

# Osnova metode konačnih elemenata

---

Kranjčević, Martin

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:169:852240>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-04**



Repository / Repozitorij:

[Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering Repository, University of Zagreb](#)



RUDARSKO-GEOLOŠKO-NAFTNI FAKULTET

Diplomski studij rudarstva

**OSNOVA METODE KONAČNIH ELEMENATA**

Diplomski rad

Martin Kranjčević

R179

Zagreb, 2019

## OSNOVA METODE KONAČNIH ELEMENATA

Martin Kranjčević

Rad izrađen: Sveučilište u Zagrebu  
Rudarsko-geološko-naftni fakultet  
Zavod za rudarstvo i geotehniku  
Pierottijeva 6, 10 000 Zagreb

### Sažetak

Rad opisuje postupak realizacije metode konačnih elemenata na primjeru jednodimenzijskog elementa, tj. štapa, pomoću metoda Rayleigh-Ritz i Bubnov-Galerkin. Također, rad se dotiče provedbe dvodimenzijskih i trodimenzijskih elemenata. U završnom dijelu obraća se pažnja na modeliranje problema vezanih uz pomake u računalnom programu SAP2000. Trodimenzijski elementi simuliraju nosive stupove koji su opterećeni krovinom, te se prikazuju pomaci i naprezanja.

Ključne riječi: konačni elementi, kontinuum, diskontinuum, funkcional energije  
Završni rad sadrži: 35 stranice, 0 tablica, 29 slika, 0 priloga, i 17 reference.  
Jezik izvornika: Hrvatski  
Pohrana rada: Knjižnica Rudarsko-geološko-naftnog fakulteta, Pierottijeva 6, Zagreb  
Mentori: Dr. sc. Antonia Jaguljnjak – Lazarević, docentica RGNF  
Pomagao pri izradi: Dr. sc. Tanja Mališ, docentica RGNF  
Ocjenjivači: Dr. sc. Antonia Jaguljnjak – Lazarević, docentica RGNF  
Dr. sc. Petar Hrženjak, izvanredni profesor RGNF  
Dr. sc. Rajna Rajjić, redovita profesorica RGNF

BASICS OF FINITE ELEMENTS METHOD

Martin Kranjčević

Thesis completed at: University of Zagreb  
Faculty of mining, Geology and Petroleum Engineering  
Department of mining engineering and geotechnics  
Pierottijeva 6, 10 000 Zagreb

Abstract

This thesis describes procedure of realization of method regarding finite elements by comparing Rayleigh-Ritz method and Bubnov-Galerkin method on one-dimensional element, such as a rod. The thesis also lightly mentions two and three dimensional elements. In it's final chapter, the thesis gives an example of application of such methods by simulating stress on columns. The software used was SAP2000.

Keywords: final element, continuum, discontinuum, energy functional

Thesis contains: 35 pages, 0 tables, 29 figures, 0 appendixes, i 17 references.

Original in: Croatian

Archived in: Library of Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering, Pierottijeva 6, Zagreb

Supervisors: Ph.D. Antonia Jaguljnjak – Lazarević, Assistant Professor

Tech. assistance: Ph.D. Tanja Mališ, Assistant Professor

Reviewers: Ph.D Antonia Jaguljnjak – Lazarević, Assistant Professor  
Ph.D. Petar Hrženjak, Associate Professor  
Ph.D. Rajna Rajić, Professor

## **ZAHVALE**

Posebno bih se zahvalio docentici dr. sc. Tanji Mališ što mi je pomogla sa savjetima i vođenjem u korištenju računalnog programa SAP2000.

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA.....	II
POPIS KORIŠTENIH OZNAKA I JEDINICA .....	III
1. UVOD.....	1
2. POVIJEST NUMERIČKE ANALIZE .....	2
3. NUMERIČKE METODE .....	6
3.1. Metoda konačnih razlika .....	7
3.2. Metoda diskretnih elemenata .....	8
3.3. Metoda konačnih elemenata .....	8
4. REALIZACIJA METODE KONAČNIH ELEMENATA .....	10
4.1. Metoda Rayleigh – Ritz.....	10
4.2. Metoda Bubnov – Galerkin.....	11
4.3. Poopćenje postupaka na konačni element sa dva stupnja slobode.....	12
4.3.1. Opis primjera.....	12
4.3.2. Rješavanje primjera metodom Bubnov – Galerkin .....	15
4.3.3. Rješavanje problema metodom Rayleigh – Ritz.....	19
5. DVODIMENZIJSKI KONAČNI ELEMENTI.....	21
6. TRODIMENZIJSKI KONAČNI ELEMENTI .....	26
7. PRIMJER UPORABE MKE U RAČUNALNOM PROGRAMU SAP2000.....	29
8. ZAKLJUČAK .....	33
POPIS LITERATURE .....	34

## POPIS SLIKA

Slika 2-1 Glinena pločica YBC 7289 .....	2
Slika 2-2 Skica glinene pločice YBC 7289.....	2
Slika 2-3 Rhindov Papirus .....	3
Slika 2-4 Logaritamsko računalo tzv. šiber.....	3
Slika 2-5 Različiti primjerci mehaničkih računala .....	4
Slika 2-6 Računalo Colossus Mark 2.....	4
Slika 2-7 Naprezanje portalne dizalice .....	5
Slika 2-8 IBM-ovo superračunalo Blue Gene Q Sequoia .....	5
Slika 3-1 Shematski prikaz rješavanja inženjerskih problema.....	6
Slika 3-2 Raspored čvorova: a) jednodimenzijski, b) dvodimenzijski .....	7
Slika 4-1 Štapni element opterećen kontinuiranom koncentriranom silom.....	12
Slika 4-2 Diskretizacija područja .....	13
Slika 4-3. Jednodimenzijski element u lokalnom koordinatnom sustavu.....	13
Slika 4-4 Grafički prikaz funkcija oblika.....	15
Slika 4-5 Diskretizacija dva konačna elementa.....	17
Slika 5-1 Osnovni trokutni element.....	21
Slika 5-2 Funkcija oblika $N_1$ .....	23
Slika 5-3 Funkcija oblika $N_2$ .....	23
Slika 5-4 Funkcija oblika $N_3$ .....	24
Slika 5-5 Raspodjela funkcije $\Phi$ .....	24
Slika 6-1 Trodimenzionalni element u obliku tetraedra .....	26
Slika 7-1 Statički model stupova i krovine .....	29
Slika 7-2 Polje analizirano metodom konačnih elemenata .....	29
Slika 7-3 Rubni uvjeti: pomaci spriječeni u odgovarajućim smjerovima.....	30
Slika 7-4 Model u računalnom programu SAP 2000.....	30
Slika 7-5 Pomaci modela .....	31
Slika 7-6 Shematski prikaz deformacija nosivog stupa u obliku rotacijskog paraboloida ..	31
Slika 7-6 Maksimalna naprezanja u modelu .....	32
Slika 7-7 Maksimalna naprezanja na spoju ploče i stupa .....	32

## POPIS KORIŠTENIH OZNAKA I JEDINICA

Oznaka	Mjerna jedinica	Značenje
$a, b$	-	oznaka početka i kraja štapnog elementa
$\mathbf{a}$	-	matrica koeficijenta
$a_i$	-	koeficijenti interpolacijskih polinoma
$A$	$m^2$	površina poprečnog presjeka
$c$	$N/m^2$	konstanta za uzdužno kontinuirano opterećenje
$\mathbf{C}$	-	simetrična matrica elastičnosti
$E$	Pa	Youngov modul elastičnosti
$\mathbf{f}$	$N/m^3$	vektor volumenskih sila
$\mathbf{F}_s^i$	N	element vektora opterećenja
$i, j, m, n$	-	indeksi
$\mathbf{k}^i$	$N/m, Nm/rad$	element matrice krutosti
$\mathbf{K}$	-	matrica krutosti modela
$\mathbf{L}$	-	matrica diferencijalnih operatora
$L, l$	m	duljina
$N_i$	-	funkcije oblika za $i$ -ti čvor konačnog elementa
$P$	N	uzdužna koncentrirana sila
$q$	$N/m$	uzdužno opterećenja po jedinici duljine
$\mathbf{q}$	$N/m^2$	vektor površinskih sila
$\mathbf{r}$	-	rezidual
$\mathbf{u}$	m	vektor pomaka
$\bar{\mathbf{u}}$	m	aproksimacija vektora pomaka
$u, v, w$	m	komponente pomaka u Kartezijevu koordinatnom sustavu
$u_i, v_i, w_i$	m	komponente pomaka u $i$ -tom čvoru
$W$	J	rad vanjskih sila
$x, y, z$	-	Kartezijeve koordinatne osi
$\alpha$	-	supstitucija za matrični zapis
$\gamma$	$kN/m^2$	specifična težina
$\Gamma$	$m^2$	kontura prostornog područja
$\varepsilon$	-	tenzor deformacije



$\xi$	-	matrica funkcija u interpolacijskim polinomima
$\nu$	-	Poissonov koeficijent
$\Pi$	J	ukupna potencijalna energija
$\sigma$	Pa	tenzor naprezanja
$\Phi$	-	zavisna skalarna veličina
$\phi$	-	vektor čvornih varijabli elementa
$\Omega$	$m^3$	prostorno područje ispunjeno točkama
$\bar{\Omega}$	$m^3$	unija konture i područja ispunjenog točkama

## 1. UVOD

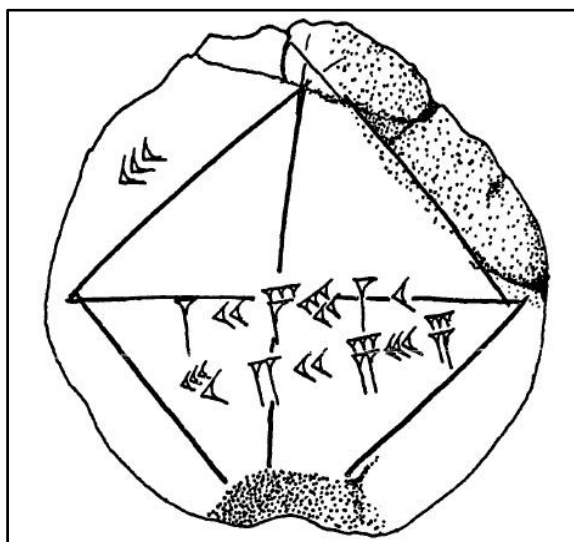
Čovjekova težnja za rješavanjem problema bila je glavni motiv za napredak. Najveći i najstariji znanstveni suputnik kojeg je čovječanstvo imalo bila je matematika. Pojavom pisma, čovjek je mogao početi zapisivati ideje. Jedna od prvih primjena matematike, s nastankom civilizacije, bila je u agrikulturi. Tada je za potrebe planiranja sjetve i žetve počelo praćenje nebeskih tijela kako bi se stvorio kalendar, također, služila je za stvaranje i mjerenje polja. Jedna od metoda koja se razvila kroz povijest je metoda konačnih elemenata čija se primjena može naći kako u civilnim tako i u vojnim djelatnostima. Iako su same metode razvijane od 17.st. nisu ulazile u širu primjenu zbog svoje kompleksnosti. Naime, sve do pojave elektroničkih računala u 20. st. njihova primjena je bila ograničena na jednostavne modele. U ovom radu opisana je realizacija metode konačnih elemenata tj. njena primjena u geotehnici. Odabran je jednodimenzijski štapni element zbog svoje jednostavnosti, ali i široke primjene. Dodavanjem jedne dimenzije dobivaju se dvodimenzijski konačni elementi, od kojih je najjednostavniji trokutni element. A dodavanjem još jedne, dobiva se trodimenzijski konačni element, od kojih je najjednostavniji tetraedar. Čvorovi kod trodimenzijskih konačnih elemenata imaju veliki broj stupnjeva slobode, npr. tetraedar ima četiri čvora od kojih svaki ima tri stupnja slobode, a njihovim umnoškom dođe se do 12 stupnjeva slobode. Heksaedar npr. ima 24 stupnja slobode. Povećanjem broja čvorova povećava se i broj jednadžbi, ali i broj nepoznanica unutar jednadžbi. Kao što je već napomenuto, zbog napretka u računalnim tehnologijama veliki proračuni se mogu obavljati relativno brzo. No, i tu postoje određeni dosezi, jer za sve kompliciranije modele potrebna su sve „jača“ računala.

## 2. POVIJEST NUMERIČKE ANALIZE

Numeričke metode razvijene su iz numeričke analize. Metode računanja aproksimacija za numerička rješenja nalaze se u davnoj povijesti, točnije u staroj Indiji, Kini, Mezopotamiji, Egiptu i Grčkoj. Jedan od primjera matematičkih aproksimacija potječe iz Mezopotamije između 1800. i 1600. g. pr.n.e. (slika 2-1 i slika 2-2). Glinena pločica prikazuje račun kvadratnog korijena iz 2, najvjerojatnije je vježba jednog učenika.



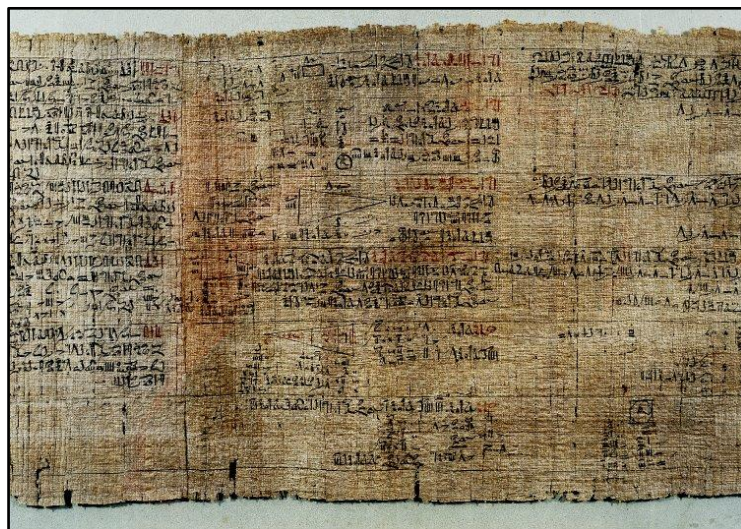
**Slika 2-1** Glinena pločica YBC 7289 (Casselmann, n.d.)



**Slika 2-2** Skica glinene pločice YBC 7289 (Aaboe, 1964)

Iz drevnog Egipta dolazi problem aproksimacije površine kruga potrebnog za izračun volumena cilindričnih silosa, koji je zabilježen na Rhindovom Papirusu iz oko 1650 g. pr.n.e. (slika 2-3). Smatra se da je ono prijepis, pa se često naziva i po pisaru Ahmesu, Ahmesov Papirus. (University of Colorado, n.d.)

Također, vrijedi spomenuti još stariji zapis, Moskovski Papirus u kojem se opisuje primjer izračuna volumena krnje piramide, potječe iz oko 1850. g. pr.n.e. (Texas A&M University, 2001)



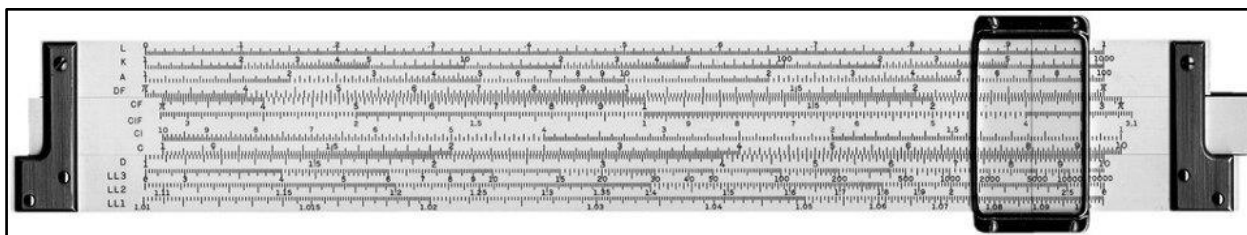
**Slika 2-3** Rhindov Papirus (The British Museum, 2019)

Iako nije započela u njoj, geometrija se znatno razvila u antičkoj Grčkoj, a ocem geometrije se smatra Tales iz Mileta, koji je živio u 6. st. pr. n.e., a u Aziji matematika algoritama.

Sve do 19. st. poznati matematičari su bili ujedno i filozofi, astronomi, fizičari i kemičari, najpoznatiji među njima su Galileo, Newton, Euler, Lagrange Gauss, Fourier, Leibnitz, Bernoulli te mnogi drugi. Numeričke metode bile su razvijane u sklopu njihovih istraživanja u tim područjima.

Sredinom 19. st. matematika postaje predmet kojim se bave isključivo matematičari. Numeričke metode su razvijene za rješavanje problema u geodeziji, astronomiji, fizici i inženjerstvu. (Benzi, 2009)

Izvođenje proračuna olakšale su pojave logaritamskog računala tzv. šibera u 17.st. (slika 2-4), a zatim sredinom 19. st. i pomoću mehaničkih kalkulatora (slika 2-5). (The Oughtred Society, 2013)



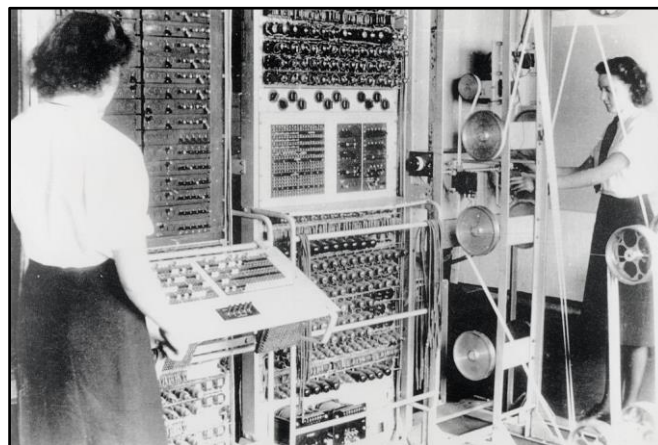
**Slika 2-4** Logaritamsko računalo tzv. šiber (Enciklopedija, n.d. )



**Slika 2-5** Različiti primjerci mehaničkih računala (Wikipedia, 2012)

Krajem 1920-ih u Italiji je osnovan institut za istraživanje matematičke analize. U Njemačkoj su osnovane škole za primijenjenu matematiku u Gottingenu i Berlinu. Znatna razvoj numeričke analize dogodio se tijekom Drugog svjetskog rata. (Benzi, 2009)

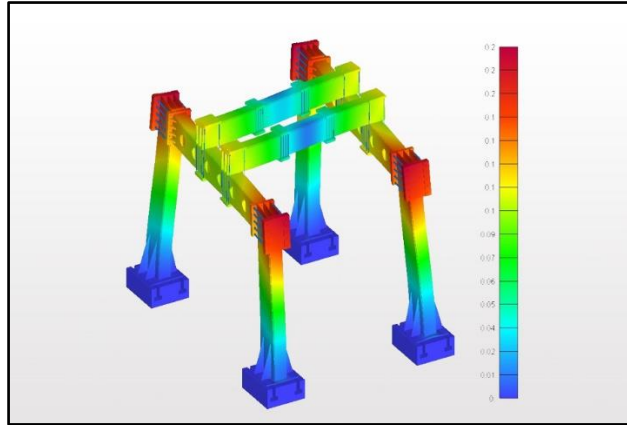
Naime, tada je za potrebe Drugog svjetskog rata okupljen veliki broj matematičara i fizičara, čije se znanje koristilo za razbijanje kriptiranih poruka kao i za razvoj nuklearnog oružja. Uz to počeo je i razvoj prvih elektroničkih računala u te svrhe (slika 2-6).



**Slika 2-6** Računalo Colossus Mark 2 (Wikipedia, 1943)

Nakon Drugog svjetskog rata dolazi do razvoja zrakoplovne industrije, kako u vojne tako i komercijalne svrhe. Također, dolazi i do svemirske utrke. Za te potrebe razvijena je metoda konačnih elemenata (MKE). NASA 1965.g. razvija računalni program zvan NASTRAN koji je sadržavao dvodimenzionalne i trodimenzionalne analize naprezanja, štapne i roštiljne elemente, a u svrhu analiziranja kompleksnih konstrukcija poput zrakoplovnih. (Fish, 2007)

Negdje u isto vrijeme razvijen je i računalni program, ANYSIS, koji se koristio za analiziranje nuklearnih reaktora. Dolaskom osobnih računala i razvojem komercijalnih računalnih programa, matematička analiza, a s njom i metoda konačnih elemenata, našla je široku primjenu, slika 2-7.



**Slika 2-7** Naprezanje portalne dizalice (Schiller GmbH, n.d.)

Zbog svoje kompleksnosti, simuliranje nuklearnih eksplozija, vremenske prognoze, klimatskih promjena, simulacije vezane uz astrofiziku te kriptoanalizu koriste se superračunala (slika 2-8).

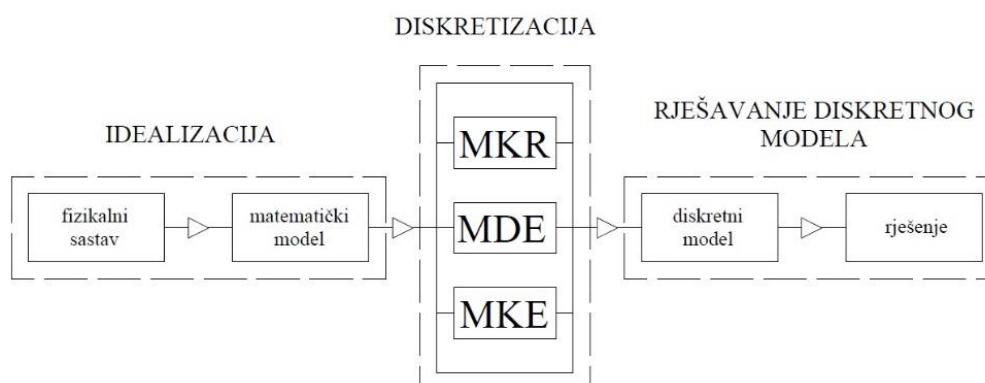


**Slika 2-8** IBM-ovo superračunalo Blue Gene Q Sequoia (Financial Times, 2013)

### 3. NUMERIČKE METODE

Numeričke metode je zajednički naziv za postupke numeričkog rješavanja matematičkih modela realnih fizikalnih pojava odnosno inženjerskih problema. Kod primjene numeričkih postupaka rješavaju se diskretizirani proračunski modeli pri čemu opisujemo neka stanja ili moguća ponašanja u različitim uvjetima koja se temelje na utvrđenim zakonitostima. Numeričkim postupcima proračuna dobivamo približna rješenja matematičkih modela opisanih pomoću diferencijalnih jednadžbi. U odnosu na eksperimentalna istraživanja, numeričke metode su jeftinije te omogućavaju brže dobivanje rezultata. No, to ne znači da se eksperimentalna istraživanja ne koriste jer podaci dobiveni eksperimentom služe kao ulazne vrijednosti za numeričke proračune. Također, eksperimentom je moguće provjeriti točnost nekih dijelova numeričkog modela. (Sorić, 2009)

Postoje tri glavne faze u postupku rješavanja inženjerskih problema prilikom primjene numeričkih metoda, to su: idealizacija ili matematičko modeliranje, diskretizacija matematičkog modela i rješavanje sustava diskretiziranih jednadžbi. Postupak rješavanja je prikazan na slici 3-1:



**Slika 3-1** Shematski prikaz rješavanja inženjerskih problema

Opisivanje fizikalnog sustava odgovarajućim matematičkim modelom naziva se idealizacijom ili matematičkim modeliranjem. Izvođenje matematičkog modela može biti u dvije formulacije: diferencijalnoj formulaciji, koja je opisana sustavom diferencijalnih jednadžbi u prostoru i/ili vremenu, i varijacijskoj formulaciji, koja se temelji na funkcionalu iz čijeg je uvjeta stacioniranosti moguće izvesti diferencijalnu formulaciju. Funkcional je funkcija koja je određena integralom čiji su argumenti isto funkcije.

Diskretizacija je postupak kojim se kontinuirani sustav zamjenjuje diskretnim sustavom koji se opisuje s konačnim brojem nepoznatih varijabli. Razlikuje se diskretizacija područja

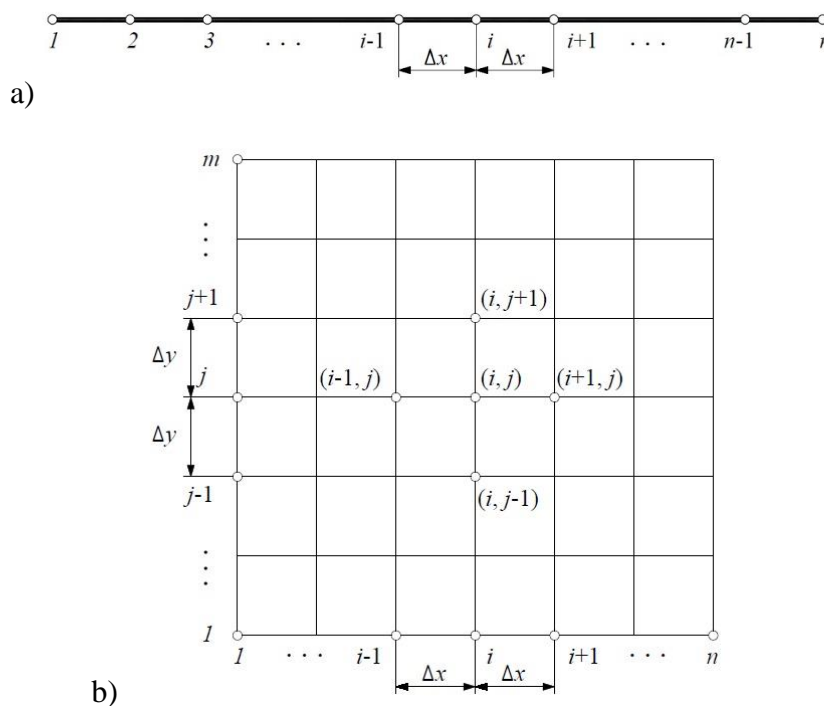
i diskretizacija jednadžbi. Diskretizacijske metode koje se primjenjuju su metoda konačnih razlika, koja je ujedno i najstarija, zatim metoda diskretnih elemenata, metoda konačnih elemenata te mnoge druge. (Sorić, 2009)

### 3.1. Metoda konačnih razlika

Ovom metodom numeričko rješenje diferencijalnih jednadžbi dobiva se u odabranim točkama razmatranog modela konstrukcije, pri čemu se diferencijalna jednadžba zapisuje kao diskretizirana s derivacijama aproksimiranim konačnim razlikama. Točke modela čine mrežu konačnih razlika te se nazivaju čvorovima. Za svaki čvor dobiva se algebarska diferencijalna jednadžba koja povezuje nepoznatu vrijednost u čvoru s vrijednostima te varijable u odgovarajućem broju susjednih čvorova (Sorić, 2009).

Red derivacije diferencijalne jednadžbe određuje broj obuhvaćenih čvorova. Tim načinom dobiva se sustav linearnih algebarskih jednadžbi čiji je broj jednak broju čvorova, tj. nepoznanica. Čvorovi koji se nalaze duž ruba s poznatim vrijednostima predstavljaju rubne uvjete i za njih nije potrebno postavljati jednadžbe. Ako su u rubnim uvjetima uključene derivacije, potrebno je provesti njihovu diskretizaciju.

Čvorovima na kojima se izvode diskretizirana jednadžba su pridruženi indeksi koji se povećavaju, tj. smanjuju u susjednim čvorovima. Raspodjela čvorova može biti jednodimenzijaska ili dvodimenzijaska kao što je prikazano na slici 3-2.



**Slika 3-2** Raspored čvorova: a) jednodimenzijski, b) dvodimenzijski



### 3.2. Metoda diskretnih elemenata

Metoda diskretnih elemenata, skraćeno MDE, je skup numeričkih postupaka koji su potrebni za simuliranje ponašanja sustava međusobno ovisnih diskretnih elemenata. (Lazarević, 2000). Tom metodom se modeliraju geometrijski diskontinuumi čija svojstva ovise o rasporedu i vezama između čestica.

Također, ovom metodom se ponekad modeliraju i modeli materijala koji su kontinuum, tj. oni materijali kojima su fizikalna svojstva nepromjenjiva. Naime, tada se procjenjuju lokalne pojave u materijalu (poput pukotina), a o kojima ovisi struktura materijala. Također mogu se provjeravati i međučestične veze, tj. kohezija. (Lazarević, 2000).

Tijela diskretnog sustava mogu biti različitih veličina, oblika i hrapavost površine, a unutrašnjost im može sadržavati pukotine i šupljine. Geometrijske karakteristike čestica uvjetuju njeno gibanje, oblik dodirne plohe i raspodjelu kontaktnih sila po njenoj površini prilikom dodira sa drugim tijelom ili podlogom. Metoda diskretnih elemenata se primjenjuje u znanstvenim područjima poput medicine, meteorologije, biologije, rudarstva, itd.

U odnosu na metodu konačnih elemenata, postoje i neke razlike:

- položaj elemenata nije unaprijed poznat, kao niti njihov konačni broj koji će se upotrijebiti u proračunu
- pomaci i rotacije diskretnih elemenata mogu biti neograničeni
- element iza vrijeme proračuna mogu biti bez dodira sa susjedima
- za upotrebljive rezultate treba veliki broj diskretnih elemenata
- za proračun je potrebno poznavati geometrijski oblik i materijalne značajke pojedine čestice (Lazarević, 2000)

### 3.3. Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata, skraćeno MKE, najpoznatija je numerička metoda za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi odnosno problema rubnih vrijednosti. MKE se temelji na diskretizaciji promatranog područja podijeljeno na konačan broj podpodručja, tzv. konačnih elemenata. Za svaki element pretpostavlja se rješenje zadane diferencijalne jednadžbe u obliku interpolacijskih funkcija koje povezuju zavisne varijable s njihovim vrijednostima u čvorovima. (Sorić, 2009)

Izvodi se sustav algebarskih jednadžbi čije su nepoznanice čvorne veličine, nakon čega se formira globalni sustav jednadžbi za cijeli diskretizirani model, u kojemu su nepoznanice čvorne vrijednosti svih elemenata diskretiziranih područja. Postoje jednodimenzijski,

dvodimenzijski i trodimenzijski konačni elementi, te pločasti i ljuskasti konačni elementi. Najjednostavniji konačni element je jednodimenzijski element, tj. štap s dva čvora i s linearnom interpolacijom. (Sorić, 2009)

MKE se razvila iz potrebe za rješavanjem kompleksnih problema iz područja matematičke fizike, tj. inženjerstva. Do njene raširenije primjene došlo je s pojavom računala koji su mogli brzo obavljati računske operacije, te je primjenu našla u gotovo svom industrijskim i energetske granama. No, uz razvoj računalne tehnologije i dalje su se koristili eksperimentalni modeli, jer se neke stvari nisu mogle simulirati u računalnom programu, npr. turbulencije. Najčešća primjena je u analizi opterećenja, seizmičkoj analizi, toku fluida, elektromagnetizama, medicini i mnogih drugih grana znanosti.

Metoda konačnih elemenata sastoji se od pet koraka:

- 1) predprocesiranje – problem se dijeli na konačne elemente (diskretizacija proračunskih modela)
- 2) formuliranje elementa – razvoj jednadžbe za elemente (formuliranje lokalne matrice krutosti elemenata)
- 3) sastavljanje (assembly) – dobivanje jednadžbi za cijeli sustav iz jednadžbi za pojedine elemente (tvorba globalnog sustava jednadžbi)
- 4) rješavanje jednadžbi
- 5) postprocesiranje – određivanje rezultata, dobivanje vizualizacije (Fish, 2007)

#### 4. REALIZACIJA METODE KONAČNIH ELEMENATA

Za realizaciju MKE u problemima kod kojih se rješava nepoznato polje pomaka najčešće se koriste integralne formulacije koje proizlaze iz energetskog pristupa odnosno metode težinskih reziduala. Zajedničko svojstvo im je da se nepoznato polje pomaka  $u$ , ovisno o dimenziji problema, aproksimira uvrštavanjem približnog rješenja u obliku linearne kombinacije umnožaka unaprijed odabranih (poznatih) koordinatnih funkcija  $N_i(x, y, z)$  i nepoznatih generaliziranih koordinata  $\Phi_i$ :

$$\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \Phi_i N_i(x, y, z) \quad (4.1)$$

Rubni uvjeti po pomacima za izbor koordinatnih funkcija su  $\mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{u}_0$ .

##### 4.1. Metoda Rayleigh – Ritza

Rayleigh – Ritzova metoda se temelji na integralnoj formulaciji koja polazi od teorema o minimumu funkcionala potencijalne energije matematičkog modela.

Općenito, potencijalna energija modela uz pretpostavku materijalne i geometrijske linearnosti definira se funkcionalom koji ovisi o polju napreznja  $\boldsymbol{\sigma}$ , polju deformacija  $\boldsymbol{\varepsilon}$  i polju pomaka  $\mathbf{u}$ :

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\bar{\Omega} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{q} \mathbf{u} d\Gamma \quad (4.2)$$

gdje je prvi član potencijalna energija deformacije, drugi član potencijal volumenskih, a treći potencijal površinskih sila. Negativni predznaci označavaju rad koji je uložen u deformaciju tijela. Oznake znače:  $\mathbf{f}$  - vektor volumenskih sila i  $\mathbf{q}$  - vektor površinska sila. (Atalić, Lazarević, 2017)

Uvrštavanjem izraza za materijalnu  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$  i geometrijsku  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$  linearnost, gdje je  $\mathbf{C}$  simetrična matrica elastičnosti, a  $\mathbf{L}$  matrica diferencijalnih operatora, u prvi član funkcionala energije dobiva se:

$$\frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} d\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} d\bar{\Omega} \quad (4.3)$$

iz čega slijedi da se izraz za potencijalnu energiju može prikazati samo preko nepoznatog polja pomaka:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} d\bar{\Omega} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{q} \mathbf{u} d\Gamma \quad (4.4)$$

Dobiveni funkcional se diskretizira umetanjem poznatog oblika za približno rješenje polja pomaka (4.1) i postaje ovisan samo o nepoznatim koeficijentima  $\Phi_i$

$$\Pi(\Phi_i) = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} d\bar{\Omega} - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \bar{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (4.5)$$

Prema teoremu o minimumu ukupne potencijalne energije modela, deformabilno čvrsto tijelo pod djelovanjem vanjskih sila nalazi se u stanju stabilne ravnoteže ako mu je potencijalna energija minimalna. Minimizacijom diskretnog oblika funkcionala energije:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Phi_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.6)$$

dobiva se sustav od  $n$  linearnih algebarskih jednačbi s  $n$  nepoznanica. Rješenje sustava su generalizirane koordinate  $\Phi_i$  čime smo dobili približno polje pomaka prema izrazu (4.1).

## 4.2. Metoda Bubnov – Galerkin

Metoda Bubnov – Galerkin se temelji na metodi težinskih reziduala i jedna je od temeljnih inačica slabe formulacije u diskretnom obliku gdje su test funkcije dane izrazom (4.1). Za razliku od metode Rayleigh – Ritza nije potrebno poznavati funkcional potencijalne energije sustava pa se metoda može primijeniti na mnogo širu klasu problema: to su pretežno

materijalni i/ili geometrijski nelinearni problemi ili problemi s izraženim gubicima za koje ne postoji jednoznačno definiran potencijal gubitka energije.

Za matematički model opisan Laplaceovom diferencijalnom matematičkom jednačinom:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{f}(x, y, z) \quad (4.7)$$

traži se približno rješenje pomoću test funkcije koja se kao i kod Rayleigh – Ritza pretpostavlja u obliku linearne kombinacije koordinatnih funkcija.

Rezidual  $\mathbf{r} = \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{f}(x, y, z)$  predstavlja veličinu greške aproksimacije. Prema metodi Bubnov – Galerkin, rezidual se težinira test funkcijom radi procjene njegove vrijednosti:

$$\int_{\bar{\Omega}} N_i (\nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) d\bar{\Omega} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.8)$$

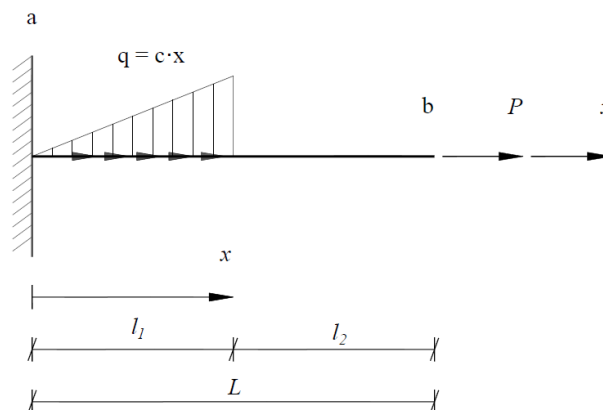
nakon čega se na dobiveni izraz primjenjuje parcijalna integracija i rubni uvjeti.

Može se pokazati da u slučaju linearnih problema koji imaju definiranu potencijalnu energiju metode Rayleigh – Ritza i Bubnov – Galerkin daju isto rješenje. U nastavku su prikazane realizacije obje metode na primjeru štapnog konačnog elementa sa dva stupnja slobode.

### 4.3. Poopćenje postupaka na konačni elementi sa dva stupnja slobode

#### 4.3.1. Opis primjera

Rješava se problem uzdužno (aksijalno) opterećenog štapa kontinuiranim i koncentriranim silama (slika 4-1).



**Slika 4-1** Štapni element opterećen kontinuiranom koncentriranom silom

Prikazani sistem može se opisati jednodimenzijском Poissonovom diferencijalnom jednađbom:

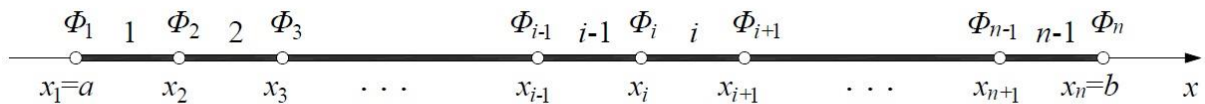
$$\nabla^2 \mathbf{u} = f(x) \Rightarrow EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q(x) = 0 \quad (4.9)$$

uz sljedeće rubne uvjete:

$$\begin{aligned} - \text{po pomacima: } x = 0, & \quad u_a = 0 \\ - \text{po silama: } x = L, & \quad \sigma_b = E \frac{du}{dx} = \frac{P}{A} \end{aligned}$$

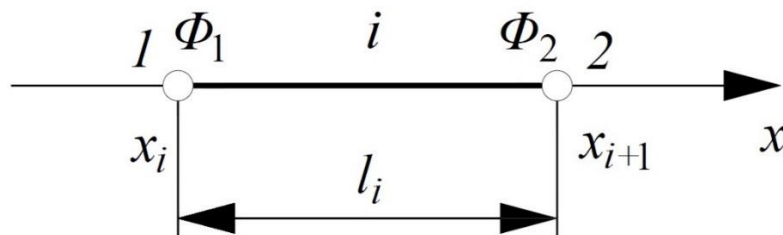
gdje je:  $u$  – uzdužni (osni) pomak,  $EA$  – konstantna uzdužna (aksijalna) krutost štapa,  $q(x)$  – uzdužno (osno) opterećenje štapa po jedinici duljine,  $P$  – uzdužna koncentrirana sila.

Općenito, područje proračuna, interval  $[a, b]$ , dijeli se na manje dijelove, podintervale  $[x_i, x_{i+1}]$ , gdje je  $i=1, \dots, n-1$ , (slika 4.2).



**Slika 4-2** Diskretizacija područja

Svaki podinterval predstavlja konačni element omeđen s dva čvora koji imaju nepoznate vrijednosti funkcije  $\Phi_i$ . Izdvoji se jedan element koji se nalazi na podintervalu  $[x_i, x_{i+1}]$ , gdje  $x_i$  i  $x_{i+1}$  označava dva uzastopna čvora, a  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  označavaju generalizirane koordinate odnosno nepoznate vrijednosti u čvorovima u lokalnom koordinatnom sustavu, brojevi 1 i 2 označavaju čvorove (slika 4-3).



**Slika 4-3** Jednodimenzijски element u lokalnom koordinatnom sustavu

Pretpostavi se linearna raspodjela funkcije  $\Phi$  duž elementa

$$\Phi = a_1 + a_2 x \quad (4.10)$$

Izvodi se relacija kojom se povezuje (4.10) s njezinim iznosima u čvorovima  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$ :

$$\begin{aligned} \text{za } x = x_1, \quad \Phi &= \Phi_1, \\ \text{za } x = x_{i+1}, \quad \Phi &= \Phi_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

čime se dobiva

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= a_1 + a_2 x_i, \\ \Phi_2 &= a_1 + a_2 x_{i+1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Iz (4.12) slijede izrazi za koeficijente  $a_1$  i  $a_2$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\Phi_1 x_{i+1} - \Phi_2 x_i}{x_{i+1} - x_i}, \\ a_2 &= \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{x_{i+1} - x_i}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Nakon uvrštavanja (4.13) u (4.10), dobiva se

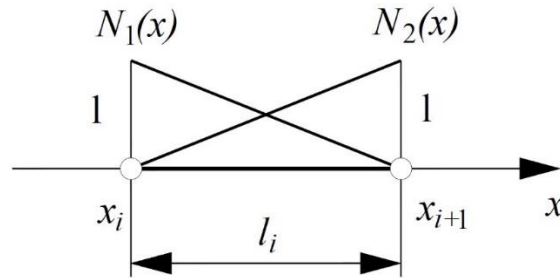
$$\Phi = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \Phi_1 + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \Phi_2, \quad (4.14)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x_{i+1} - x}{l_i}, \\ N_2(x) &= \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{l_i} \end{aligned} \quad (4.15)$$

koordinatne funkcije kojima se opisuje oblik raspodjele varijable  $\Phi$ . Funkcija oblika jednaka je jedinici u čvoru na koji se odnosi, dok je u svim ostalim čvorovima jednaka nuli (slika 4-4). Izraz (4.14) može se napisati u obliku:

$$\Phi(x) = N_1(x)\Phi_1 + N_2(x)\Phi_2 \quad (4.16)$$



**Slika 4-4** Grafički prikaz funkcija oblika

#### 4.3.2. Rješavanje primjera metodom Bubnov - Galerkin

Izvodi se jednačba konačnog elementa pomoću Bubnov - Galerkinova metoda težinskih reziduala. Za područje konačnog elementa pretpostavit će se rješenje diferencijalne jednačbe (4.9) u obliku funkcije (4.16).

Prema Bubnov - Galerkinovoj metodi težinske su funkcije jednake su funkcijama oblika (4.15), a težinska prosječna vrijednost reziduala za područje konačnog elementa jednaka je

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_j \left( EA \frac{d^2\Phi}{dx^2} + q \right) dx = 0, \quad j = 1, 2 \quad (4.17)$$

Primjenom parcijalne integracije

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_j \frac{d^2\Phi}{dx^2} dx = N_j \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dN_j}{dx} \frac{d\Phi}{dx} dx \quad (4.18)$$

relacija (4.17) može se transformirati u oblik



$$EA \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dN_j}{dx} \frac{d\Phi}{dx} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_j q dx + N_j EA \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \quad (4.19)$$

Izraz (4.16) zajedno s njegovom derivacijom moguće je prikazati u indeksnom zapisu

$$\Phi = N_k \Phi_k, \quad \frac{d\Phi}{dx} = \frac{dN_k}{dx} \Phi_k, \quad k = 1,2 \quad (4.20)$$

Uvrštavanjem (4.20), u relaciju (4.19) dobiva se:

$\left( EA \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_k}{dx} dx \right) \Phi_k = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_j q dx + EAN_j \frac{d\Phi}{dx} \Big _{x_i}^{x_{i+1}}, \quad j = 1,2; \quad k = 1,2$	(4.21)
---	--------

a zbrajanje se provodi po ponovljenom indeksu  $k$ . Drugi član na desnoj strani označuje Neumannove rubne uvjete. Neumannovi rubni uvjeti uzimaju se u obzir samo u globalnoj jednažbi konačnih elemenata tako da se pridodaju samo prvomu i posljednjem čvoru ( $x_i = a$  i  $x_n = b$ ) proračunskog modela. Veličine koje opisuju Neumannove rubne uvjete međusobno se poništavaju u unutarnjim čvorovima.

Izraz (4.21) zapisuje se u matičnom obliku:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{S1} \\ F_{S2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{R1} \\ F_{R2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^i \boldsymbol{\Phi}^i = \mathbf{F}_S^i + \mathbf{F}_R^i \quad (4.22)$$

gdje su:

- elementi matrice krutosti  $\mathbf{k}^i$

$$k_{jk} = EA \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_k}{dx} dx, \quad j = 1,2; \quad k = 1,2 \quad (4.23)$$

- elementi vektora opterećenja  $\mathbf{F}_S^i$  u čvorovima elementa od uzdužnog kontinuiranog opterećenja  $q$

$$F_{Sj} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_j q(x) dx, \quad j = 1, 2 \quad (4.24)$$

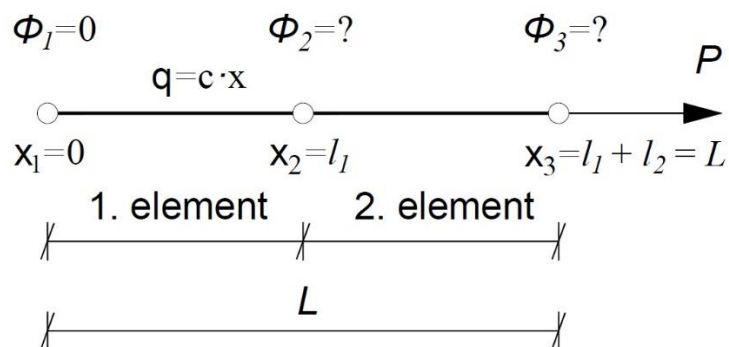
i  $F_{Rj}$ ,  $j = 1, 2$  - elementi vektora  $\mathbf{F}_R^i$  koji predstavljaju Neumannove rubne uvjete na krajevima područja ili koncentrirane sile.

Nakon deriviranja funkcija oblika, pomoću (4.23) dobiva se matrica krutosti za jednodimenzijski element sa dva stupnja slobode:

$$\mathbf{k}^i = \frac{EA}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Osim što je simetrična, matrica je i singularna jer nisu zadani rubni uvjeti po pomacima.

Primjer opisan na početku poglavlja mora se diskretizirati na minimalno dva konačna elementa (slika 4-5).



**Slika 4-5** Diskretizacija dva konačna elementa

Pripadajući sustavi jednažbi za pojedine elemente glase:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l_1} & -\frac{EA}{l_1} \\ -\frac{EA}{l_1} & \frac{EA}{l_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \frac{l_1^2}{6} \\ c \frac{l_1^2}{3} \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l_2} & -\frac{EA}{l_2} \\ \frac{EA}{-l_2} & \frac{EA}{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

Globalni sustav jednadžbi dobiva se popunjavanjem matrice za cijeli sustav:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l_1} & -\frac{EA}{l_1} & 0 \\ \frac{EA}{-l_1} & \frac{EA}{l_1} + \frac{EA}{l_2} & -\frac{EA}{l_2} \\ 0 & -\frac{EA}{l_2} & \frac{EA}{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \frac{l_1^2}{6} \\ c \frac{l_1^2}{3} \\ P \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Uvođenjem rubnog uvjeta po pomacima  $u_1 = \Phi_1 = 0$  ukida se prvi redak i stupac globalnoga sustava:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l_1} + \frac{EA}{l_2} & -\frac{EA}{l_2} \\ -\frac{EA}{l_2} & \frac{EA}{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \frac{l_1^2}{3} \\ P \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

Umnoškom prvog retka i stupca dobije se:

$$\frac{EA(l_1 + l_2)}{l_1 l_2} \Phi_2 - \frac{EA}{l_2} \Phi_3 = c \frac{l_1^2}{3} \quad (4.30)$$

Umnoškom drugog retka i stupca dobije se:

$$-\frac{EA}{l_2} \Phi_2 + \frac{EA}{l_2} \Phi_3 = P \quad (4.31)$$

Ovakav sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice rješava se tako da se prvo napravi supstitucija za  $\Phi_3$  iz izraza (4.31):

$$\Phi_3 = \frac{Pl_2}{EA} + \Phi_2 \quad (4.32)$$

Dobiveni izraz se zatim uvrsti u izraz (4.30) te se dobije približni pomak za  $\Phi_2$ :

$$\Phi_2 = \frac{Pl_1}{EA} + \frac{cl_1^3}{3EA} \quad (4.33)$$

Izraz (4.33) se uvrsti u izraz (4.32) kako bi se dobio približni pomak za  $\Phi_3$ :

$$\Phi_3 = \frac{P(l_1+l_2)}{EA} + \frac{cl_1^3}{3EA} \quad (4.34)$$

Približni pomak za  $\Phi_1$  iznosi 0.

### 4.3.3. Rješavanje problema metodom Rayleigh – Ritz

Funkcional potencijalne energije primjera opisanog diferencijalnom jednačbom (4.9) dan je izrazom:

$$\Pi = \int_0^L \frac{\sigma \varepsilon}{2} A dx - W = \int_0^L \frac{EA}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - W \quad (4.35)$$

gdje je:  $A$  – površina poprečnog presjeka,  $E$  – Youngov modul elastičnosti,  $W$  – rad vanjskih sila koje mogu biti koncentrirane ili distribuirane duž štapa.

Uvrštavanjem pretpostavljene približne funkcije pomaka (4.16) dobiva se diskretizirani funkcional energije:

$$\Pi = \int_0^L \frac{EA}{2} \left( \sum_{i=1}^n \Phi_i \frac{dN_i}{dx} \right)^2 dx - \int_0^{l_i} cx \sum_{i=1}^n \Phi_i N_i dx - P \sum_{i=1}^n \Phi_i N_i \quad (4.36)$$

Iz uvjeta stacionarnosti funkcionala energije slijedi:

$$\frac{d\Pi}{d\Phi_i} = 0 \Rightarrow \int_0^L EA \frac{dN_i}{dx} \sum_{j=1}^n \Phi_j \frac{dN_j}{dx} dx = \int_0^{l_i} qN_i dx + PN_i \quad (4.37)$$

$$\sum_{j=1}^n \Phi_j \int_0^L EA \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx = \int_0^{l_i} qN_i dx + PN_i \quad (4.38)$$

Prethodna jednadžba analogna je izrazu dobivenom metodom Bubnov – Galerkin te daje isti globalni sustav i rješenja.

Numerička rješenje pomaka u čvorovima konačnih elemenata ulazni su podaci za daljnje proračune deformacija i naprezanja odnosno unutarnjih sila na temelju kojih se vrši dimenzioniranje konstrukcije.

Vrijednosti deformacija i naprezanja za zadani primjer iznose:

- za 1. element:

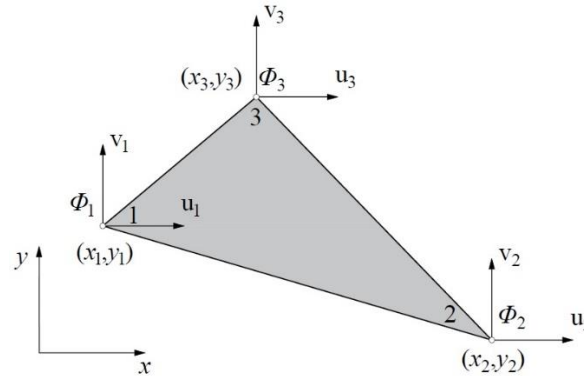
$$\varepsilon_{1-2} = \frac{du}{dx} \approx \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l_1} = \frac{P}{EA} + \frac{cl_1^2}{3EA} \quad \sigma_{1-2} = E \cdot \varepsilon_{1-2} = \frac{P}{A} + \frac{cl_1^2}{3A} \quad (4.39)$$

- za 2. element:

$$\varepsilon_{2-3} = \frac{du}{dx} \approx \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{l_2} = \frac{P}{EA} \quad \sigma_{1-2} = E \cdot \varepsilon_{2-3} = \frac{P}{A} \quad (4.40)$$

## 5. DVOIDIMENZIJSKI KONAČNI ELEMENT

Za prikaz realizacije dvodimenzijuskog konačnog element odabran je osnovni trokutni element sa tri čvora i šest stupnjeva slobode (slika 5-1)



Slika 5-1 Osnovni trokutni element

Postupak je opisan prema knjizi *Uvod u numeričke metode u strojarstvu*, (Sorić, 2009.)

Raspodjela varijable  $\Phi$  može se opisati potpunim linearnim polinomom

$$\Phi = a_1 + a_2x + a_3y \quad (5.1)$$

U čvorovima određenim koordinatama  $x_i, y_i$  generalizirane koordinate prema (5.1)  $\Phi_i$  glase:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 \\ \Phi_2 &= a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 \\ \Phi_3 &= a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Relacije (5.2) se zapisuju u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Simbolički zapis (5.3) glasi :

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{a} \quad (5.4)$$

gdje je:

$$\boldsymbol{\Phi}^T = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3] \quad (5.5)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Za nalaženje veze između funkcije  $\Phi$  u elementu i varijabli u čvorovima, eksplicitno se prikazuje vektor nepoznatih parametara  $\mathbf{a}$ , temeljem (5.4) to je jednako

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \quad (5.7)$$

Inverzna matrica  $\boldsymbol{\alpha}$  izračunava se u obliku

$$\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

gdje je  $A$  površina trokutastog elementa prikazana determinantom

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (5.9)$$

Koordinatne funkcije računaju se prema izrazu:

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\alpha}^{-1} \quad , \quad \boldsymbol{\xi} = [1, x, y] \quad (5.10)$$

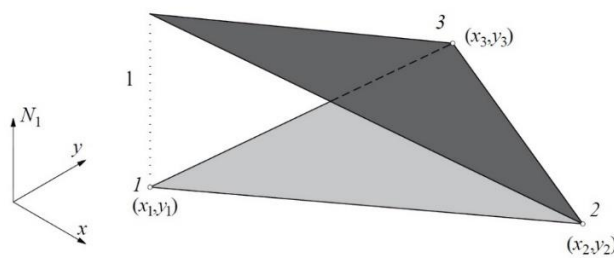
Uvrštavanjem (5.8) u (5.1) dobivaju se funkcije:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] = \\
 &= \frac{1}{2A} [(y_2 - y_3)(x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2)] \\
 N_2 &= \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\
 &= \frac{1}{2Ac} [(y_3 - y_1)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3)] \\
 N_3 &= \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] = \\
 &= \frac{1}{2A} [(y_1 - y_2)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1)]
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

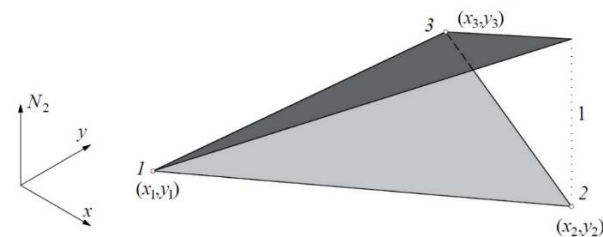
Može se zaključiti da funkcije zadovoljavaju uvjet:

$$N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases}$$

Funkcija oblika  $N_k$  u čvoru  $(x_k, y_k)$  jednaka je jedinici, dok je u svim ostalim čvorovima jednaka je nuli. Funkcije oblika za jedinične pomake u različitim čvorovima grafički su prikazane na slici 5-2, slici 5-3 i slici 5-4.

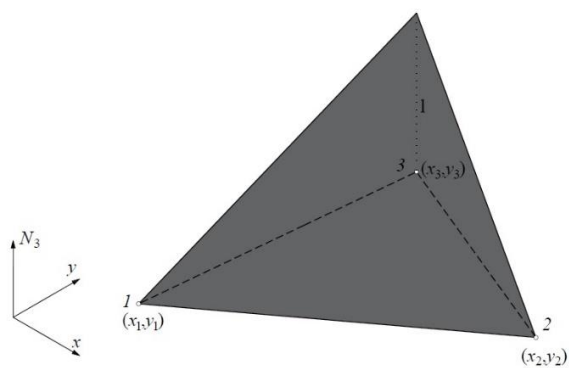


**Slika 5-2** Funkcija oblika  $N_1$



**Slika 5-3** Funkcija oblika  $N_2$



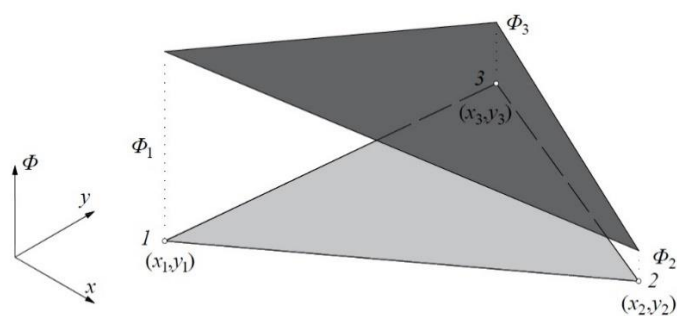


**Slika 5-4** Funkcija oblika  $N_3$

Funkcija  $\Phi$  ovisno o čvornim varijablama sada se može napisati u obliku

$$\Phi = N_1 \Phi_1 + N_2 \Phi_2 + N_3 \Phi_3 \quad (5.12)$$

Raspodjela funkcije  $\Phi$  grafički je prikazana na slici 5-5.



**Slika 5-5** Raspodjela funkcije  $\Phi$

Matrica funkcija za element glasi:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Derivacija matrice koordinatnih funkcija (5.13) se zapisuje u obliku:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Matrica elastičnosti za ravninsko stanje naprezanja glasi:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1 + \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Matrica krutosti iznosi

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \quad (5.16)$$

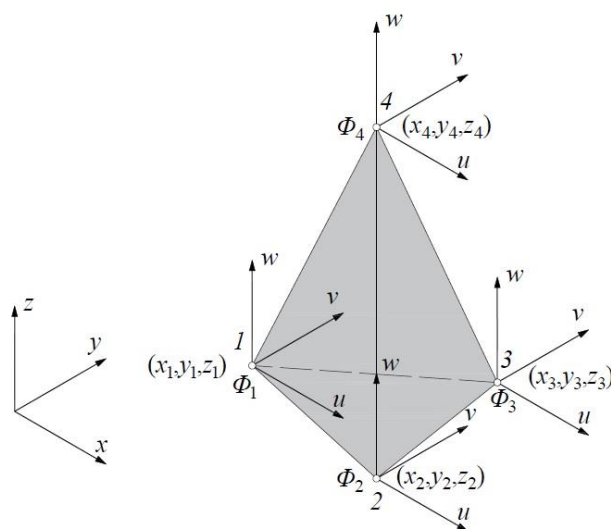
Prikazani konačni element koristi se prilikom modeliranja ravninskog stanja naprezanja odnosno deformacija. Linearna raspodjela polja pomaka daje konstantno polje deformacije i pomaka što se može smatrati njegovim nedostatkom. Međutim osnovni trokutni element neizostavan je prilikom modeliranja složene geometrije numeričkog modela ili kada postoje diskontinuiteti u polju pomaka, deformacija i naprezanja kao što su problemi kontaktne mehanike, mehanike loma i slično.

## 6. TRODIMENZIJSKI KONAČNI ELEMENTI

Analiza trodimenzionalnih problema teorije elastičnosti po MKE se svodi na jednostavno proširenje promatranja o dvodimenzionalnim problemima uvođenjem još jedne nove dimenzije (Sekulović, 1988). To znači da se preko jednostavnih trokutastih i četvrtastih dvodimenzionalni elemenata dodavanjem treće dimenzije dođe do trodimenzionalnih poput tetraedra ili heksaedra. Trodimenzionalni elementi imaju veliki broj stupnjeva slobode što znači i veći unos podataka, broj jednačbi i izlaznih rezultata. (Sekulović, 1988)

Trodimezijski element poput tetraedra ima 12 stupnjeva slobode, dok element poput heksaedra ima 24.

Najjednostavniji trodimenzionalni element je tetraedar koji ima 12 stupnjeva slobode, četiri čvora sa po tri stupnja slobode, (slika 6-1).



**Slika 6-1** Trodimenzionalni element u obliku tetraedra

Varijabla  $\Phi$  za trodimenzijski element opisuje se linearnim polinomom slično kao i kod dvodimenzijskog elementa samo sa dodanom jednom dimenzijom  $z$ :

$$\Phi = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \quad (6.1)$$

Prema (6.1) generaliziraju se koordinate za  $\Phi_i$ :

$$\Phi_1 = a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4z_1$$

$$\Phi_2 = a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 + a_4z_2$$

$$\Phi_3 = a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 + a_4z_3$$

$$\Phi_4 = a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 + a_4z_4 \quad (6.2)$$

Relacije (6.2) se mogu zapisati u obliku matrice:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

što se opet može simbolički zapisati:

$$\Phi = \alpha \mathbf{a} \quad (6.4)$$

Vektor nepoznanica u čvorovima prikazan je:

$$\Phi^T = [\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4] \quad (6.5)$$

A matrični zapis:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Kao i kod dvodimenzijskih elemenata, traži se veza između funkcije  $\Phi$  u elementu i varijabli u čvorovima. Zapis (6.4) zapiše se u obliku:

$$\mathbf{a} = \alpha^{-1} \Phi \quad (6.7)$$

Zbog svoje veličine inverzna matrice  $\alpha$  i daljnji postupak provedbe elemenata se neće prikazati.

Konačni pomaci u čvorovima konačnih elemenata se mogu prikazati:

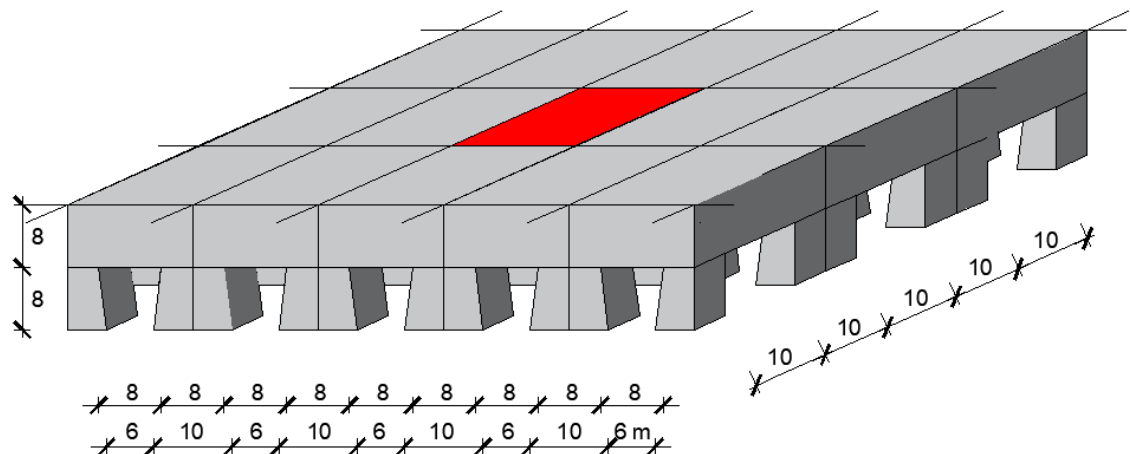
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Gdje je:

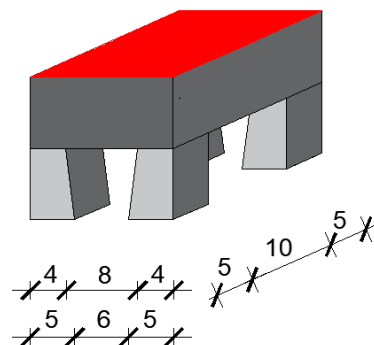
$$\Phi_i = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_i \quad i=1,2,3,4 \quad (6.9)$$

## 7. PRIMJER UPORABE MKE U RAČUNALNOM PROGRAMU SAP2000

Kao primjer upotrebe metode konačnih elemenata odabran je statički model nepravilnih stupova dimenzija gornje plohe 8x10 m i donje plohe 10x10 m, visine 8 m, na koje je oslonjena krovina debljine 8 m, slika 7-1, na kojoj je prikazan presjek kroz polovice stupova. Promatra se stanje pomaka i naprezanja na srednjem polju statičkog modela (crveno polje). Jedno polje se prenosi na četvrtine stupova, slika 7-2. Odabrane mehaničke karakteristike su: Poissonov koeficijent  $\nu = 0,3$ , modul elastičnosti stupa  $E_S = 8 \text{ GPa}$ , modul elastičnosti krovine  $E_K = 6 \text{ GPa}$ , specifična težina stupa  $\gamma_S = 25 \text{ kN/m}^3$ , specifična težina krovine  $\gamma_K = 20 \text{ kN/m}^3$ .



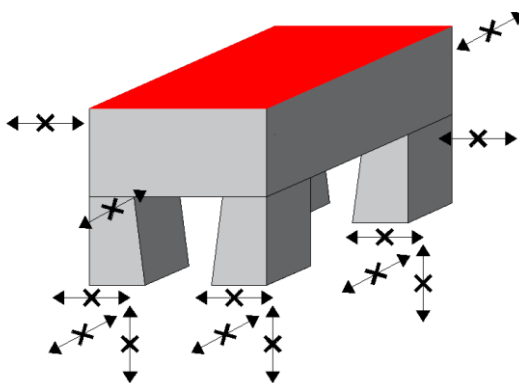
Slika 7-1 Statički model stupova i krovine



Slika 7-2 Polje analizirano metodom konačnih elemenata

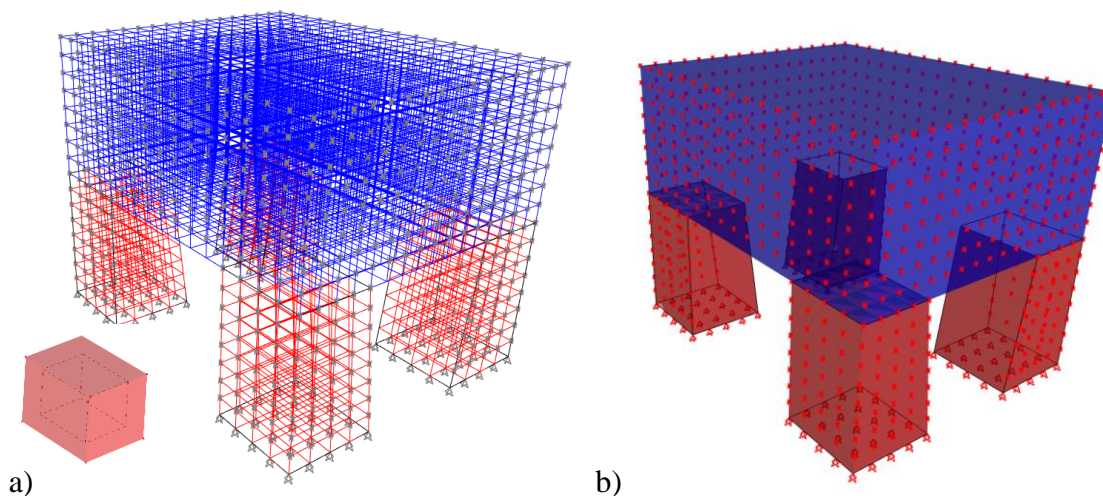
Zadatak se svodi na linearni statički problem u mehanici deformabilnih tijela. Ne uzimaju se dodatna opterećenja, već se proučava utjecaj vlastite težine odnosno krovine na stupove. Pri tome se koristi računalni program SAP2000 koji se bazira na metodi konačnih elemenata.

Pretpostavi se da su svi pomaci donjih ploha stupova spriječeni, a rotacije dozvoljene, što se modelira zglobnim nepomičnim ležajevima u svim čvorovima donjih ploha stupova. Također, po visini su presjeka spriječeni odgovarajući horizontalni pomaci u svim rubnim čvorovima, slika 7-3, iz razloga što se radi o četvrtinama stupova pa ostatak stupa sprečava pripadajuće pomake.



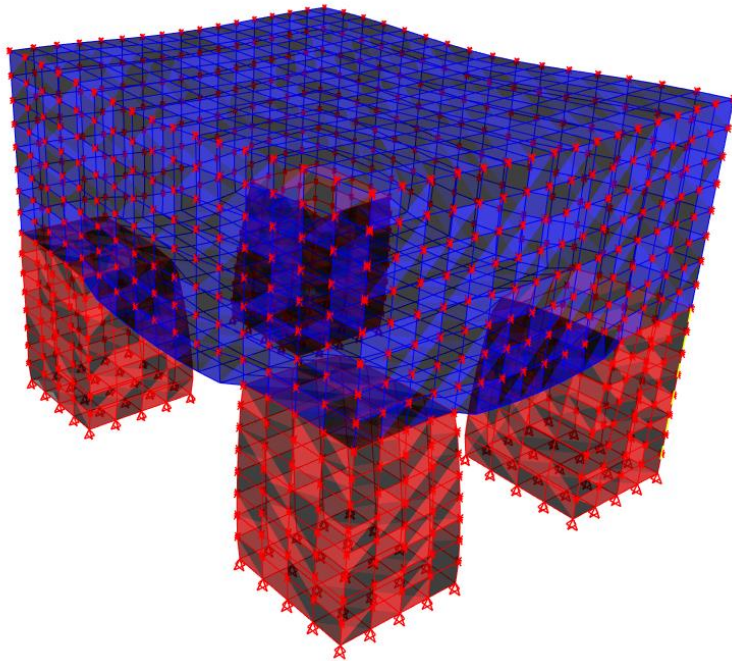
**Slika 7-3** Rubni uvjeti: spriječeni pomaci u odgovarajućim smjerovima

Opisani model srednjeg polja je podijeljen na ukupno 2560 prostornih konačnih elemenata, od čega 512 elemenata pripada četvrtinama stupova (128 elemenata po jednoj četvrtini stupa), a 2048 elemenata krovini. Rubni uvjeti su određeni u skladu sa slikom 7-3.

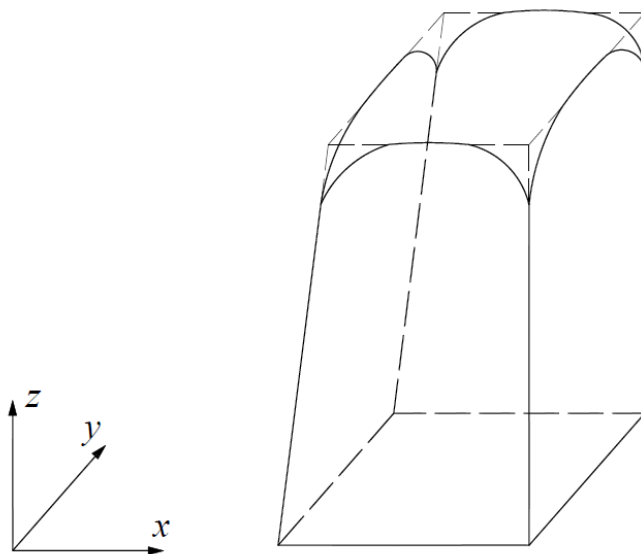


**Slika 7-4** Model u računalnom programu SAP2000

Pomaci modela su očekivanog reda veličine: pomak na sredini krovine iznosi  $u_K = -1,1 \text{ mm}$ , a pomak na vrhu stupa  $u_S = -0,5 \text{ mm}$  do  $-0,6 \text{ mm}$ . Deformirani model je prikazan na slici 7-5. Naprezanja se također mijenjaju na očekivan način, slika 7-7. Pomaci i naprezanja su veći na slobodnim stranama stupova (unutarnje strane polja), a padaju prema ploham sa spriječenim pomacima (vanjske strane četvrtina stupova), što je i očekivano jer bi se stup prema mehanici kontinuuma trebao ponašati kao rotacijski paraboloid (slika 7-6), odnosno ne deformira se jednoliko, već su naprezanja i pomaci veći uz rubove cijelog poprečnog presjeka stupa, slika 7-8.

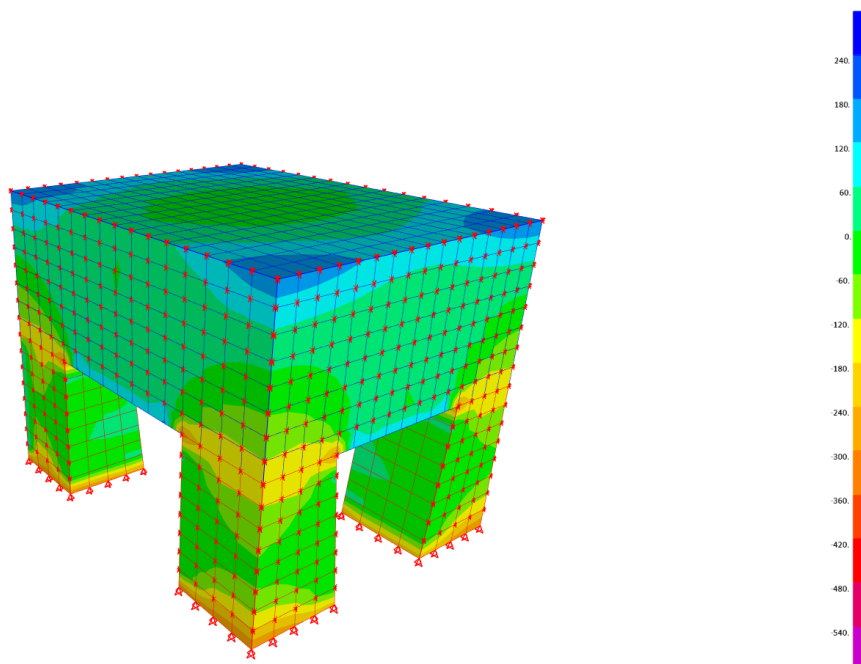


**Slika 7-5** Pomaci modela

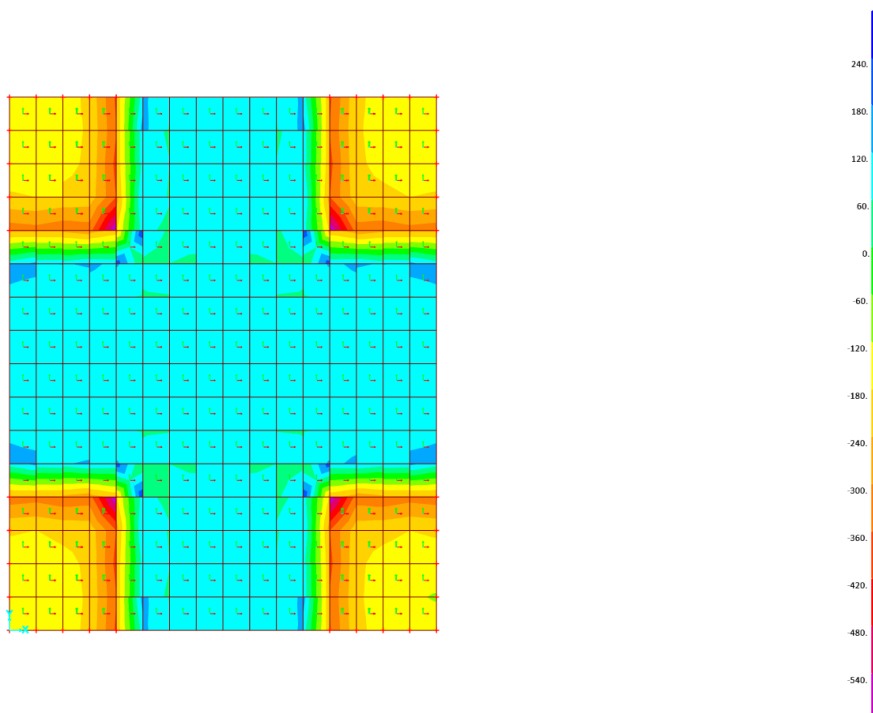


**Slika 7-6** Shematski prikaz deformacija nosivog stupa u obliku rotacijskog paraboloida





**Slika 7-7** Maksimalna naprezanja u modelu



**Slika 7-8** Maksimalna naprezanja na spoju ploče i stupa

## 8. ZAKLJUČAK

Kao što je već napomenuto, numeričke metode su prošle dug period „mirovanja“ prije nego su se počele primjenjivati u svakodnevnom životu. Iako se teorija počela razvijati sredinom 17. st. pa sve do prve polovice 20. st. njena primjena bila je u najmanju ruku ograničena, sve do pojave elektroničkih računala. Naime svi modeli koji su imali više od jedne dimenzije imali su i više čvorova te više stupnjeva slobode. Veći broj čvorova značio je i kompleksniji proračun.

Razlog zbog kojeg se odabrao jednodimenzijski štapni element je taj što se na relativno jednostavan način moglo prikazati postupak realizacije metode konačnih elemenata. Potreba za većim brojem čvorova, odnosno dvodimenzijskih i trodimenzijskih elemenata proizlazi iz težnje da se što realnije aproksimira ponašanje stvarnih fizikalnih sustava. Iako su danas razvijeni vrlo složeni i specijalizirani numerički programi, potrebno je poznavati temeljne postavke numeričkih proračuna te analizu problema provoditi i na jednostavnim i složenim modelima. Ukoliko je moguće svakako treba izdvojiti dijelove koji se mogu potvrditi i analitičkim rješenjima.

U zadnjem dijelu rad se bavio sa primjenom metode konačnih elemenata na primjeru podzemnih prostorija gdje su se promatrali pomaci u pretpostavljenoj stijenskoj masi. Veliki broj čvorova omogućio je realni prikaz polja pomaka i naprezanja. Stavljanjem sve gušće mreže konačnih elemenata nije utjecalo na rezultat. Raspodjela pomaka i naprezanja u čvorovima elemenata stupa odgovaraju rješenju poznatom iz mehanike kontinuuma. Ipak valja napomenuti da računalni programi ne mogu simulirati potpuno prirodne uvijete, jer materijali u prirodnom ležištu nisu uvijek izotropni kontinuumi, a također uvijek mogu postojati i neke nepoznanice, poput diskontinuiteta, mikropukotina ili nekih šupljina, a koji nisu uočeni.

## POPIS LITERATURE

- AABOE, A., 1964. *Episodes from the Early History of Mathematics*, Washington D.C.,  
URL: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-best-known-old-babylonian-tablet#refs> (22.8.2019.)
- ATALIĆ, J., LAZAREVIĆ, D., 2017. *Plošni nosači*, Zagreb: Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet
- BENZI, M. 2009. *Key Moments in the History of Numerical Analysis* URL: [http://history.siam.org/%5C/pdf/nahist\\_Benzi.pdf](http://history.siam.org/%5C/pdf/nahist_Benzi.pdf) (17.4. 2019.)
- CASSELMAN, B., n.d, *YBC 7289*, Yale University,  
URL: <http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc.html> (22.8.2019.)
- LAZAREVIĆ, D. 2000. *Diskretno modeliranje opterećenja silosa*. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet
- SORIĆ, J. 2009. *Uvod u numeričke metode u strojarstvu*. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje
- ENCIKLOPEDIJA, n.d., *logaritamsko računalo*,  
URL: <http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=36981> (11.8.2019.)
- FISH, J., BELYTSCHKO T. 2007. *A First Course in Finite Elements*. Wiley
- FINANCIAL TIMES, 2013, *Supercomputers: Battle of the speed machines*, URL: <https://www.ft.com/content/24dc83d6-e40e-11e2-b35b-00144feabdc0> (22.8.2019.)
- SCHILLER GMBH, n.d., *Finite Element Analysis*, URL: <http://www.cfm-schiller.de/en/clamping-technology/services/finite-element-analysis/> (22.8.2019.)
- SEKULOVIĆ, M. 1988. *Metod konačnih elemenata*, Beograd. IRO“GRAĐEVINSKA KNJIGA“
- TEXAS A&M UNIVERSITY, 2001, *The Moscow Papyrus*,  
URL: <https://www.math.tamu.edu/~don.allen/history/egypt/node4.html> (19.8.2019)
- THE BRITISH MUSEUM, 2019. *The Rhind Mathematical Papyrus*, URL: [https://www.britishmuseum.org/research/collection\\_online/collection\\_object\\_details/collection\\_image\\_gallery.aspx?partid=1&assetid=580204001&objectid=117389](https://www.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details/collection_image_gallery.aspx?partid=1&assetid=580204001&objectid=117389) (17.8.2019.)
- THE OUGHTRED SOCIETY, 2013. *Slide Rule History*  
URL: <http://www.oughtred.org/history.shtml> (22.8.2019.)
- UNIVERSITY OF COLORADO, DENVER. *Squaring the Circle – A Case Study in the History of Mathematics* URL: <http://www-math.ucdenver.edu/~wcherowi/courses/history2/quad.pdf> (22.8.2019.)
- WIKIPEDIA, 2012., *Mechanical calculator*,

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Mechanical\\_calculator](https://en.wikipedia.org/wiki/Mechanical_calculator) (22.8.2019.)

WIKIPEDIA, 1943., *Colossus computer*,

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Colossus\\_computer](https://en.wikipedia.org/wiki/Colossus_computer) (22.8.2019.)