polja točkama prostora pridružuju vektore koji leže u ravnini paralelnoj s xy-ravninom. Zadana vektorska polja skicirat ćemo najprije u točkama xy-ravnine, a zatim ćemo translacijom dobivene slike u smjeru osi z dobiti prikaz vektorskog polja u svim točkama prostora.

(a) Primijetimo da je u proizvoljnoj točki $(x, y, 0)$ vrijednost vektorskog polja vektor duljine $\sqrt{x^2 + y^2}$ koji leži na pravcu koji prolazi kroz ishodište te pokazuje "od ishodišta". Kako bismo jednostavnije prikazali zadano vektorsko polje, primijetimo da sve točke na kružnici $x^2 + y^2 = a^2$ vektorsko polje $\vec{f}$ preslika u vektore duljine a. Uzevši to u obzir, jedan mogući prikaz zadanog vektorskog polja f u točkama xy-ravnine je kao na slici 185.



Slika 185: Prikaz vektorskog polja $\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j}$ u točkama $(x,y,0)$

(b)



Slika 186: Prikaz vektorskog polja $\vec{f}(x,y,z) = -x\vec{i} - y\vec{j}$ u točkama $(x,y,0)$

Slično kao i u (a) dijelu, ovo vektorsko polje $\vec{f}$ preslikava točku $(x, y, 0)$ u vektor duljine $\sqrt{x^2 + y^2}$ koji leži na pravcu kroz ishodište, a orijentiran je prema ishodištu (slika 186).

Duljina vrijednosti vektorskog polja $\vec{f}$ u točki $T(x_0, y_0, z_0)$, tj. vrijednost $|\vec{f}(x_0, y_0, z_0)|$ naziva se *jakost vektorskog polja* u točki $T(x_0, y_0, z_0)$. S obzirom da je jakost polja skalar, te da ono ovisi o točki u kojoj se računa, slijedi da je jakost vektorskog polja zapravo skalarno polje. Ako je npr. $\vec{f}$ vektorsko polje koje svakoj točki T prostora pridružuje vektor koji pokazuje smjer brzine vjetra u točki T, onda je jakost tog vektorskog polja u točki T, tj. $|\vec{f}(T)|$ iznos brzine vjetra u točki T.

7.3 Derivacija u smjeru i gradijent skalarnog polja

Derivacija u smjeru

Pojam derivacije realne funkcije realne varijable uveli smo u Matematici 1. Derivacija $f'(c)$ u točki $c \in \mathbb{R}$ dala nam je dobar uvid o ponašanju vrijednosti realne funkcije f u (malom) intervalu oko zadane točke c. Proučavajući realne funkcije više varijabli upoznali smo se s pojmom parcijalne derivacije. Vidjeli smo da parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ predstavljaju mjeru promjene funkcije $z = f(x, y)$ u okolini točke (a, b) u smjeru osi x, odnosno osi y. Ista ideja nas vodi i kod pojma derivacije skalarnog polja, no bitna je razlika u tome što se sada promjena argumenta može odvijati u bilo kojem smjeru.

Neka je dano skalarno polje $f : A \to \mathbb{R}$, gdje je $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Kako svaku uređenu trojku (x, y, z) realnih brojeva možemo poistovijetiti s vektorom $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ trodimenzionalnog vektorskog prostora V^3, to možemo smatrati da su elementi skupa A vektori.

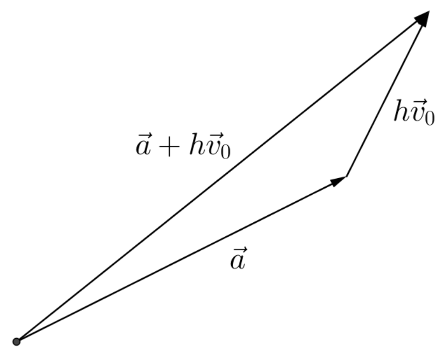
Neka je $\vec{a} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ vektor iz domene A u okolini kojeg želimo ispitati ponašanje skalarnog polja f. Označimo s $\vec{v}_0$ jedinični vektor koji nam govori u kojem smjeru se želimo pomaknuti od $\vec{a}$. Za $h \in \mathbb{R}$, udaljenost između $\vec{a}$ i $\vec{a} + h\vec{v}_0$ je $|\vec{a} - (\vec{a} + h\vec{v}_0)| = |h\vec{v}_0| = |h||\vec{v}_0| = |h|$, što je jednako prirastu (promjeni) argumenta (slika 187). Prirast skalarnog polja f pri prijelazu iz $\vec{a}$ u $\vec{a} + h\vec{v}_0$ iznosi $f(\vec{a} + h\vec{v}_0) - f(\vec{a})$. Kvocijentom

$$\frac{f(\vec{a} + h\vec{v}_0) - f(\vec{a})}{h}$$

dana je *prosječna promjena* skalarnog polja f duž segmenta koji spaja $\vec{a}$ i $\vec{a} + h\vec{v}_0$. Ako parametar h teži u nulu, vektor $\vec{a} + h\vec{v}_0$ teži prema $\vec{a}$. Limes

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_0}(\vec{a}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{v}_0) - f(\vec{a})}{h}$$

(ukoliko postoji) nazivamo *derivacijom skalarnog polja* f *u točki* $\vec{a}$ *u smjeru vektora* $\vec{v}_0$. Osim oznake $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_0}(\vec{a})$ koristi se i $f'_{\vec{v}_0}(\vec{a})$.



Slika 187: Derivacija u smjeru

Za (bilo koji) ne-nulvektor $\vec{v}$, pod pojmom derivacije skalarnog polja f u točki $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{v}$ podrazumijevamo derivaciju polja f u $\vec{a}$ u smjeru jediničnog vektora $\vec{v}_0 := \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ pridruženog vektoru $\vec{v}$. Dakle,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v_0}}(\vec{a}),$$

gdje je $\vec{v}_0 := \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Ako je $\vec{v}$ neki od koordinatnih vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ ili $\vec{k}$, tada derivacija u smjeru postaje *parcijalna derivacija* (v. točku 5.3), tj. vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(\vec{a}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{a}+h\vec{i})-f(\vec{a})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(\vec{a}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{a}+h\vec{j})-f(\vec{a})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{k}}(\vec{a}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{a}+h\vec{k})-f(\vec{a})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0,z_0+h)-f(x_0,y_0,z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}).$$

Skalarno polje $f : A \to \mathbb{R}$ je *diferencijabilno* na skupu A ako postoji $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a})$ za svaki $\vec{a} \in A$ i za svaki ne-nulvektor vektor $\vec{v}$.

Primjer 7.3.1. Naći $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a})$, ako je skalarno polje f dano s $f(\vec{a}) = |\vec{a}|^2$.

Rješenje. Kako je $f(\vec{a}) = |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ za svaki vektor $\vec{a}$, imamo

$$f(\vec{a} + h\vec{v}) - f(\vec{a}) = (\vec{a} + h\vec{v}) \cdot (\vec{a} + h\vec{v}) - \vec{a} \cdot \vec{a} = 2h\vec{a} \cdot \vec{v} + h^2 \vec{v} \cdot \vec{v},$$

odakle slijedi

$$\frac{f(\vec{a} + h\vec{v}) - f(\vec{a})}{h} = \frac{2h\vec{a} \cdot \vec{v} + h^2 \vec{v} \cdot \vec{v}}{h} = 2\vec{a} \cdot \vec{v} + h\vec{v} \cdot \vec{v}.$$

Tada je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{v}) - f(\vec{a})}{h} = \lim_{h \to 0} (2\vec{a} \cdot \vec{v} + h\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{a} \cdot \vec{v}.$$

Gradijent skalarnog polja

Neka je $f : A \to \mathbb{R}$, gdje je $A \subseteq \mathbb{R}^3$, diferencijabilno skalarno polje. *Gradijent od* f, u oznaci $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ ili $\vec{\nabla} f$, je vektorsko polje

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}.$$

Vrijednost tog polja u proizvoljnoj točki $(x_0, y_0, z_0) \in A$ je vektor

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \vec{k}.$$

Korištenje gradijenta pojednostavljuje mnoge formule u vektorskoj analizi, između ostaloga i računanje derivacije skalarnog polja u smjeru vektora. Naime, može se pokazati da vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0, z_0) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_0, y_0, z_0) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \tag{50}$$

tj. *derivacija skalarnog polja* f *u točki* (x_0, y_0, z_0) *u smjeru vektora* $\vec{v} \neq \vec{0}$ *jednaka je skalarnom produktu gradijenta funkcije* f *u točki* (x_0, y_0, z_0) (*što je vektor*!) *i jediničnog vektora* $\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$.

U Matematici 1 naučili smo tzv. *lančano pravilo* za derivaciju kompozicije realnih funkcija realne varijable, koje glasi $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Ako je f skalarno polje i $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektorska funkcija (s vrijednostima u domeni od f), tada je kompozicija funkcija $t \mapsto f(\vec{r}(t))$ realna funkcija realne varijable. Pokazuje se da je derivaciju ove kompozicije funkcija moguće izračunati pomoću gradijenta skalarnog polja f, tj. vrijedi sljedeće pravilo:

$$\frac{df(\vec{r}(t))}{dt} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) \tag{51}$$

za svaki t za koji postoji $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(\vec{r}(t))$ i $\vec{r}\,'(t)$.

Primjer 7.3.2. Naći gradijent skalarnog polja $f(x,y,z) = \ln y + \frac{x+y}{y} - \frac{xy}{z^2}$.
Rješenje. Parcijalne derivacije skalarnog polja f su:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{1}{y} - \frac{y}{z^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} - \frac{x}{z^2},\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{2xy}{z^3},\end{aligned}$$

pa je

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x,y,z) = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{z^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)\vec{j} + \frac{2xy}{z^3}\vec{k}.$$

Primjer 7.3.3. Naći vrijednost gradijenta skalarnog polja $f(x,y,z) = \frac{x+z}{y} + 4\ln(2x+y) - \cos(xyz)$ u točki $T(\frac{1}{2}, \pi, \frac{1}{3})$.
Rješenje. Parcijalne derivacije od f po varijablama x, y, z iznose redom:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{1}{y} + \frac{8}{2x+y} + yz\sin(xyz),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -\frac{x+z}{y^2} + \frac{4}{2x+y} + xz\sin(xyz),\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{1}{y} + xy\sin(xyz).\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x,y,z) = &\left(\frac{1}{y} + \frac{8}{2x+y} + yz\sin(xyz)\right)\vec{i}\\ &+\left(-\frac{x+z}{y^2} + \frac{4}{2x+y} + xz\sin(xyz)\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{y} + xy\sin(xyz)\right)\vec{k},\end{aligned}$$

pa se uvrštavanjem koordinata točke $T(\frac{1}{2}, \pi, \frac{1}{3})$ dobije

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\left(\frac{1}{2}, \pi, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{\pi} + \frac{8}{1+\pi} + \frac{\pi}{6}\right)\vec{i} + \left(-\frac{5}{6\pi^2} + \frac{4}{1+\pi} + \frac{1}{12}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{4}\right)\vec{k}.$$

Primjer 7.3.4. Naći vrijednost derivacije skalarnog polja $f(x,y,z) = xy(x+z)$ u točki $T(1,2,-1)$ u smjeru jediničnog vektora $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$.

Rješenje. Najprije ćemo izračunati $\overrightarrow{\text{grad}} f$, a zatim primijeniti formulu (50). Dakle,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= y(x+z)+xy = 2xy+yz,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= x(x+z) = x^2+xz,\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= xy.\end{aligned}$$

Sada je

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y,z) = (2xy+yz)\vec{i} + (x^2+xz)\vec{j} + xy\vec{k},$$

pa je

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(T) = \overrightarrow{\text{grad}} f(1,2,-1) = 2\vec{i} + 2\vec{k}.$$

S obzirom da je $|\vec{v}| = 1$, prema (50) derivacija u smjeru vektora $\vec{v}$ jednaka je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T) = \overrightarrow{\text{grad}} f(T)\cdot\vec{v} = (2\vec{i}+2\vec{k})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Primjer 7.3.5. Izračunati vrijednost derivacije skalarnog polja $f(x,y,z) = e^{x^2+y^3+z^4}$ u točki $T(1,0,1)$ u smjeru vektora $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Rješenje. Prvo računamo parcijalne derivacije od f. Dakle,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 2xe^{x^2+y^3+z^4},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 3y^2e^{x^2+y^3+z^4},\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 4z^3e^{x^2+y^3+z^4}.\end{aligned}$$

Stoga je

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y,z) = e^{x^2+y^3+z^4}(2x\vec{i} + 3y^2\vec{j} + 4z^3\vec{k}),$$

pa je vrijednost gradijenta u točki $T(1,0,1)$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(T) = \overrightarrow{\text{grad}} f(1,0,1) = e^2(2\vec{i} + 4\vec{k}).$$

S obzirom da se traži derivacija u smjeru vektora $\vec{v}$, moramo izračunati jedinični vektor istog smjera i orijentacije kao i vektor $\vec{v}$. Označimo taj vektor s $\vec{v}_0$. Dakle,

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}.$$

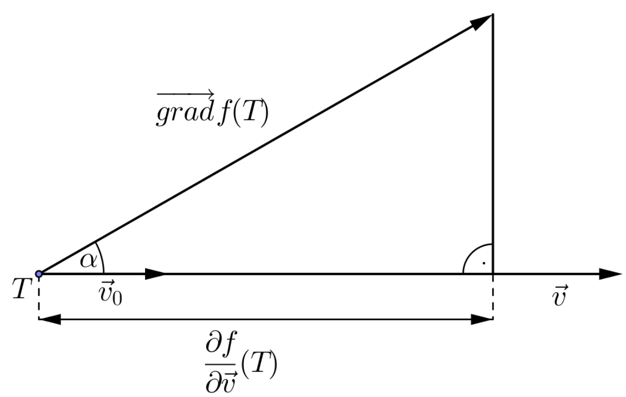
Sada iz (50) slijedi

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T) = \overrightarrow{\text{grad}} f(T) \cdot \vec{v}_0 = e^2(2\vec{i} + 4\vec{k}) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k} \right) = \frac{2e^2\sqrt{3}}{3}.$$

Osim što nam omogućuje jednostavnije računanje derivacije, gradijent ima i vrlo važnu geometrijsku interpretaciju. Neka je $\overrightarrow{\text{grad}} f(T) \neq \vec{0}$. Ako izraz (50) raspišemo po definiciji skalarnog produkta, dobijemo

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T) = \overrightarrow{\text{grad}} f(T) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left|\overrightarrow{\text{grad}} f(T)\right| \cos\alpha,$$

gdje je α kut između vektora $\vec{v}$ i $\overrightarrow{\text{grad}} f(T)$.



Slika 188: Derivacija u smjeru i gradijent skalarnog polja

Prema tome, derivacija skalarnog polja f u smjeru vektora $\vec{v}$ je komponenta gradijenta od f u smjeru vektora $\vec{v}$. Uočimo da derivacija postiže najveću vrijednost kada je $\cos\alpha = 1$, tj. $\alpha = 0°$, a to znači da vektori $\vec{v}$ i $\overrightarrow{\text{grad}} f(T)$ imaju isti smjer i istu orijentaciju. Nadalje, derivacija postiže najmanju vrijednost kada je $\cos\alpha = -1$, tj. $\alpha = 180°$, a to znači da vektori $\vec{v}$ i $\overrightarrow{\text{grad}} f(T)$ imaju isti smjer, ali suprotne orijentacije.

Drugim riječima, u točki $T(x_0, y_0, z_0)$ skalarno polje f najbrže raste u smjeru vektora $\overrightarrow{\text{grad}} f(T)$, a najbrže pada u smjeru vektora $-\overrightarrow{\text{grad}} f(T)$.

Primjer 7.3.6. Za skalarno polje $f(x,y,z)=xy+x\sqrt{\frac{z}{y}}$ naći smjer najbržeg rasta iz točke $T(1,4,9)$.

Rješenje. S obzirom da je smjer najbržeg rasta skalarnog polja f jednak smjeru gradijenta od f, potrebno je izračunati gradijent skalarnog polja f u točki $T(1,4,9)$. Prema tome,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= y+\sqrt{\frac{z}{y}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial x}(T)=\frac{11}{2},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= x+\frac{x}{2\sqrt{\frac{z}{y}}}\cdot\frac{-z}{y^2}=x-\frac{x\sqrt{z}}{2y^{\frac{3}{2}}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial y}(T)=\frac{13}{16},\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{x}{2\sqrt{\frac{z}{y}}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{x}{2\sqrt{zy}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial z}(T)=\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi da polje f iz točke $T(1,4,9)$ najbrže raste u smjeru vektora

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(T)=\frac{\partial f}{\partial x}(T)\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(T)\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(T)\vec{k}=\frac{11}{2}\vec{i}+\frac{13}{16}\vec{j}+\frac{1}{12}\vec{k}.$$

Primjer 7.3.7. Za skalarno polje $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2-\sqrt{xz})$ naći smjer najbržeg pada iz točke $T(2,1,2)$.

Rješenje. Skalarno polje f najbrže pada u smjeru $-\overrightarrow{\text{grad}}f$, pa se problem svodi na računanje $-\overrightarrow{\text{grad}}f(T)$. Dakle,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{1}{x^2+y^2-\sqrt{xz}}\left(2x-\frac{z}{2\sqrt{xz}}\right) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial x}(T)=\frac{7}{6},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{2y}{x^2+y^2-\sqrt{xz}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial y}(T)=\frac{2}{3},\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{1}{x^2+y^2-\sqrt{xz}}\left(\frac{-x}{2\sqrt{xz}}\right) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial z}(T)=-\frac{1}{6},
\end{aligned}$$

pa je

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(T)=\frac{\partial f}{\partial x}(T)\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(T)\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(T)\vec{k}=\frac{7}{6}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{1}{6}\vec{k}.$$

Stoga je smjer najbržeg pada skalarnog polja f iz točke $T(2,1,2)$ jednak

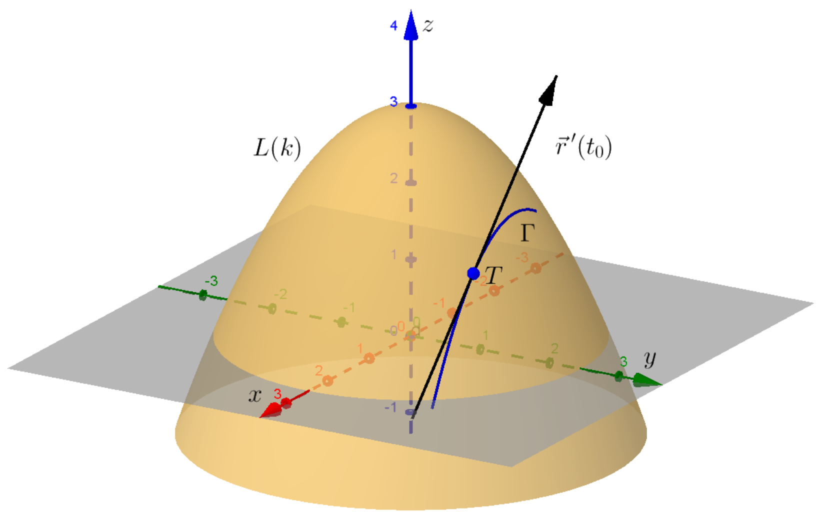
$$-\overrightarrow{\text{grad}}f(T)=-\frac{7}{6}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{1}{6}\vec{k}\ .$$

Tangencijalna ravnina i normala na plohu

Osim najbržeg rasta/pada skalarnog polja, gradijent ima još jedno važno geometrijsko značenje. Neka je $f : A \to \mathbb{R}$ skalarno polje, gdje je $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Za danu konstantu $k \in \mathrm{Im}(f)$, označimo s $L(k)$ nivo-plohu polja f, tj. skup svih točaka $(x, y, z) \in A$ u kojima f poprima vrijednost k. Dakle,

$$L(k) = \big\{(x, y, z) \in A : \ f(x, y, z) = k\big\}.$$

Neka je $T(x_0, y_0, z_0)$ točka koja se nalazi na nivo-plohi $L(k)$, te neka je Γ krivulja koja leži na nivo-plohi $L(k)$ i prolazi točkom T (v. sliku 189).



Slika 189: Nivo-ploha $L(k)$ polja f

S obzirom da je Γ krivulja u prostoru, možemo pretpostaviti da je ona trajektorija neke vektorske funkcije $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, definirane na skupu $D \subseteq \mathbb{R}$. Osim toga, krivulja Γ leži na nivo-plohi $L(k)$, pa slijedi $f(\vec{r}(t)) = k$, tj. $f(x(t), y(t), z(t)) = k$, $t \in D$. Definiramo funkciju $g(t) := f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$, $t \in D$. Primijetimo da je g realna funkcija realne varijable za koju vrijedi $g(t) = k$ za svaki $t \in D$.

Prema lančanom pravilu (51) vrijedi $g'(t) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$. Budući da je $g(t) = k$ za sve $t \in D$, slijedi $g'(t) = 0$, $t \in D$, tj. imamo

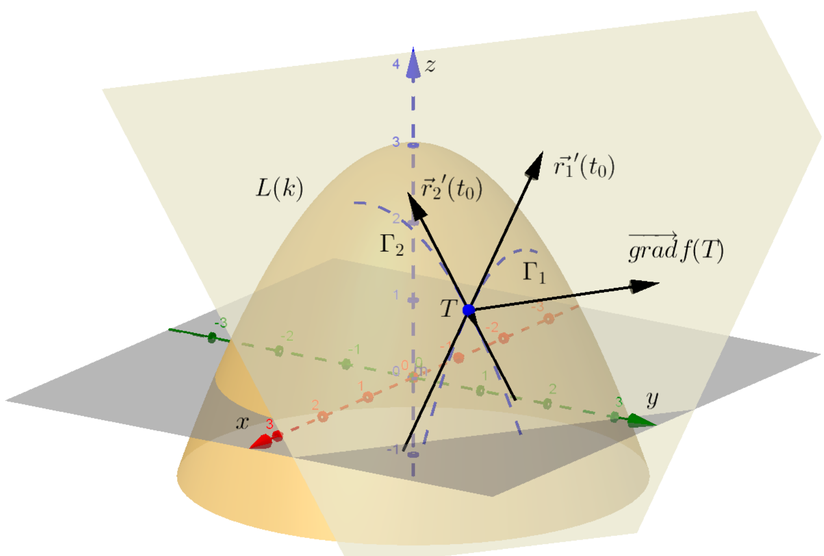
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0, \quad t \in D.$$

Ako točki $T(x_0, y_0, z_0)$ odgovara parametar $t_0 \in D$, tj. $\vec{r}(t_0) = x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}$, onda je

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(\vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}\,'(t_0) = \overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{r}\,'(t_0) = 0.$$

Znamo da je $\vec{r}\,'(t_0)$ vektor smjera tangente povučene na krivulju Γ u točki T. Kako je skalarni produkt vektora $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0)$ i $\vec{r}\,'(t_0)$ jednak nuli, to znači da je gradijent skalarnog polja f u točki T okomit na vektor smjera tangente na krivulju Γ u točki T (pod uvjetom $\overrightarrow{\text{grad}} f(T) \neq \vec{0}$)).

Sada možemo uzeti cijelu familiju krivulja koje leže na nivo plohi $L(k)$ i sve prolaze točkom T. Povučemo li tangente na sve te krivulje u točki T, prethodna analiza pokazuje da je $\overrightarrow{\text{grad}} f(T)$ okomit na sve pripadne vektore smjerova tih tangenti. Svi ti tangencijalni vektori određuju ravninu, a normala te ravnine je upravo gradijent skalarnog polja f u točki T. Ovu ravninu zovemo *tangencijalnom ravninom* na nivo-plohu $L(k)$ u točki T (slika 190).



Slika 190: Tangencijalna ravnina na nivo-plohu $L(k)$ u točki T

Iz analitičke geometrije znamo da jednadžba ravnine koja sadrži točku $T(x_0, y_0, z_0)$ i ima vektor normale $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ glasi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Prema tome, uz saznanje da je vektor normale tangencijalne ravnine u točki $T(x_0, y_0, z_0)$ zapravo gradijent skalarnog polja f u točki T, tj. vektor

$$\vec{N} = \overrightarrow{\text{grad}} f(T) = \frac{\partial f}{\partial x}(T)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(T)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(T)\vec{k}, \tag{52}$$

slijedi da je jednažba tangencijalne ravnine u točki $T(x_0, y_0, z_0)$ dana s

$$\frac{\partial f}{\partial x}(T)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(T)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(T)(z - z_0) = 0. \tag{53}$$

Kanonska jednadžba pravca normale na tangencijalnu ravninu u točki T dana je s

$$n \ldots \quad \frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(T)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(T)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial f}{\partial z}(T)}. \tag{54}$$

Pokažimo da pomoću (53) možemo doći i do jednadžbe tangencijalne ravnine na graf funkcije dviju varijabli. Pretpostavimo da je f funkcija dviju varijabli zadana u eksplicitnom obliku $z = f(x, y)$. Tom jednadžbom je zadana ploha u $\mathbb{R}^3$ na koju želimo povući tangencijalnu ravninu u točki $T(x_0, y_0, z_0)$, gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Iz $z = f(x, y)$ slijedi $f(x, y) - z = 0$. Definiramo funkciju

$$F(x, y, z) := f(x, y) - z.$$

Uočimo, F je skalarno polje triju varijabli x, y i z, te $F(x, y, z) = 0$ definira nivo-plohu u $\mathbb{R}^3$. (Ta ploha je upravo graf funkcije $z = f(x, y)$.) Jednadžba tangencijalne ravnine na tu nivo-plohu u točki $T(x_0, y_0, z_0)$ je dana s (53), tj.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(T)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(T)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(T)(z - z_0) = 0. \tag{55}$$

S obzirom da je $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$, jednadžbu (55) možemo zapisati kao

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{56}$$

Vektor normale tangencijalne ravnine dan je s

$$\vec{N} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j} - \vec{k}, \tag{57}$$

dok je jednažba pravca normale

$$n \ldots \quad \frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{58}$$

Primjer 7.3.8. Naći jednadžbu tangencijalne ravnine i pravca normale na plohu $f(x,y) = \ln(xy+3) + \frac{x}{1+xy}$ u točki $T(-1,2,z_0)$.

Rješenje. Iz (56) vidimo da su nam potrebne vrijednosti parcijalnih derivacija funkcije f u točki T :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y}{xy+3} + \frac{1}{(1+xy)^2} &\Longrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = 3,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x}{xy+3} + \frac{-x^2}{(1+xy)^2} &\Longrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = -2.\end{aligned}$$

Nadalje,

$$z_0 = f(-1,2) = \ln 1 + 1 = 1.$$

Prema (56), jednadžba tangencijalne ravnine je

$$z - 1 = 3(x+1) - 2(y-2),$$

tj.

$$3x - 2y - z + 8 = 0.$$

Prema (58), kanonski oblik jednadžbe pravca normale glasi

$$n \ldots \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Primjer 7.3.9. Naći jednadžbu tangencijalne ravnine i pravca normale na plohu $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - xy$ u točki $T(3,4,z_0)$.

Rješenje. Izračunajmo prvo vrijednosti parcijalnih derivacija funkcije f u točki T. Dakle,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y &\Longrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial x}(3,4) = -\frac{17}{5},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x &\Longrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = -\frac{11}{5}.\end{aligned}$$

Nadalje,

$$z_0 = f(3,4) = 5 - 12 = -7.$$

Prema (56), jednadžba tangencijalne ravnine je

$$z + 7 = -\frac{17}{5}(x-3) - \frac{11}{5}(y-4),$$

tj.

$$17x + 11y + 5z - 60 = 0.$$

Kanonski oblik jednadžbe pravca normale je

$$n\ldots \quad \frac{x-3}{17}=\frac{y-4}{11}=\frac{z+7}{5}.$$

Primjer 7.3.10. Naći jednadžbu tangencijalne ravnine i pravca normale na plohu $f(x,y)=y^x+(x+y)^3$ u točki $T(2,1,z_0)$.

Rješenje. Izračunajmo prvo vrijednosti parcijalnih derivacija funkcije f u točki T :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y^x\ln y+3(x+y)^2 &\Longrightarrow\quad& \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=27,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= xy^{x-1}+3(x+y)^2 &\Longrightarrow\quad& \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=29.\end{aligned}$$

Nadalje,

$$z_0=f(2,1)=1+27=28.$$

Jednadžba tangencijalne ravnine glasi

$$z-28=27(x-2)+29(y-1),$$

tj.

$$27x+29y-z-55=0,$$

a kanonska jednadžba pravca normale je

$$n\ldots \quad \frac{x-2}{27}=\frac{y-1}{29}=\frac{z-28}{-1}.$$

Primjer 7.3.11. Naći jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $f(x,y)=4-x^2-y^2$, koja je paralelna s ravninom $\pi\ldots\ 2x+2y+z=0$.

Rješenje. Za razliku od prethodnih primjera, ovdje nemamo zadanu točku u kojoj tangencijalna ravnina dira plohu, već ju trebamo izračunati iz uvjeta paralelnosti s ravninom π. Označimo s π_t tangencijalnu ravninu, s $\vec{N}_{\pi_t}$ odgovarajući vektor normale, s $T(x_0,y_0,z_0)$ točku dirališta, te s $\vec{N}$ vektor normale zadane ravnine π.

Budući da je tangencijalna ravnina paralelna s ravninom π, vektori normala su im kolinearni, tj.

$$\vec{N}_{\pi_t}=\lambda\vec{N}\,,\ \text{ za neki } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Također, znamo da je

$$\vec{N}_{\pi_t}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\vec{j}-\vec{k}=-2x_0\vec{i}-2y_0\vec{j}-\vec{k}$$

vektor normale tangencijalne ravnine π_t. Vektor normale ravnine π je $\vec{N} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, pa iz $\vec{N}_{\pi_t} = \lambda\vec{N}$ slijedi

$$-2x_0\vec{i} - 2y_0\vec{j} - \vec{k} = \lambda(2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}),$$

odakle izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata dobivamo

$$-2x_0 = 2\lambda\,, \quad -2y_0 = 2\lambda\,, \quad -1 = \lambda,$$

tj. $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, pa je $z_0 = f(x_0, y_0) = f(1,1) = 2$. Dakle, diralište je točka $T(1,1,2)$, a vektor normale $\vec{N}_{\pi_t} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$. Prema tome, jednadžba tangencijalne ravnine glasi

$$\pi_t \ldots \quad -2(x-1) - 2(y-1) - (z-2) = 0,$$

tj.

$$\pi_t \ldots \quad 2x + 2y + z - 6 = 0.$$

Primjer 7.3.12. Naći jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $3x^2 + 6y^2 + z^2 = 9$ u točki $T(1,1,0)$.

Rješenje. U ovom primjeru ploha je zadana implicitnom jednadžbom. Definiramo funkciju $f(x,y,z) = 3x^2 + 6y^2 + z^2 - 9$. Uočimo da je potrebno naći tangencijalnu ravninu na nivo-plohu $f(x,y,z) = 0$ skalarnog polja f u točki $T(1,1,0)$. Za to nam trebaju parcijalne derivacije funkcije f u točki T. Dakle,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 6x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(T) = 6,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 12y \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(T) = 12,\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 2z \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z}(T) = 0.
\end{aligned}$$

Prema (53), jednadžba tangencijalne ravnine je

$$6(x-1) + 12(y-1) = 0,$$

tj.

$$x + 2y - 3 = 0.$$

Primjer 7.3.13. Naći jednadžbe tangencijalnih ravnina na plohu $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 15$ koje su paralelne s ravninom $\pi \ldots 8x - 6y - 8z + 5 = 0$.

Rješenje. Jednadžba plohe dana je u implicitnom obliku. Definiramo skalarno polje $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 15$ čija nivo-ploha $f(x,y,z) = 0$ odgovara zadanoj plohi. Da bismo našli tangencijalnu ravninu π_t na nivo-plohu $f(x,y,z) = 0$, potrebno je naći parcijalne derivacije funkcije f. Dakle,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 6y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 8z.$$

Vektor normale $\vec{N}_{\pi_t}$ tangencijalne ravnine π_t u točki dirališta $T(x_0, y_0, z_0)$ glasi

$$\vec{N}_{\pi_t} = \overrightarrow{\text{grad}} f(T) = 4x_0\vec{i} + 6y_0\vec{j} + 8z_0\vec{k}.$$

Točke dirališta izračunat ćemo iz uvjeta paralelnosti tangencijalne ravnine sa zadanom ravninom π. Vektor normale $\vec{N}_{\pi_t}$ tangencijalne ravnine π_t kolinearan je s vektorom normale $\vec{N} = 8\vec{i} - 6\vec{j} - 8\vec{k}$ ravnine π, tj. $\vec{N}_{\pi_t} = \lambda\vec{N}$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Dakle,

$$4x_0\vec{i} + 6y_0\vec{j} + 8z_0\vec{k} = \lambda(8\vec{i} - 6\vec{j} - 8\vec{k}),$$

odakle slijedi

$$4x_0 = 8\lambda, \quad 6y_0 = -6\lambda, \quad 8z_0 = -8\lambda,$$

tj.

$$x_0 = 2\lambda, \quad y_0 = -\lambda, \quad z_0 = -\lambda.$$

S obzirom da točka dirališta leži na zadanoj plohi, ona mora zadovoljavati i njenu jednadžbu $2x_0^2 + 3y_0^2 + 4z_0^2 = 15$. Odavde imamo

$$8\lambda^2 + 3\lambda^2 + 4\lambda^2 = 15,$$

pa je $\lambda^2 = 1$, tj. $\lambda = \pm 1$. Prema tome, dobili smo dva dirališta: $T_1(-2,1,1)$ za $\lambda = -1$ i $T_2(2,-1,-1)$ za $\lambda = 1$. Ako s π_{t_1} označimo tangencijalnu ravninu u točki T_1, a s π_{t_2} tangencijalnu ravninu u točki T_2, imamo

$$\begin{aligned} \pi_{t_1} \ldots \quad -8(x+2) + 6(y-1) + 8(z-1) &= 0 \\ 4x - 3y - 4z + 15 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{t_2} \ldots \quad 8(x-2) - 6(y+1) - 8(z+1) &= 0 \\ 4x - 3y - 4z - 15 &= 0. \end{aligned}$$

Napomenimo da je bilo za očekivati da ćemo imati dva rješenja, budući da se radi o elipsoidu.

8 Obične diferencijalne jednadžbe

8.1 Uvod i motivacija

Mnoge zakonitosti u prirodi u sebi sadrže informaciju kojom brzinom se promatrana pojava mijenja. Takve zakonitosti, kada se izraze matematičkim rječnikom, postaju jednadžbe u kojima se brzina promjene opisuje pomoću derivacije. Te jednadžbe zovemo *diferencijalnim jednadžbama*. Prema tome, kako bismo bolje razumjeli npr. tok fluida, širenje valova, širenje topline kroz materiju, rast ili pad veličine neke populacije i sl., moramo naučiti rješavati diferencijalne jednadžbe.

Diferencijalnu jednažbu koja opisuje neku fizikalnu pojavu ili zakonitost često nazivamo *matematičkim modelom* te pojave ili zakonitosti. Kao motivacijski primjer razmotrit ćemo model rasta/pada populacije miševa.

Primjer 8.1.1. Označimo s t vrijeme, te s $p(t)$ veličinu populacije miševa, tj. $p(t)$ je broj miševa u trenutku t. Zbog jednostavnosti modela, pretpostavimo najprije da je u odsutnosti bilo kakvih predatora brzina rasta populacije miševa proporcionalna trenutnoj veličini populacije, gdje faktor proporcionalnosti označimo s r. Tu pretpostavku o brzini rasta populacije možemo matematičkim rječnikom izraziti kao

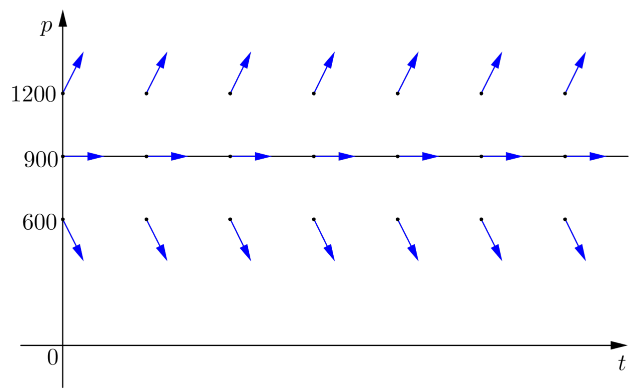
$$\frac{dp}{dt} = rp,$$

gdje faktor r zovemo *faktorom rasta populacije*. Zbog lakše interpretacije rezultata, pretpostavimo da se vrijeme mjeri u mjesecima te da je $r = 0.5$.

Promotrimo sad malo složeniji model, tj. pretpostavimo još da na istom staništu koje promatramo žive i sove. Sve sove koje žive na tom staništu pojedu ukupno 15 miševa dnevno. Uz pretpostavku da svi mjeseci imaju 30 dana, brzinu promjene populacije miševa možemo izraziti kao

$$\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450. \tag{59}$$

Kada bismo znali neke vrijednosti za populaciju p, mogli bismo procijeniti desnu stranu ove jednakosti i time dobiti odgovarajuće vrijednosti za derivaciju od p. Uzmemo li npr. $p = 1200$, uvrštavanjem u jednadžbu (59) dobije se $dp/dt = 150$. Gledano geometrijski, u dvodimenzionalnom tp-koordinatnom sustavu tu informaciju možemo prikazati kao malu strelicu s nagibom 150 u svim točkama koje imaju vrijednost na p-osi jednaku 1200. Ako ponovimo taj postupak za npr. $p = 600$, dobit ćemo da je $dp/dt = -150$, pa u svim točama s p-koordinatom 600 nacrtamo strelicu s nagibom -150. Primijetimo da za $p = 900$ slijedi $dp/dt = 0$, tj. strelice su paralelne s t-osi. Uvrštavanjem raznih drugih vrijednosti za p u izraz (59), te crtanjem odgovarajućih strelica dobivamo sljedeću sliku.



Slika 191: Model rasta/pada populacije miševa

Strelice u ovakvom prikazu predstavljaju tangente na grafove funkcija koje su rješenja diferencijalne jednadžbe (59). Prema tome, iako još ne znamo kako točno izgledaju rješenja zadane diferencijalne jednadžbe, na ovaj način možemo dobiti neke informacije o ponašanju rješenja. Npr. ako je $p < 900$, vidimo kako sve strelice pokazuju prema dolje, iz čega možemo zaključiti da će se populacija miševa smanjivati, tj. sove će jesti miševe brže nego što će se pojavljivati nove generacije miševa. S druge strane, kada je $p > 900$ vidimo da sve strelice pokazuju prema gore, tj. populacija miševa raste. Isto tako, vidljivo je kako je $p = 900$ granica u kojoj strelice nemaju nagib, tj. paralelne su s t-osi što znači da ta veličina populacije predstavlja ravnotežu, tj. *ekvilibrijum*. Ekvilibrijum je na slici 191 prikazan kao horizontalna linija na nivou $p = 900$. Prema tome, konstantna funkcija $p(t) = 900$ za $t \geq 0$ je jedno moguće rješenje diferencijalne jednadžbe (59). Čim naučimo rješavati diferencijalne jednadžbe, moći ćemo pronaći i sva ostala rješenja ove diferencijalne jednadžbe (v. primjer 8.2.1).

Diferencijalna jednadžba je jednadžba koja povezuje nepoznatu funkciju, njezine varijable i derivacije te funkcije. Kažemo da je diferencijalna jednadžba *obična* ako nepoznata funkcija u toj jednadžbi ovisi o samo jednoj realnoj varijabli. *Opći oblik* obične diferencijalne jednadžbe je

$$F\big(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0, \tag{60}$$

ili ekvivalentno

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

gdje je y nepoznata funkcija varijable x.

Red obične diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije koja se u jednadžbi pojavljuje. Npr. $xy' + 3y = 7$ je obična diferencijalna jednadžba prvog reda, dok je $y''' - x^2yy' = e^x$ obična diferencijalna jednadžba trećeg reda.

Rješenje diferencijalne jednadžbe (60) je svaka funkcija koja, zajedno sa svojim derivacijama, identički zadovoljava jednadžbu (60).

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe (60) čini familija funkcija

$$G(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{61}$$

gdje su $C_1, \ldots, C_n$ nezavisne, po volji odabrane realne konstante. Pritom je broj konstanti u općem rješenju jednak redu jednadžbe. Za svaki se izbor konstanti $C_1, \ldots, C_n$ dobije jedno posebno, tj. *partikularno rješenje* diferencijalne jednadžbe (60). Graf partikularnog rješenja jednadžbe (60) nazivamo *integralnom krivuljom*. Grafički prikaz općeg rješenja jednadžbe (60) čini familija integralnih krivulja.

Uz običnu diferencijalnu jednadžbu n-tog reda usko je vezan tzv. *Cauchyjev problem*. Ovdje je potrebno odrediti funkciju $y = y(x)$ koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0$ i *početne uvjete*

$$y_0 = y(x_0), \quad y_1 = y'(x_0), \quad \ldots, \quad y_{n-1} = y^{(n-1)}(x_0),$$

kojima se zadaje vrijednost funkcije $y = y(x)$ i svih njenih derivacija do reda $n-1$ u točki x_0. Broj početnih uvjeta jednak je redu diferencijalne jednadžbe.

Proučavanje diferencijalnih jednadžbi znatno će olakšati njihovo klasificiranje u razne tipove, te zatim razmatranje svakog tipa zasebno.

8.2 Obične diferencijalne jednadžbe prvog reda

Opći oblik diferencijalne jednadžbe prvog reda je

$$F(x, y, y') = 0, \tag{62}$$

gdje je y nepoznata funkcija varijable x. Jednadžbu (62) nekad je moguće zapisati u obliku

$$y' = f(x, y),$$

odnosno, uzevši u obzir da je $y' = \frac{dy}{dx}$, u obliku

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{63}$$

Stavimo li $P(x, y) = -f(x, y)$ i $Q(x, y) = 1$, jednadžbu (63) možemo zapisati kao

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Opće rješenje jednadžbe (62) čini familija funkcija

$$G(x, y, C) = 0,$$

gdje je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta.

U daljnjem ćemo, prema obliku funkcije f, klasificirati tipove diferencijalnih jednadžbi prvog reda, te izložiti neke metode za njihovo rješavanje.

8.2.1 Diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama

Ako je

$$f(x, y) = g(x)h(y),$$

jednadžba (63) može se zapisati kao

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y). \tag{64}$$

Ako je $h(y) \neq 0$ za svaki y, tada (64) poprima oblik

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx. \tag{65}$$

Jednadžbu (65) nazivamo *običnom diferencijalnom jednadžbom sa separiranim varijablama.* Naziv dolazi od činjenice da se varijabla x, te sve funkcije koje ovise isključivo o x, mogu separirati, tj. odvojiti na jednu stranu, dok na drugoj strani ostaje y i funkcije koje ovise o y. Traženje analitičkog rješenja ovakvog tipa diferencijalnih jednadžbi svodi se na integriranje obje strane jednakosti u (65).

Ako je diferencijalna jednadžba zapisana u obliku

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

tada se varijable mogu separirati ukoliko je

$$P(x, y) = g_1(x)h_1(y), \quad Q(x, y) = g_2(x)h_2(y).$$

Primjer 8.2.1. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450$, $t \geq 0$.

Rješenje. S ovom diferencijalnom jednadžbom već smo se susreli u motivacijskom primjeru, gdje smo razmotrili matematički model rasta/pada populacije miševa. Napišimo zadanu jednadžbu kao

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p - 900}{2}.$$

Uz pretpostavku $p \neq 900$ slijedi

$$\frac{dp}{p - 900} = \frac{1}{2} dt.$$

Kako se očito radi o diferencijalnoj jednadžbi sa separiranim varijablama, opće rješenje ove jednadžbe dobit ćemo tako da integriramo obje strane te jednadžbe. Dakle,

$$\int \frac{dp}{p - 900} = \int \frac{1}{2} dt,$$

tj.

$$\ln |p - 900| = \frac{1}{2} t + C_1, \tag{66}$$

gdje je $C_1 \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. Djelujemo li eksponencijalnom funkcijom s bazom e na obje strane jednadžbe (66), imamo

$$|p - 900| = e^{C_1} e^{\frac{t}{2}},$$

odakle je

$$p - 900 = \pm e^{C_1} e^{\frac{t}{2}},$$

odnosno

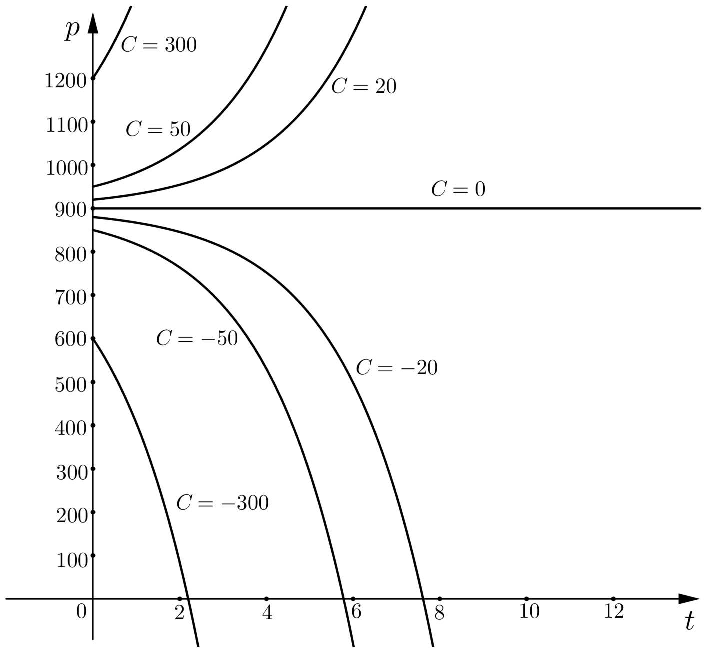
$$p = 900 \pm e^{C_1} e^{\frac{t}{2}}.$$

Budući da je konstanta $C_1 \in \mathbb{R}$ birana proizvoljno, možemo pisati

$$p = 900 + C e^{\frac{t}{2}}, \tag{67}$$

gdje je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta.

Sa (67) je dano *opće rješenje* zadane diferencijalne jednadžbe. Primijetimo da je konstantna funkcija $p(t) = 900$ za $t \geq 0$ također rješenje, koje iz ovog općeg rješenja dobijemo za $C = 0$. Na slici 192 prikazano je nekoliko integralnih krivulja, tj. grafova partikularnih rješenja za različite vrijednosti konstante C. Primijetimo kako su svojstva rasta, odnosno pada populacije sada jasno vidljiva iz integralnih krivulja.



Slika 192: Integralne krivulje

Ukoliko nas zanima samo jedno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe, tada od svih mogućih rješenja izaberemo ono koje zadovoljava neki zadani *početni uvjet*. Npr., ako je u našem primjeru veličina populacije miševa na početku iznosila 850, tada taj uvjet možemo zapisati kao $p(0) = 850$. To znači da odgovarajuća integralna krivulja prolazi kroz točku $(0, 850)$, pa ćemo koristeći taj podatak u općem rješenju (67) odrediti konstantu C. Dakle, uvrštavanjem $t = 0$ i $p = 850$ u (67) dobije se

$$850 = 900 + C,$$

odakle slijedi $C = -50$. Prema tome, traženo rješenje je

$$p(t) = 900 - 50e^{\frac{t}{2}}.$$

Primjer 8.2.2. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \dfrac{x^2}{1-y^2}$.

Rješenje. Zapišimo prvo jednadžbu u obliku

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2},$$

te zatim, množeći obje strane jednadžbe s $(1-y^2)dx$, separiramo varijable. Dakle,

$$(1-y^2)dy = x^2dx.$$

Opće rješenje dobit ćemo integriranjem obiju strana gornje jednadžbe. Prema tome,

$$\int (1-y^2)dy = \int x^2dx,$$

odnosno

$$y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Primjer 8.2.3. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \dfrac{x^2}{y}$.

Rješenje. Zapišimo jednadžbu u obliku

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}.$$

Nakon separiranja varijabli imamo

$$ydy = x^2dx,$$

odakle integriranjem dobivamo opće rješenje zadane jednadžbe, koje glasi

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Primjer 8.2.4. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' + y^2 \sin x = 0$.
Rješenje. Zapišimo jednadžbu kao $\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x$. Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y^2} &= -\sin x dx, \\
\int \frac{dy}{y^2} &= \int -\sin x dx, \\
-\frac{1}{y} &= \cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\
y &= -\frac{1}{\cos x + C}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Primjer 8.2.5. Naći rješenje Cauchyjevog problema $y' = (1-2x)y^2$, $y(0) = -\frac{1}{6}$.

Rješenje. Najprije ćemo naći opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe. Dakle,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (1-2x)y^2, \\ \frac{dy}{y^2} &= (1-2x)dx, \\ \int \frac{dy}{y^2} &= \int (1-2x)dx, \\ -\frac{1}{y} &= x - x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y &= \frac{1}{x^2 - x - C}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Konstantu C odredit ćemo iz zadanog početnog uvjeta $y(0) = -\frac{1}{6}$. Uvrstimo li $y = -\frac{1}{6}$ i $x = 0$ u opće rješenje, dobijemo $C = 6$. Dakle, partikularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = -\frac{1}{6}$ je

$$y = \frac{1}{x^2 - x - 6}.$$

Primjer 8.2.6. Naći rješenje Cauchyjevog problema $y' = \dfrac{2x}{y + x^2 y}$, $y(0) = -2$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2x}{y(1+x^2)}, \\ y dy &= \frac{2x}{1+x^2} dx, \\ \int y dy &= \int \frac{2x}{1+x^2} dx, \\ \frac{y^2}{2} &= \ln(1+x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Iz početnog uvjeta $y(0) = -2$ računamo konstantu $C \in \mathbb{R}$. Dakle,

$$\frac{(-2)^2}{2} = \ln 1 + C,$$

odakle slijedi $C = 2$. Funkcija koja zadovoljava zadanu diferencijalnu jednadžbu i početni uvjet je

$$y^2 = 2\ln(1+x^2) + 4.$$

8.2.2 Homogena diferencijalna jednadžba

Za običnu diferencijalnu jednadžbu $y' = f(x, y)$ kažemo da je *homogena* ako za svaki $t \neq 0$ i za svaki x i y vrijedi

$$f(tx, ty) = f(x, y). \tag{68}$$

Drugim riječima, zamjena x s tx i y s ty ne utječe na vrijednost $f(x, y)$. Ako u (68) stavimo $t = 1/x$, diferencijalna jednadžba $y' = f(x, y)$ postaje $y' = f(1, \frac{y}{x})$, tj. desna strana je funkcija od $\frac{y}{x}$, pa uz oznaku $f(1, \frac{y}{x}) = \varphi(\frac{y}{x})$ jednadžbu možemo pisati kao

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{69}$$

Ovakav tip diferencijalne jednadžbe rješavamo uvođenjem nove funkcije $u = u(x)$ tako da je $u = \frac{y}{x}$. Slijedi $y = ux$, pa deriviranjem dobijemo izraz za y', tj. $y' = u'x + u$. Sada jednadžba (69) glasi

$$\begin{aligned} u'x + u &= \varphi(u), \\ \frac{du}{dx}x &= \varphi(u) - u, \\ \frac{du}{\varphi(u) - u} &= \frac{dx}{x}, \end{aligned}$$

tj. dobili smo jednadžbu sa separiranim varijablama.

Primjer 8.2.7. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \frac{x+y}{x}$.

Rješenje. Uočimo

$$y' = \frac{x + y}{x} = 1 + \frac{y}{x}.$$

S obzirom da je desna strana jednadžbe funkcija od $\frac{y}{x}$, jednadžba je homogena. Uvodimo supstituciju $u = \frac{y}{x}$. Tada je $y' = u'x + u$ pa slijedi

$$\begin{aligned} u'x + u &= 1 + u, \\ \frac{du}{dx}x &= 1, \\ du &= \frac{dx}{x} \quad \Big| \int, \\ u &= \ln|x| + \ln|C|, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ u &= \ln|Cx|, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{y}{x} &= \ln|Cx|, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ y &= x \ln|Cx|, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Primjer 8.2.8. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $(4-\frac{y^2}{x^2})dx+\frac{2y}{x}dy=0$.
Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}\left(4-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy &= 0 \quad \Big| : dx,\\ 4-\frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}y' &= 0,\\ 2\frac{y}{x}y' &= \frac{y^2}{x^2}-4,\\ y' &= \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-4}{2\frac{y}{x}}.\end{aligned}$$

Uočimo da je desna strana jednadžbe funkcija od $\frac{y}{x}$, pa je zadana diferencijalna jednadžba homogena. Uvodimo supstituciju $u=\frac{y}{x}$. Tada je $y'=u'x+u$ pa slijedi

$$\begin{aligned}u'x+u &= \frac{u^2-4}{2u},\\ \frac{du}{dx}x &= \frac{u^2-4}{2u}-u=\frac{-u^2-4}{2u},\\ \frac{2u}{u^2+4}du &= -\frac{dx}{x}.\end{aligned}$$

Integrirajmo najprije lijevu stranu gornje jednakosti. Dakle,

$$\int\frac{2u}{u^2+4}du=\left|\begin{array}{l} t=u^2+4\\ dt=2udu\end{array}\right|=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln|u^2+4|=\ln(u^2+4).$$

Slijedi

$$\begin{aligned}\ln(u^2+4) &= -\ln|x|+\ln|C|, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ \ln(u^2+4) &= \ln\left|\frac{C}{x}\right|, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \Big|e^{(\cdot)},\\ u^2+4 &= \left|\frac{C}{x}\right|, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ \frac{y^2}{x^2}+4 &= \left|\frac{C}{x}\right|, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \Big|\cdot x^2,\\ y^2+4x^2 &= |Cx|, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.\end{aligned}$$

Primjer 8.2.9. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \frac{x^2+2y^2}{xy}$.
Rješenje. Zapišimo

$$y' = \frac{x^2+2y^2}{xy} = \frac{x^2\left(1+2\frac{y^2}{x^2}\right)}{x^2(\frac{y}{x})} = \frac{1+2(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}}.$$

Jednadžba je homogena, pa uvodimo supstituciju $u = \frac{y}{x}$. Tada je $y' = u'x + u$, pa imamo

$$\begin{aligned} u'x+u &= \frac{1+2u^2}{u}, \\ \frac{du}{dx}x &= \frac{1+2u^2}{u} - u = \frac{1+u^2}{u}, \\ \frac{u}{1+u^2}\,du &= \frac{1}{x}\,dx. \end{aligned}$$

Integriranjem lijeve strane dobijemo

$$\begin{aligned} \int \frac{u}{1+u^2}du &= \left| \begin{array}{c} t = 1+u^2 \\ dt = 2udu \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln\sqrt{1+u^2}. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \ln\sqrt{1+u^2} &= \ln|x| + \ln|C|, \quad C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ \ln\sqrt{1+u^2} &= \ln|Cx|, \quad C \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \Big| e^{(\cdot)}, \\ \sqrt{1+u^2} &= |Cx|, \quad C \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \Big| (\cdot)^2, \\ 1+\frac{y^2}{x^2} &= |Cx|^2, \quad C \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \Big| \cdot x^2, \\ x^2+y^2 &= Cx^4, \quad C \in \langle 0, \infty\rangle. \end{aligned}$$

Primjer 8.2.10. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $x^2y' + xy + 2y^2 = 0$.
Rješenje.

$$\begin{aligned} x^2y' + xy + 2y^2 &= 0 \quad \Big| : x^2, \\ y' + \frac{y}{x} + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 &= 0, \\ y' &= -\frac{y}{x} - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2. \end{aligned}$$

Jednadžba je homogena. Uvodimo supstituciju $u=\frac{y}{x}$. Tada je $y'=u'x+u$, pa je

$$\begin{aligned} u'x+u &= -u-2u^2, \\ \frac{du}{dx}x &= -2(u^2+u), \\ \frac{du}{u^2+u} &= -\frac{2}{x}\,dx. \end{aligned}$$

Rastavom na parcijalne razlomke

$$\frac{1}{u^2+u}=\frac{1}{u(u+1)}=\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}$$

slijedi

$$\int\frac{du}{u^2+u}=\int\frac{du}{u}-\int\frac{du}{u+1}=\ln|u|-\ln|u+1|=\ln\left|\frac{u}{u+1}\right|.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \ln\left|\frac{u}{u+1}\right| &= -2\ln|x|+\ln|C|, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ \ln\left|\frac{u}{u+1}\right| &= \ln\frac{|C|}{x^2}, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \Big| e^{(\cdot)}, \\ \left|\frac{u}{u+1}\right| &= \frac{|C|}{x^2}, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ \frac{u}{u+1} &= \frac{C}{x^2}, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+1} &= \frac{C}{x^2}, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ \frac{y}{y+x} &= \frac{C}{x^2}, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ yx^2 &= Cy+Cx, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ y(x^2-C) &= Cx, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ y &= \frac{Cx}{x^2-C}, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \end{aligned}$$

8.2.3 Linearna diferencijalna jednadžba

Za običnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda $y'=f(x,y)$ kažemo da je *linearna* ako funkcija f ovisi linearno o zavisnoj varijabli y, tj. ako diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{70}$$

gdje su $p(x)$ i $q(x)$ neprekidne funkcije na nekom otvorenom intervalu $\langle a,b\rangle$. Rješenje $y=y(x)$ jednadžbe (70) tražimo na tom otvorenom intervalu $\langle a,b\rangle$ pomoću *Lagrangeove metode varijacije konstante.* Prvi korak te metode je rješavanje pripadne *homogene ili prikraćene diferencijalne jednadžbe*

$$y'+p(x)y=0,$$

koja se može riješiti separacijom varijabli, te se kao rješenje dobije

$$y_H=\varphi(x,C),$$

gdje je $C\in\mathbb{R}$ konstanta. U drugom koraku tražimo opće rješenje početne jednadžbe (70) u obliku

$$y=\varphi\big(x,C(x)\big),$$

gdje smo u rješenju pripadne homogene diferencijalne jednadžbe y_H konstantu C zamijenili funkcijom $C(x)$. Pogledajmo na nekoliko primjera kako ova metoda funkcionira.

Primjer 8.2.11. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'+\frac{1}{x}y=\sin(2x)$.

Rješenje. Uočimo da je zadana diferencijalne jednadžba linearna. Pritom je

$$p(x)=\frac{1}{x},\quad q(x)=\sin(2x).$$

Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu $y'+\frac{1}{x}y=0$. Dakle,

$$\begin{aligned}
y'+\frac{1}{x}\,y &= 0,\\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x},\\
\frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x}\quad \Big|\int,\\
\ln|y| &= -\ln|x|+\ln|C|,\quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\
\ln|y| &= \ln\left|\frac{C}{x}\right|,\quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\quad \Big|e^{(\cdot)},\\
y_H &= \frac{C}{x},\quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.
\end{aligned}$$

U rješenju y_H pripadne homogene jednadžbe zamijenimo konstantu C funkcijom $C(x)$. Rješenje početne diferencijalne jednadžbe tražimo u obliku

$$y=\frac{C(x)}{x}.$$

U tu svrhu izračunat ćemo y', te zatim $y = \frac{C(x)}{x}$ i dobiveni y' uvrstiti u zadanu diferencijalnu jednadžbu. Prema tome,

$$y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2},$$

pa se uvrštavanjem dobivenih izraza za y i y' u jednadžbu $y' + \frac{1}{x}y = \sin(2x)$ dobije

$$\begin{aligned} \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{C(x)}{x} &= \sin(2x), \\ \frac{C'(x)}{x} &= \sin(2x), \\ C'(x) &= x \sin(2x). \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned} C(x) &= \int x \sin(2x) dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin(2x)dx & v = -\frac{1}{2}\cos(2x) \end{array} \right| \\ &= -\frac{1}{2} x \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + A, \quad A \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem funkcije $C(x)$ u $y = \frac{C(x)}{x}$ dobivamo opće rješenje početne jednadžbe, koje glasi

$$y = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4x}\sin(2x) + \frac{A}{x}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Primjer 8.2.12. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - 3y = e^{2x}$.

Rješenje. Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu. Dakle,

$$\begin{aligned} y' - 3y &= 0, \\ \frac{dy}{dx} &= 3y, \\ \frac{dy}{y} &= 3dx \quad \Big| \int, \\ \ln|y| &= 3x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \quad \Big| e^{(\cdot)}, \\ |y| &= e^{3x} e^{C_1} = Ce^{3x}, \quad C = e^{C_1} > 0, \\ y_H &= Ce^{3x}, \quad C \neq 0. \end{aligned}$$

Opće rješenje zadane diferencijalne jednadže tražimo u obliku

$$y = C(x)e^{3x}.$$

Deriviranjem ovog izraza dobije se

$$y' = C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x},$$

pa uvrštavanjem y i y' u jednadžbu $y' - 3y = e^{2x}$ imamo

$$\begin{aligned}
C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x} - 3C(x)e^{3x} &= e^{2x}, \\
C'(x)e^{3x} &= e^{2x}, \\
C'(x) &= e^{-x} \quad \Big| \int, \\
C(x) &= -e^{-x} + A, \quad A \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Stoga opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi

$$y = (-e^{-x} + A)e^{3x} = -e^{2x} + Ae^{3x}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Primjer 8.2.13. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $xy' - 2y = x^5$.
Rješenje. Podijele li se obje strane zadane jednadžbe s x, dobije se

$$y' - \frac{2}{x}y = x^4.$$

S obzirom da se radi o linearnoj jednadžbi, rješavamo prvo pripadnu homogenu jednadžbu. Dakle,

$$\begin{aligned}
y' - \frac{2}{x}y &= 0, \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{2}{x}\,y, \\
\frac{dy}{y} &= \frac{2}{x}\,dx \quad \Big| \int, \\
\ln|y| &= 2\ln|x| + \ln|C|, \quad C \neq 0, \\
\ln|y| &= \ln|Cx^2|, \quad C \neq 0 \quad \Big| e^{(\cdot)}, \\
y_H &= Cx^2, \quad C \neq 0.
\end{aligned}$$

Opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe tražimo u obliku

$$y = C(x)x^2.$$

Deriviranjem se dobije

$$y' = C'(x)x^2 + 2C(x)x.$$

Uvrstimo li dobivene izraze za y i y' u polaznu jednadžbu $y' - \frac{2}{x}y = x^4$, imamo

$$\begin{aligned}
C'(x)x^2 + 2C(x)x - \frac{2}{x}C(x)x^2 &= x^4,\\
C'(x)x^2 &= x^4,\\
C'(x) &= x^2,\\
C(x) &= \frac{x^3}{3} + A, \quad A \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Opće rješenje je

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + A\right)x^2 = \frac{x^5}{3} + Ax^2, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Primjer 8.2.14. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'\sin x + y\cos x = 1$.

Rješenje. Podijele li se obje strane zadane jednadžbe sa $\sin x$, dobije se

$$y' + y\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Jednadžba je linearna, pa prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu.

$$\begin{aligned}
y' + y\operatorname{ctg} x &= 0,\\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{\cos x}{\sin x}y,\\
\frac{dy}{y} &= -\frac{\cos x}{\sin x}dx \quad \Big| \int,\\
\ln|y| &= -\ln|\sin x| + \ln|C|, \quad C \neq 0,\\
\ln|y| &= \ln\left|\frac{C}{\sin x}\right|, \quad C \neq 0 \quad \Big| e^{(\cdot)},\\
y_H &= \frac{C}{\sin x}, \quad C \neq 0.
\end{aligned}$$

Opće rješenje tražimo u obliku

$$y = \frac{C(x)}{\sin x}.$$

Deriviranjem se dobije

$$y' = \frac{C'(x)\sin x - C(x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{C'(x)}{\sin x} - \frac{C(x)\cos x}{\sin^2 x}\ .$$

Uvrštavanjem izraza za y i y' u početnu jednadžbu $y' + y\,\mathrm{ctg}\,x = \frac{1}{\sin x}$ slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{C'(x)}{\sin x} - \frac{C(x)\cos x}{\sin^2 x} + \frac{C(x)}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x} &= \frac{1}{\sin x},\\
C'(x) &= 1,\\
C(x) &= \int dx = x + A, \quad A \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe je

$$y(x) = \frac{x}{\sin x} + \frac{A}{\sin x}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

8.2.4 Bernoullijeva diferencijalna jednadžba

Opći oblik *Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe* je

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{71}$$

gdje je $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq 1$, te $p(x)$ i $q(x)$ neprekidne funkcije na nekom otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$. Ova jednadžba se svodi na linearnu uvođenjem nove funkcije $z = z(x)$ takve da je $z = y^{1-\alpha}$.

Primijetimo da za $\alpha = 0$ dobijemo linearnu, a za $\alpha = 1$ jednadžbu sa separiranim varijablama.

Primjer 8.2.15. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - y\,\mathrm{tg}\,x + y^2\cos x = 0$.

Rješenje. Jednadžba $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = -y^2\cos x$ je Bernoullijeva uz $p(x) = -\mathrm{tg}\,x$, $q(x) = -\cos x$ i $\alpha = 2$. Uvodimo supstituciju

$$z = y^{1-\alpha} = y^{-1} = \frac{1}{y}.$$

Računamo $z' = \frac{dz}{dx}$ kako bismo dobili izraz za y'. Dakle,

$$z' = -\frac{1}{y^2}y' \quad\Longrightarrow\quad y' = -y^2 z'.$$

Sada je

$$\begin{aligned} y' - y \operatorname{tg} x &= -y^2 \cos x, \\ -y^2 z' - \operatorname{tg} x \cdot y &= -\cos x \cdot y^2 \quad \Big| : (-y^2), \\ z' + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{y} &= \cos x, \\ z' + \operatorname{tg} x \cdot z &= \cos x. \end{aligned}$$

Dobili smo linearnu diferencijalnu jednadžbu za funkciju $z = z(x)$, pa prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu. Dakle,

$$\begin{aligned} z' + \operatorname{tg} x \cdot z &= 0, \\ \frac{dz}{dx} &= -\operatorname{tg} x \cdot z, \\ \frac{dz}{z} &= -\operatorname{tg} x dx \quad \Big| \int, \\ \ln|z| &= \ln|\cos x| + \ln|C|, \quad C \neq 0, \\ \ln|z| &= \ln|C \cos x|, \quad C \neq 0 \quad \Big| e^{(\cdot)}, \\ z_H &= C \cos x, \quad C \neq 0. \end{aligned}$$

Opće rješenje polazne linearne diferencijalne jednadžbe tražimo u obliku

$$z = C(x) \cos x.$$

Odavde slijedi

$$z' = C'(x) \cos x - C(x) \sin x.$$

Uvrstimo dobivene izraze za z i z' u jednadžbu $z' + \operatorname{tg} x \cdot z = \cos x$. Dobije se

$$\begin{aligned} C'(x) \cos x - C(x) \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} C(x) \cos x &= \cos x, \\ C'(x) &= 1, \\ C(x) &= x + A, \quad A \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe je

$$z = C(x) \cos x = (x + A) \cos x, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Kako je $z = \frac{1}{y}$, opće rješenje početne Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe glasi $\frac{1}{y} = (x + A) \cos x$, $A \in \mathbb{R}$, tj.

$$y = \frac{1}{(x + A) \cos x}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Primjer 8.2.16. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \frac{y^2-x}{2y(x+1)}$.
Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y^2-x}{2y(x+1)}, \\ y' &= \frac{y^2}{2y(x+1)} - \frac{x}{2y(x+1)}, \\ y' - \frac{1}{2(x+1)}y &= -\frac{x}{2(x+1)}y^{-1}. \end{aligned}$$

To je Bernoullijeva diferencijalna jednadžba, gdje je $\alpha = -1$. Uvodimo supstituciju

$$z = y^{1-\alpha} = y^2.$$

Deriviranjem se dobije

$$z' = 2yy' \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{z'}{2y}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{2(x+1)}y &= -\frac{x}{2(x+1)}y^{-1}, \\ \frac{z'}{2y} - \frac{1}{2(x+1)}y &= -\frac{x}{2(x+1)}y^{-1} \quad \Big| \cdot 2y, \\ z' - \frac{1}{x+1}y^2 &= -\frac{x}{x+1}, \\ z' - \frac{1}{x+1}z &= -\frac{x}{x+1}. \end{aligned}$$

Dobili smo linearnu diferencijalnu jednadžbu za nepoznatu funkciju $z = z(x)$. Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu. Dakle,

$$\begin{aligned} z' - \frac{1}{x+1}z &= 0, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{1}{x+1}z, \\ \frac{dz}{z} &= \frac{dx}{x+1} \quad \Big| \int, \\ \ln|z| &= \ln|x+1| + \ln|C|, \quad C \neq 0, \\ \ln|z| &= \ln|C(x+1)|, \quad C \neq 0 \quad \Big| e^{(\cdot)}, \\ z_H &= C(x+1), \quad C \neq 0. \end{aligned}$$

Opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe tražimo u obliku

$$z = C(x)(x+1).$$

Deriviranjem se dobije

$$z' = C'(x)(x+1) + C(x).$$

Uvrstimo li izraze za z i z' u jednadžbu $z' - \frac{1}{x+1}z = -\frac{x}{x+1}$, imamo

$$\begin{aligned} C'(x)(x+1) + C(x) - \frac{1}{x+1}C(x)(x+1) &= -\frac{x}{x+1}, \\ C'(x)(x+1) &= -\frac{x}{x+1}, \\ C'(x) &= -\frac{x}{(x+1)^2}, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} C(x) &= -\int \frac{x}{(x+1)^2}dx = -\int \left(\frac{x+1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx \\ &= -\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= -\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + A, \quad A \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} z &= C(x)(x+1) = \left(-\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + A\right)(x+1) \\ &= -(x+1)\ln|x+1| - 1 + A(x+1), \quad A \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

tj.

$$y^2 = -(x+1)\ln|x+1| + A(x+1) - 1, \quad A \in \mathbb{R}.$$

8.2.5 Egzaktna diferencijalna jednadžba

Neka su $P = P(x,y)$ i $Q = Q(x,y)$ realne funkcije dviju varijabli koje imaju neprekidne parcijalne derivacije na nekom skupu $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Za diferencijalnu jednadžbu

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{72}$$

kažemo da je *egzaktna* ako je za sve $(x, y) \in A$ ispunjen uvjet

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y). \tag{73}$$

U tom slučaju se može dokazati da postoji funkcija $\psi = \psi(x, y)$ za koju vrijedi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) = Q(x, y), \tag{74}$$

pa se jednadžba (72) zapisuje u obliku

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y)dy = 0,$$

odnosno

$$d\psi(x, y) = 0.$$

To znači da je

$$\psi(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

opće rješenje diferencijalne jednadžbe (72), pri čemu se funkcija ψ određuje iz uvjeta (74). Funkcija ψ obično se naziva *potencijal* ili *potencijalno polje*. Napomenimo da su neke fizikalne veličine, poput primjerice gravitacijskog, električnog ili magnetskog polja, primjeri potencijalnih polja.

Primjer 8.2.17. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0$.

Rješenje. Iz zapisa diferencijalne jednadžbe čitamo

$$P(x, y) = yx^{y-1}, \quad Q(x, y) = x^y \ln x.$$

Provjerimo je li zadovoljen uvjet (73). Kako je

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x, \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1}, \end{aligned}$$

vidimo da je $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ za sve parove (x, y), pa zaključujemo da je dana diferencijalna jednadžba egzaktna.

Sljedeći korak je naći funkciju $\psi = \psi(x, y)$ takvu da vrijedi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x. \tag{75}$$

Integriranjem $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ po x (smatrajući y konstantom) dobije se

$$\begin{aligned}\psi(x,y) &= \int \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y)dx + \varphi(y) = \int yx^{y-1}dx + \varphi(y)\\ &= yx^y\frac{1}{y} + \varphi(y) = x^y + \varphi(y).\end{aligned}$$

Nepoznatu funkciju $\varphi = \varphi(y)$ (koja ne ovisi o x) odredit ćemo tako da najprije dobiveni izraz za funkciju $\psi = \psi(x,y)$ parcijalno deriviramo po varijabli y, tj.

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x + \varphi'(y).$$

Sada je, prema već poznatom izrazu (75) za $\frac{\partial\psi}{\partial y}$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x + \varphi'(y) = x^y \ln x,$$

pa je $\varphi'(y) = 0$, odakle slijedi $\varphi(y) = A$ za svaki y. Prema tome,

$$\psi(x,y) = x^y + A, \quad A \in \mathbb{R},$$

pa opće rješenje zadane jednadžbe glasi $\psi(x,y) = x^y + A = C$, $A, C \in \mathbb{R}$, odnosno

$$x^y = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Primjer 8.2.18. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $(2x+y^2)dx + 2xydy = 0$.

Rješenje. Diferencijalna jednadžba zapisuje se kao $P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0$ uz

$$P(x,y) = 2x + y^2, \quad Q(x,y) = 2xy.$$

Tada je

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2y, \quad \frac{\partial q}{\partial x}(x,y) = 2y,$$

pa vidimo da je ispunjen uvjet $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ za sve parove (x,y). Time smo provjerili da je zadana diferencijalna jednadžba egzaktna.

Potrebno je odrediti funkciju $\psi = \psi(x,y)$ koja zadovoljava uvjete (74), tj.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) = 2x + y^2, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

Integriranjem $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ po y (smatrajući pritom x konstantom) dobije se

$$\psi(x,y) \;=\; \int \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y)dy + \varphi(x) = \int 2xydy + \varphi(x) = xy^2 + \varphi(x).$$

Nepoznatu funkciju $\varphi = \varphi(x)$ (koja ne ovisi o y) odredit ćemo tako da najprije dobiveni izraz za funkciju $\psi = \psi(x,y)$ parcijalno deriviramo po varijabli x, čime se dobije

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) = y^2 + \varphi'(x).$$

Kako je osim toga $\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) = 2x + y^2$, zaključujemo da je

$$y^2 + \varphi'(x) = 2x + y^2,$$

odnosno

$$\varphi'(x) = 2x,$$

odakle slijedi

$$\varphi(x) = \int 2xdx = x^2 + A, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Prema tome, $\psi(x,y) = xy^2 + x^2 + A$, $A \in \mathbb{R}$. Opće rješenje zadane jednadžbe je $\psi(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$, odnosno

$$xy^2 + x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Primjer 8.2.19. Naći rješenje diferencijalne jednadžbe $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$ koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 2$.

Rješenje. Iz zapisa diferencijalne jednadžbe čitamo

$$P(x,y) = 2x^3 - xy^2, \quad Q(x,y) = 2y^3 - x^2y.$$

Provjerimo je li ispunjen uvjet (73). Budući da je

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -2xy,$$

tj. $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ za sve (x,y), zaključujemo da je jednadžba egzaktna. Stoga je potrebno naći funkciju $\psi = \psi(x,y)$ takvu da je

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) = 2x^3 - xy^2, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) = 2y^3 - x^2y.$$

Računamo

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= \int \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y)dx + \varphi(y) = \int (2x^3 - xy^2)dx + \varphi(y) \\ &= \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 + \varphi(y). \end{aligned}$$

Deriviranjem dobivenog izraza po varijabli y dobije se

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) = -x^2y + \varphi'(y).$$

Kako je osim toga

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) = 2y^3 - x^2y,$$

zaključujemo da je

$$\varphi'(y) = 2y^3.$$

Odavde je

$$\varphi(y) = \int 2y^3dy = \frac{1}{2}y^4 + A, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}y^4 + A \\ &= \frac{1}{2}(x^4 + y^4) - \frac{1}{2}x^2y^2 + A, \quad A \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Opće rješenje je $\psi(x,y) = C$ odnosno

$$\frac{1}{2}(x^4 + y^4) - \frac{1}{2}x^2y^2 + A = C,$$

tj.

$$x^4 + y^4 - x^2y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Iz početnog uvjeta $y(1) = 2$ odredit ćemo konstantu C. Dakle,

$$1 + 16 - 4 = C,$$

pa je $C = 13$. Stoga, od svih mogućih rješenja, ono koje zadovoljava uvjet $y(1) = 2$ je

$$x^4 + y^4 - x^2y^2 = 13.$$

8.3 Obične diferencijalne jednadžbe višeg reda

Sjetimo se da se red diferencijalne jednadžbe definira kao red najveće derivacije koja se pojavljuje u jednadžbi. To znači da diferencijalnu jednadžbu n-tog reda možemo općenito zapisati kao

$$F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0. \tag{76}$$

Opće rješenje jednadžbe (76) dano je s

$$G(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{77}$$

gdje su $C_1, \ldots, C_n$ realne konstante čiji broj odgovara redu diferencijalne jednadžbe.

U Cauchyjevom problemu za diferencijalnu jednadžbu n-tog reda zadano je n početnih uvjeta oblika

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

gdje su $x_0, y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Osim u jednom posebnom slučaju, mi ćemo se baviti samo diferencijalnim jednadžbama drugog reda.

8.3.1 Neposredno integriranje

Ako je diferencijalna jednadžba oblika $y^{(n)} = f(x)$, tada do općeg rješenja dolazimo integriranjem desne strane jednadžbe onoliko puta koliki je red jednadžbe, tj. rješenje je dano izrazom

$$y = \underbrace{\int dx \int \ldots \int}_{n \text{ puta}} f(x)dx.$$

Primjer 8.3.1. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y''' = x + 6$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} y''' &= x + 6, \\ y'' &= \int (x+6)dx = \frac{1}{2}x^2 + 6x + C_1', \\ y' &= \int \left(\frac{1}{2}x^2 + 6x + C_1'\right) dx = \frac{1}{6}x^3 + 3x^2 + C_1'x + C_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \int \left(\frac{1}{6}x^3 + 3x^2 + C_1'x + C_2\right) dx,\\
&= \frac{1}{24}x^4 + x^3 + \frac{C_1'}{2}x^2 + C_2x + C_3,\\
&= \frac{1}{24}x^4 + x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Primjer 8.3.2. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' = \frac{1}{x} + 2$.
Rješenje.

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{1}{x} + 2,\\
y' &= \int \left(\frac{1}{x} + 2\right) dx = \ln|x| + 2x + C_1',\\
y &= \int \left(\ln|x| + 2x + C_1'\right) dx,\\
&= x\ln|x| - x + x^2 + C_1'x + C_2,\\
&= x\ln|x| + x^2 + C_1x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

8.3.2 Obične diferencijalne jednadžbe drugog reda kojima se može sniziti red

Jednadžbe koje ne sadrže eksplicitno y

Ako je diferencijalna jednadžba oblika

$$F(x, y', y'') = 0,$$

tj. ne sadrži eksplicitno y, tada uvodimo novu funkciju $p = p(x)$ kao

$$p(x) = y'(x).$$

Iz toga slijedi $p'(x) = y''(x)$, pa početna jednadžba prelazi u diferencijalnu jednadžbu prvog reda oblika $F(x, p, p') = 0$. Pogledajmo na nekoliko primjera kako ova metoda funkcionira.

Primjer 8.3.3. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $xy'' + y' = 0$.

Rješenje. U jednadžbi se eksplicitno ne pojavljuje y, pa uvodimo funkciju $p = p(x)$ zadanu kao $p = y'$. Odavde slijedi $p' = y''$, pa zadana jednadžba poprima oblik

$$xp' + p = 0.$$

Sada je

$$\begin{aligned} x\frac{dp}{dx} &= -p, \\ \frac{dp}{p} &= -\frac{dx}{x} \quad \Big| \int, \\ \ln|p| &= -\ln|x| + \ln|C_1| = \ln\left|\frac{C_1}{x}\right|, \end{aligned}$$

pa je rješenje

$$p = \frac{C_1}{x}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Kako je $p = y'$ slijedi

$$\begin{aligned} y' &= \frac{C_1}{x}, \\ dy &= \frac{C_1}{x}dx \quad \Big| \int, \\ y &= C_1 \ln|x| + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Primjer 8.3.4. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $xy'' + y' = x^2$.
Rješenje. Uvodimo supstituciju $p = y'$. Tada je $p' = y''$, pa zadana jednadžba poprima oblik $xp' + p = x^2$, odnosno

$$p' + \frac{1}{x}p = x. \tag{78}$$

Dobili smo linearnu diferencijalnu jednadžbu, pa prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu. Dakle,

$$\begin{aligned} p' + \frac{1}{x}p &= 0, \\ \frac{dp}{dx} + \frac{1}{x}p &= 0, \\ \frac{dp}{p} &= -\frac{dx}{x} \quad \Big| \int, \\ \ln|p| &= -\ln|x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \quad \Big| e^{(\cdot)}, \\ p_H &= \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Zamijenimo konstantu C funkcijom $C(x)$, tj.

$$p = \frac{C(x)}{x}.$$

Tada je
$$p' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}.$$
Uvrštavanjem izraza za p i p' u linearnu jednadžbu (78) dobije se
$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{C(x)}{x} = x,$$
odnosno $C'(x) = x^2$ pa je
$$C(x) = \frac{1}{3}x^3 + C_1.$$
Stoga je
$$p = \frac{1}{3}x^2 + \frac{C_1}{x}.$$
S obzirom da je $p = y'$ slijedi
$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}x^2 + \frac{C_1}{x}, \\ y &= \int \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{C_1}{x} \right) dx = \frac{1}{9}x^3 + C_1 \ln|x| + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Primjer 8.3.5. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - \frac{y'}{x} = -1$.
Rješenje. Uvodimo supstituciju $p = y'$. Tada je $p' = y''$, pa zadana jednadžba poprima oblik $p' - \frac{p}{x} = -1$, odnosno
$$p' = \frac{p}{x} - 1. \tag{79}$$
Dobili smo homogenu diferencijalnu jednadžbu koju rješavamo supstitucijom $u = \frac{p}{x}$. Kako je odavde $p = ux$, slijedi $p' = u'x + u$, pa jednadžba (79) glasi
$$u'x + u = u - 1.$$
Sada je
$$\begin{aligned} u'x &= -1, \\ \frac{du}{dx}x &= -1, \\ du &= -\frac{dx}{x} \quad \Big| \int, \\ u &= -\ln|x| + \ln|C_1| = \ln\left|\frac{C_1}{x}\right|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{p}{x} &= \ln\frac{C_1}{x}, \\
p &= x\ln\frac{C_1}{x}, \\
y' &= x\ln\frac{C_1}{x}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
y &= \int x\ln\frac{C_1}{x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln\frac{C_1}{x} & du = -\frac{1}{x}dx \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| \\
&= \frac{x^2}{2}\ln\frac{C_1}{x} - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln\frac{C_1}{x} + \frac{1}{2}\int xdx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln\frac{C_1}{x} + \frac{x^2}{4} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Jednadžbe koje ne sadrže eksplicitno x

Ako je diferencijalna jednadžba oblika

$$F(y, y', y'') = 0,$$

tj. ne sadrži eksplicitno x, tada definiramo novu funkciju $p = p(y)$ kao

$$p(y(x)) = y'(x).$$

Ovdje je važno primijetiti kako novu funkciju p promatramo kao funkciju od y, pa iz toga slijedi

$$y''(x) = (p \circ y)'(x) = p'(y(x)) \cdot y'(x),$$

odnosno

$$y'' = p'p.$$

Nakon supstitucije početna jednadžba prelazi u diferencijalnu jednažbu prvog reda oblika $F(y, p, p') = 0$.

Primjer 8.3.6. Naći rješenje diferencijalne jednadžbe $y''y^3 = 1$ uz početne uvjete $y(\frac{1}{2}) = 1$, $y'(\frac{1}{2}) = 1$.

Rješenje. U jednadžbi se eksplicitno ne pojavljuje x, pa uvodimo funkciju $p = p(y)$ takvu da je $p = y'$. Odavde slijedi $y'' = p'p$. Prema tome,

$$
\begin{aligned}
y''y^3 &= 1,\\
p'py^3 &= 1,\\
\frac{dp}{dy}py^3 &= 1,\\
pdp &= \frac{1}{y^3}dy \quad \Big| \int,\\
\frac{p^2}{2} &= -\frac{1}{2y^2}+C,\\
p^2 &= -\frac{1}{y^2}+C, \quad C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Iz početnih uvjeta $y(\frac{1}{2}) = 1$, $y'(\frac{1}{2}) = 1$, te supstitucije $p(y(x)) = y'(x)$, slijedi $p(1) = p(y(\frac{1}{2})) = y'(\frac{1}{2}) = 1$, pa iz $p^2 = -\frac{1}{y^2} + C$ možemo izračunati konstantu C. Dakle,

$$
\begin{aligned}
1^2 &= -\frac{1}{1^2}+C,\\
C &= 2.
\end{aligned}
$$

Stoga je $p^2 = 2 - \frac{1}{y^2}$, pa je $p = \pm\sqrt{2-\frac{1}{y^2}}$. S obzirom na početni uvjet $p(1) = 1$, rješenje $p = -\sqrt{2-\frac{1}{y^2}}$ odbacujemo. Dakle, $p = \sqrt{2-\frac{1}{y^2}}$. Kako je $p = y'$, dobije se

$$
y' = \sqrt{2-\frac{1}{y^2}} = \sqrt{\frac{2y^2-1}{y^2}} = \frac{\sqrt{2y^2-1}}{|y|}.
$$

Uzmemo li u obzir početne uvjete $y(\frac{1}{2}) = 1$, $y'(\frac{1}{2}) = 1$, odavde imamo

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{\sqrt{2y^2-1}}{y},\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{2y^2-1}}{y},\\
\frac{ydy}{\sqrt{2y^2-1}} &= dx \quad \Big| \int,\\
\frac{1}{2}\sqrt{2y^2-1} &= x+C, \quad C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Konstantu C odredimo iz početnog uvjeta $y(\frac{1}{2}) = 1$. Dakle,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 1^2 - 1} &= \frac{1}{2} + C, \\ C &= 0. \end{aligned}$$

Stoga je traženo rješenje $\frac{1}{2}\sqrt{2y^2 - 1} = x$, odnosno $\sqrt{2y^2 - 1} = 2x$.

Primjer 8.3.7. Naći rješenje diferencijalne jednadžbe $yy'' - (y')^2 = y^4$ uz početne uvjete $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Rješenje. U jednadžbi se eksplicitno ne pojavljuje x, pa uvodimo funkciju $p = p(y)$ takvu da je $p = y'$. Odavde slijedi $y'' = p'p$. Prema tome,

$$\begin{aligned} yy'' - (y')^2 &= y^4, \\ yp'p - p^2 &= y^4 \quad \Big| : (yp), \\ p' - \frac{1}{y}p &= y^3 p^{-1}. \end{aligned}$$

Dobili smo Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu, pri čemu je $\alpha = -1$. Uvodimo supstituciju $z(y) = p^{1-\alpha} = p^2$, iz čega slijedi $z' = 2pp'$. Dakle,

$$\begin{aligned} p' - \frac{1}{y}p &= y^3 p^{-1} \quad \Big| \cdot 2p, \\ 2pp' - \frac{2}{y}p^2 &= 2y^3, \\ z' - \frac{2}{y}z &= 2y^3. \end{aligned}$$

Dobivenu linearnu difrencijalnu jednadžbu riješimo metodom varijacije konstanti (detalje ostavljamo čitatelju), te kao rješenje dobijemo

$$z = y^4 + Cy^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

S obzirom da je $z = p^2$ slijedi

$$p^2 = y^4 + Cy^2, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{80}$$

Iz početnih uvjeta $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, te supstitucije $p(y(x)) = y'(x)$, slijedi da je $p(1) = p(y(0)) = y'(0) = 1$, pa iz (80) možemo izračunati konstantu C. Dakle,

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1^4 + C \cdot 1^2, \\ C &= 0. \end{aligned}$$

Slijedi $p^2 = y^4$, tj. $p = \pm y^2$. Slučaj $p = -y^2$ ne dolazi u obzir, jer je $p(1) = 1$, pa bismo iz $p = -y^2$ dobili kontradikciju $1 = -1$. Dakle, $p = y^2$. Kako je $p = y'$, jednadžba glasi $y' = y^2$. Prema tome,

$$\begin{aligned} y' &= y^2, \\ \frac{dy}{dx} &= y^2, \\ \frac{dy}{y^2} &= dx \quad \Big| \int, \\ -\frac{1}{y} &= x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Iz $y(0) = 1$ slijedi $C = -1$, pa je

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y} &= x - 1, \\ y &= \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Primjer 8.3.8. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + (y')^2 = 0$.

Rješenje. U jednadžbi se eksplicitno ne pojavljuju niti x niti y. Uvodimo supstituciju $p(y(x)) = y'(x)$, odakle slijedi $y'' = p'p$. Prema tome,

$$\begin{aligned} p'p + p^2 &= 0 \quad \Big| : p, \\ p' + p &= 0, \\ \frac{dp}{dy} + p &= 0, \\ \frac{dp}{p} &= -dy \quad \Big| \int, \\ \ln|p| &= -y + C \quad \Big| e^{(\cdot)}, \\ |p| &= e^{-y+C} = C_1 e^{-y} \quad (C_1 = e^C), \\ p &= C_1 e^{-y}, \\ y' &= C_1 e^{-y}, \\ \frac{dy}{dx} &= C_1 e^{-y}, \\ e^y dy &= C_1 dx \quad \Big| \int, \\ e^y &= C_1 x + C_2, \\ y &= \ln(C_1 x + C_2), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Literatura

[1] T. M. Apostol, *Calculus*, Volume 1, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.

[2] T. M. Apostol, *Calculus*, Volume 2, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.

[3] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 10th Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2012.

[4] T. Bradić, R. Roki, J. Pečarić, M. Strunje, *Matematika za tehnološke fakultete*, Multigraf, Zagreb, 1994.

[5] M. Corral, *Vector Calculus*, dostupno na http://www.mecmath.net/calc3book.pdf (ožujak 2018.).

[6] B. P. Demidovič i suradnici, *Zadaci i riješeni primjeri iz matematičke analize za tehničke fakultete*, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 1998.

[7] N. Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2006.

[8] N. Elezović, A. Aglić, *Linearna algebra, zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 2006.

[9] S. R. Ghorpade, B. V. Limaye, *A Course in Multivariable Calculus and Analysis*, Springer, New York, London, 2010.

[10] P. Javor, *Matematička analiza 1*, Element, Zagreb, 1999.

[11] P. Javor, *Matematička analiza 2*, Element, Zagreb, 2000.

[12] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 10th Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2011.

[13] S. Kurepa, *Matematička analiza 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.

[14] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1987.

[15] S. L. Salas, E. Hille, G. J. Etgen, *Calculus*: *One and Several Variables*, 8th Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[16] D. Veljan, *Matematika 4*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

Kazalo pojmova

astroida, 29

baza vektorskog prostora, 83
Bernoullijeva lemniskata, 41

Cauchyjev problem, 284
cikloida, 31

derivacija
    parcijalna, 161
        drugog reda, 167
    u smjeru vektora, 269
    vektorske funkcije, 252
diferencijabilna funkcija, 170, 253, 269
diferencijal vektorske funkcije, 258
diferencijalna jednadžba, 283
    drugog reda
        koja ne sadrži eksplicitno x, 310
        koja ne sadrži eksplicitno y, 307
    prvog reda
        Bernoullijeva, 298
        egzaktna, 302
        homogena, 290
        linearna, 293
        sa separiranim varijablama, 285
duljina
    luka krivulje, 44, 47, 51
    vektora, 77
dvoplošni hiperboloid, 149
dvostruki integral, 186, 187
    u polarnom koordinatnom sustavu, 209

ekstrem
    globalni, 175
    lokalni, 175
ekvivalentne orijentirane dužine, 76
element površine, 186
elipsoid, 147
eliptički
    cilindar, 152
    paraboloid, 150

Fubinijev teorem, 188
funkcija, 133
    diferencijabilna, 170
    omeđena, 1, 183
    podintegralna, 2, 186
    vektorska, 248
        neprekidna, 252
    više realnih varijabli, 133
        neprekidna, 159

gradijent skalarnog polja, 270
graf funkcije, 139, 140, 249

hiperbolički
    cilindar, 152
    paraboloid, 150

integral
    dvostruki, 186, 187
    nepravi, 64, 69
    određeni, 2
    Riemannov, 2
    vektorske funkcije
        neodređeni, 261
        određeni, 262
integralna krivulja, 284
integralni zbroj, 1, 185

donji, 1, 185
gornji, 1, 185

jakost vektorskog polja, 268
jednadžba
pravca
kanonski oblik, 110, 111
parametarski oblik, 110
ravnine
opći (implicitni) oblik, 100
segmentni oblik, 100
vektorski oblik, 100
jednoplošni hiperboloid, 148

kardioida, 41, 52
komponente (koordinate) vektora, 83
koordinatizacija vektorskog prostora, 84
kosinusi smjera vektora, 90
krivolinijski trapez, 10
krivulja
u polarnim koordinatama, 34
zadana parametarskim jednadžbama, 27
kut
između ravnina, 104
između pravaca, 114
između pravca i ravnine, 116
između vektora, 88

limes
realne funkcije više realnih varijabli, 154, 156
vektorske funkcije, 251
linearna kombinacija vektora, 82

maksimum
globalni, 175
lokalni, 174
mimosmjerni (mimoilazni) pravci, 113
minimum
globalni, 175
lokalni, 174
mješoviti produkt vektora, 96
modul vektora, 77

nejednakost trokuta, 86
nepravi integral, 64, 69
divergentan, 64, 69
konvergentan, 64, 69
Newton–Leibnizova formula, 5
nivo-krivulja, 140
nivo-ploha, 263
nulvektor, 77

određeni integral, 2
orijentacija vektora, 77
orijentirana dužina, 76

parabolički cilindar, 152
parcijalna derivacija, 161
drugog reda, 167
mješovita, 168
partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe, 284
ploha, 140
područje integracije, 2, 186
pol, 32
polarna os, 32
polarne koordinate točke, 32
polarni koordinatni sustav, 32
polje
skalarno, 263
vektorsko, 266
pravilo desne ruke, 92
pravokutne koordinate vektora, 84
predstavnik vektora, 77

primitivna funkcija vektorske
funkcije, 260
prirast funkcije, 171, 252
prirodna domena funkcije, 134
pseudotrapez, 10
površina, 13, 28
pseudovaljak, 219
volumen, 220, 222

razdioba
pravokutnika, 184
segmenta, 1
razlika vektora, 80
red diferencijalne jednadžbe, 284
relacija ekvivalencije, 76
reprezentant vektora, 77
Riemannov integral, 2, 186
donji, 2, 186
gornji, 2, 186
rotacijsko tijelo, 53, 56
volumen, 56

Schwarzov teorem, 168
semikubna parabola, 44
sfera, 147
skalarna veličina (skalar), 76
skalarni
kvadrat vektora, 89
produkt vektora, 88
skalarno množenje vektora, 88
slika funkcije, 133
smjer vektora, 77
spirala, 250
stacionarna točka, 175
stožac, 151

tangencijalna ravnina, 276
teorem
o dovoljnim uvjetima za
postojanje ekstrema, 176
o nužnim uvjetima za
postojanje ekstrema, 175
o srednjoj vrijednosti
integralnog računa, 4
totalni diferencijal, 171
trajektorija funkcije, 249

udaljenost
mimosmjernih pravaca, 114
paralelnih
pravaca, 112
ravnina, 104
točaka, 85
točke
od pravca, 112
od ravnine, 103
umnožak vektora i skalara, 81

vektor, 77
akceleracije, 254
brzine, 254
jedinični, 78
normale ravnine, 99
položaja (radijvektor), 84
smjera pravca, 109
suprotni, 77
vektori
kolinearni, 78
komplanarni, 78
linearno
nezavisni, 82
zavisni, 82
okomiti, 88
vektorska funkcija, 248
vektorski produkt vektora, 92
vektorski prostor, 77
trodimenzionalan, 83
vektorsko množenje vektora, 93

zavojnica, 250
zbrajanje vektora
po pravilu paralelograma, 78
po pravilu poligona, 80
po pravilu trokuta, 78