Primjene matrica reda 2 u rješavanju problema rotacija u ravnini

Pleše, Ivana; Rajić, Rajna

Source / Izvornik: **Poučak : časopis za metodiku i nastavu matematike, 2020, 21, 4 - 12**

Journal article, Published version
Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

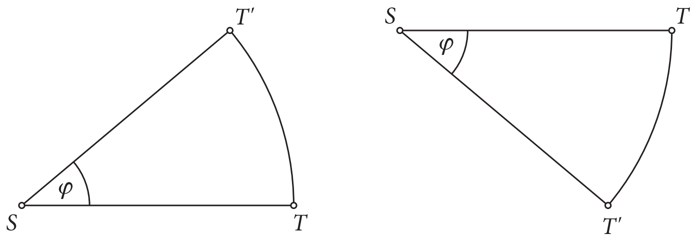
Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:169:099323

Primjene matrica reda 2 u rješavanju problema rotacija u ravnini

IVANA PLEŠE[1] I RAJNA RAJIĆ[2]

Sažetak. Pomoću matrica reda 2 mogu se opisati razne geometrijske transformacije ravnine, među kojima važno mjesto pripada rotaciji oko točke za dani kut. U ovom članku na nekoliko ćemo primjera ilustrirati primjene matrica reda 2 u rješavanju problema rotacija u ravnini.

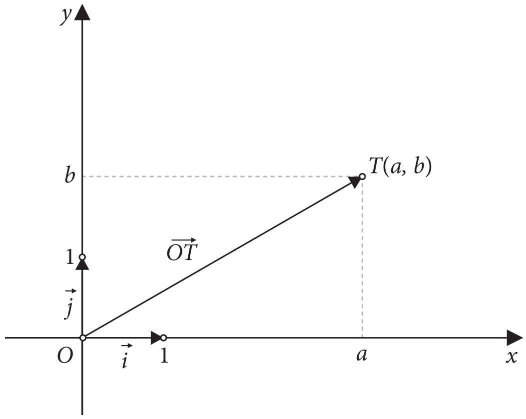
Rotacija u ravnini oko točke S za kut φ preslikavanje je koje točku T preslikava u točku T' tako da je $|ST| = |ST'|$ i $\angle TST' = \varphi$ Ako se rotacija odvija u smjeru suprotnom od smjera kretanja kazaljke na satu, kažemo da je riječ o rotaciji u pozitivnom smjeru. Ako se rotacija odvija u smjeru kretanja kazaljke na satu, onda je to rotacija u negativnom smjeru.



Slika 1: Rotacija oko točke S za kut φ u pozitivnom smjeru (lijevo) i u negativnom smjeru (desno)

Neka je u ravnini $\boldsymbol{R}^2$ dan pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u točki O. Označimo s $\vec{i}$ jedinični vektor u pozitivnom smjeru osi x, a s $\vec{j}$ jedinični vektor u pozitivnom smjeru osi y. Svaka točka $T(a,b)$ ravnine $\boldsymbol{R}^2$ može se poistovjetiti s vektorom položaja te točke, a to je $\overrightarrow{OT} = a\vec{i} + b\vec{j}$. Vektor $a\vec{i} + b\vec{j}$ zapisujemo kao $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Uz tu identifikaciju, točku (a, b) ravnine $\boldsymbol{R}^2$ zapisujemo kao vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

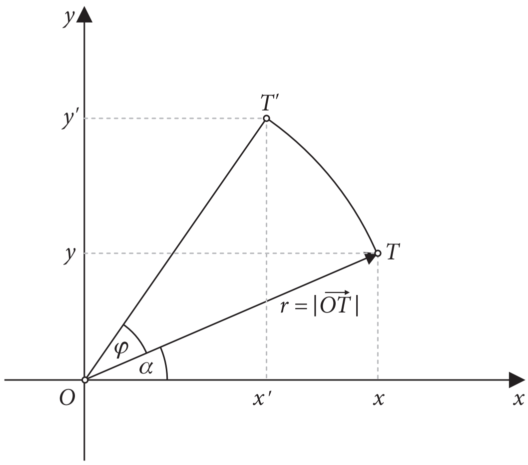
[1]Ivana Pleše, Prirodoslovno-matematički fakultet – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu
[2]Rajna Rajić, Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Sveučilište u Zagrebu



Slika 2. Vektor položaja točke T

Promatramo sada rotaciju u ravnini $\boldsymbol{R}^2$ oko ishodišta O za kut φ u pozitivnom smjeru. Ako je dana točka $T(x, y)$, nađimo koordinate točke $T'(x', y')$ u koju će se pri ovoj rotaciji preslikati točka T. Označimo s α kut koji vektor položaja $\overrightarrow{OT}$ točke T zatvara s pozitivnim dijelom osi x. Tada je $\alpha+\varphi$ kut koji vektor položaja $\overrightarrow{OT'}$ točke T' zatvara s pozitivnim dijelom osi x. Neka je $r=\left|\overrightarrow{OT}\right|=\left|\overrightarrow{OT'}\right|$. Tada vrijedi

$$x=r\cos\alpha,\quad y=r\sin\alpha,\quad x'=r\cos(\alpha+\varphi),\quad y'=r\sin(\alpha+\varphi).$$



Slika 3. Točka T′ slika je točke T pri rotaciji oko ishodišta O za kut φ u pozitivnom smjeru

Koristeći adicijske teoreme dobivamo

$$\begin{aligned}x'&=r\cos(\alpha+\varphi)=r(\cos\alpha\cos\varphi-\sin\alpha\sin\varphi)=x\cos\varphi-y\sin\varphi,\\ y'&=r\sin(\alpha+\varphi)=r(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)=x\sin\varphi+y\cos\varphi.\end{aligned}$$

Uočimo da se dobivene relacije mogu kraće zapisati u matričnom obliku kao

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Matricu

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

nazivamo *matricom rotacije* oko ishodišta O za kut φ u pozitivnom smjeru.

Prema tome, rotacija ravnine oko ishodišta O za kut φ u pozitivnom smjeru je preslikavanje s $\boldsymbol{R}^2$ u $\boldsymbol{R}^2$ zadano s $\vec{u} \mapsto R_\varphi \vec{u}$.

Primijetimo da je

$$R_\varphi \vec{i} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}, \quad R_\varphi \vec{j} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix},$$

tj. prvi stupac matrice R_φ slika je vektora $\vec{i}$ (odnosno točke $(1,0)$), dok je drugi stupac matrice R_φ slika vektora $\vec{j}$ (odnosno točke $(0,1)$).

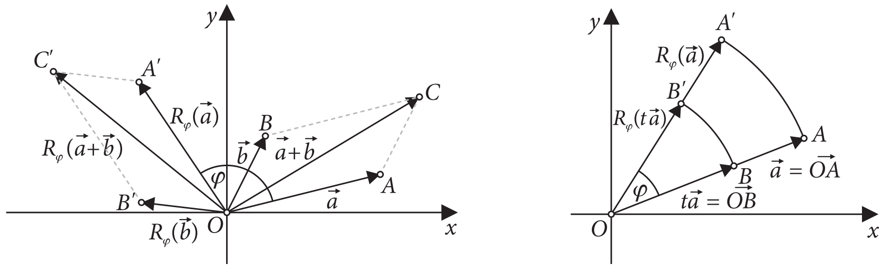
Rotacija je linearno preslikavanje, u smislu da za svaka dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i svaki realni broj t vrijede sljedeća svojstva:

$$R_\varphi\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = R_\varphi \vec{a} + R_\varphi \vec{b}, \qquad R_\varphi\left(t\vec{a}\right) = tR_\varphi \vec{a},$$

pri čemu prvo svojstvo nazivamo aditivnost, a drugo homogenost. Oba se svojstva mogu geometrijski interpretirati.

Aditivnost: Ako su točke O, A, C, B vrhovi paralelograma koji se pri rotaciji oko točke O za dani kut preslikaju u točke O, A', C', B' redom, tada je četverokut $OA'C'B'$ također paralelogram.

Homogenost: Ako su točke O, A, B kolinearne (tj. leže na istom pravcu), pri čemu je $\overrightarrow{OB} = t\overrightarrow{OA}$ za neki realni broj t, te ako se pri rotaciji oko točke O za dani kut točka A preslika u A', a B u B', onda su i točke O, A', B' kolinearne, pri čemu je $\overrightarrow{OB'} = t\overrightarrow{OA'}$.



Slika 4. Rotacija je aditivno preslikavanje (lijevo) i homogeno preslikavanje (desno)

Rotiramo li točku oko ishodišta O u pozitivnom smjeru najprije za kut φ, a zatim za kut ψ, tada se takva kompozicija rotacija opisuje umnoškom odgovarajućih matrica rotacija, tj. vrijedi

$$R_{\varphi+\psi} = R_\psi R_\varphi.$$

Rotacija točke oko ishodišta O za kut φ u negativnom smjeru opisuje se matricom $R_{-\varphi}$. Jasno je da je

$$R_\varphi R_{-\varphi} = I,$$

gdje je $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ jedinična matrica. Stoga je matrica R_φ regularna i vrijedi $R_\varphi^{-1} = R_{-\varphi}$.

Napomena. Osnove matrične teorije mogu se pronaći u npr. [1,2]. Za detaljniju diskusiju o mnogim važnim temama vezanima uz matrice reda 2 te o njihovim primjenama u ravninskoj geometriji zainteresiranog čitatelja upućujemo na [3].

Sada ćemo na nekoliko primjera ilustrirati primjenu matričnog zapisa rotacije u rješavanju problema rotacija u ravnini.

Primjer 1. Zadane su točke A (3, 0) i B (1, 2). Nađite sliku nastalu rotacijom dužine $\overline{AB}$ oko ishodišta za kut od 30° u pozitivnom smjeru.

Rješenje. Kako je φ = 30°, odgovarajuća matrica rotacije je

$$R := R_{30^\circ} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Pogledajmo kamo će se preslikati rubne točke dužine AB. Da bismo odredili sliku A' točke A pri ovoj rotaciji, potrebno je pomnožiti matricu R s vektorom položaja $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ točke A. Dobije se

$$\overrightarrow{OA'} = R\left(\overrightarrow{OA}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

pa se A preslika u točku $A'\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Slično, sliku B' točke B dobivamo množenjem matrice R s vektorom položaja $\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ točke B. Dakle,

$$\overrightarrow{OB'} = R\left(\overrightarrow{OB}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

pa se B preslika u točku $B'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1, \frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$.

Koristeći linearnost rotacije dobije se

$$\begin{aligned} R\left(\overrightarrow{AB}\right) &= R\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right) = R\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right) = R\left(\overrightarrow{OB}\right) - R\left(\overrightarrow{OA}\right) \\ &= \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{A'B'}. \end{aligned}$$

Prema tome, zadanom rotacijom dužina $\overline{AB}$ preslika se na dužinu $\overline{A'B'}$.

Primjer 2. Nađite sliku nastalu rotacijom pravca $y = 2x - 1$ oko ishodišta za kut od 45° u pozitivnom smjeru.

Rješenje. Jednadžbu pravca $y = 2x - 1$ zapisat ćemo u parametarskom obliku

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \end{cases}, \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

Kutu $\varphi = 45°$ odgovara matrica rotacije

$$R := R_{45^\circ} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Pogledajmo kamo će se pri ovoj rotaciji preslikati proizvoljna točka $T_t\,(t, 2t - 1)$ zadanoga pravca. Vrijedi

$$\overrightarrow{OT_t}\,' = R\left(\overrightarrow{OT_t}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 2t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

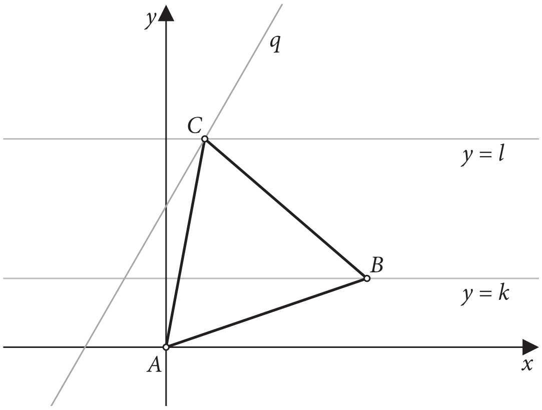
pa je $T_t\,'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ slika točke T_t. Prema tome, zadani se pravac preslikava na pravac čije parametarske jednadžbe glase

$$\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{3\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \quad t \in \boldsymbol{R},$$

odakle se eliminacijom parametra t dobije $y = -3x + \sqrt{2}$.

Primjer 3. U ravnini su dana tri paralelna pravca $y = 0$, $y = k$, $y = l$ ($k, l \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, $k \neq 1$. U ovisnosti o k i l nađite koordinate vrhova B i C jednakostraničnog trokuta ABC kojemu je vrh A ishodište koordinatnog sustava, vrh B pripada pravcu $y = k$, a vrh C pripada pravcu $y = l$.

Rješenje. Vrh C dobit ćemo kao presjek pravca $y = l$ i pravca q koji nastaje rotacijom pravca $y = k$ oko vrha $A(0, 0)$ za kut od 60° u pozitivnom smjeru. Vrh B dobit ćemo rotacijom točke C oko A za kut od 60° u negativnom smjeru. Uočimo da će tada vrh B pripadati pravcu $y = k$. Osim toga, $|AC| = |AB|$ i $\angle CAB = 60^\circ$ pa je trokut ABC jednakostraničan.



Slika 5. Jednakostranični trokut ABC čiji vrhovi leže na paralelnim pravcima

Koordinate vrhova B i C izračunat ćemo primjenom matrica rotacije. Neka je $B_t(t,k)$, $t \in \boldsymbol{R}$, proizvoljna točka pravca $y = k$. Tada je

$$\overrightarrow{OB_t'} = R_{60^\circ}\left(\overrightarrow{OB_t}\right) = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2}k \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}k \end{bmatrix}$$

tj. slika točke B_t pri rotaciji pravca $y = k$ oko vrha $A(0, 0)$ za kut od 60° u pozitivnom smjeru je točka $B_t'\left(\frac{1}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2}k, \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}k\right)$ na pravcu q. Kako vrh C leži na presjeku pravaca q i $y = l$, to za parametar t koji odgovara vrhu C vrijedi $\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}k = l$, odakle slijedi $t = \frac{2}{\sqrt{3}}l - \frac{1}{\sqrt{3}}k$. Stoga apscisa točke C iznosi $\frac{1}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2}k = \frac{1}{\sqrt{3}}l - \frac{2}{\sqrt{3}}k$.

Dakle, $C\left(\frac{1}{\sqrt{3}}l - \frac{2}{\sqrt{3}}k, l\right)$. Vrh B dobije se rotacijom točke C oko A za kut od 60° u negativnom smjeru.

Imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= R_{-60^\circ}\left(\overrightarrow{OC}\right)=\begin{bmatrix}\cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ)\\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}l-\frac{2}{\sqrt{3}}k\\ l\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}l-\frac{2}{\sqrt{3}}k\\ l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{3}}l-\frac{1}{\sqrt{3}}k\\ k\end{bmatrix}\end{aligned}$$

tj. $B\left(\frac{2}{\sqrt{3}}l-\frac{1}{\sqrt{3}}k,k\right)$. Lako se provjeri da je

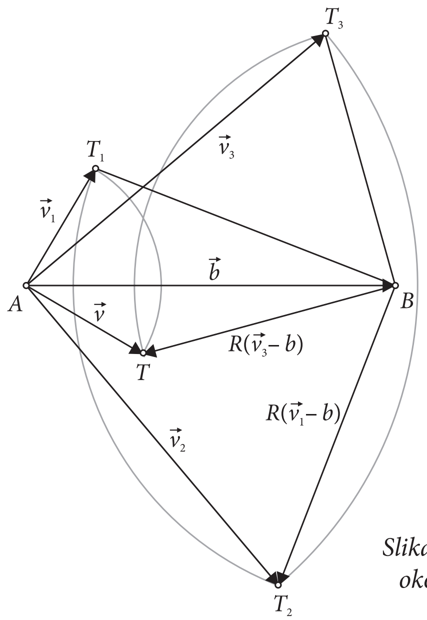
$$|AB|=|AC|=|BC|=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{k^2+l^2-kl}.$$

Primjer 4. Neka je dana dužina $\overline{AB}$ i točka T u ravnini. Točku T rotiramo u pozitivnom smjeru za kut od 90° četiri puta, i to najprije oko točke A, zatim oko točke B pa ponovo oko A i konačno oko B. Pokažite da se nakon izvedenih rotacija točka T vratila u početnu poziciju.

Rješenje. Jasno je da bez smanjenja općenitosti možemo smatrati da je točka A ishodište koordinatnog sustava u ravnini. Označimo $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AT}$ te neka je

$$R=\begin{bmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

matrica rotacije oko točke A (tj. ishodišta) za kut od 90° u pozitivnom smjeru.



Slika 6. Rotacija točke T uzastopce oko točaka A, B, A, B za kut od 90° u pozitivnom smjeru

Nakon prve rotacije, točka T preslikat će se u točku T_1 takvu da je

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AT_1} = R\vec{v}.$$

Zatim će se nakon druge rotacije točka T_1 preslikati u točku T_2 za koju je

$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AT_2} = R\left(\overrightarrow{v_1} - \vec{b}\right) + \vec{b}.$$

Nakon treće rotacije točka T_2 preslikat će se u točku T_3 za koju vrijedi

$$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{AT_3} = R\overrightarrow{v_2},$$

a nakon četvrte rotacije T_3 će se preslikati u točku T_4 takvu da je

$$\overrightarrow{v_4} = \overrightarrow{AT_4} = R\left(\overrightarrow{v_3} - \vec{b}\right) + \vec{b}.$$

Uočimo da je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_4} &= R\overrightarrow{v_3} - R\vec{b} + \vec{b} = R^2\overrightarrow{v_2} - R\vec{b} + \vec{b} = R^3\overrightarrow{v_1} - R^3\vec{b} + R^2\vec{b} - R\vec{b} + \vec{b} \\ &= R^4\vec{v} - R^3\vec{b} + R^2\vec{b} - R\vec{b} + \vec{b} = \vec{v} + R\vec{b} - \vec{b} - R\vec{b} + \vec{b} = \vec{v},\end{aligned}$$

budući da je $R^2 = -I$, $R^3 = -R$ i $R^4 = I$. Time smo pokazali da je $T_4 = T$, tj. nakon izvedenih rotacija točka T vratit će se u početnu poziciju.

Napomena. Kada bismo zamijenili poredak rotacija, na način da točku T najprije rotiramo oko točke A dva puta za kut od 90° u pozitivnom smjeru (što znači za 180°) te zatim dva puta oko točke B za kut od 90° u pozitivnom smjeru (što je opet za 180°), tada bi se točka T nakon izvedenih rotacija vratila u početnu poziciju samo ako je $A = B$, tj. ako dužina AB degenerira u točku. Uvjerite se sami.

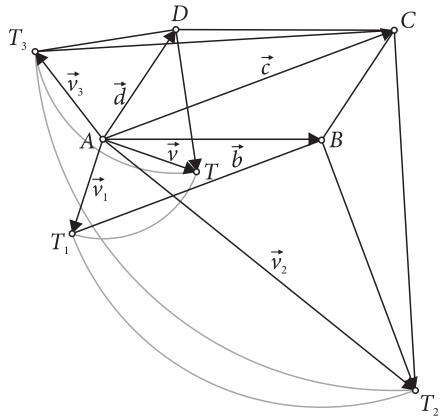
Primjer 5. Neka je dan četverokut $ABCD$ i točka T u ravnini. Točku T rotiramo četiri puta, i to najprije oko točke A za kut od 90° u negativnom smjeru, zatim oko točke B za kut od 90° u pozitivnom smjeru, nakon toga oko točke C za kut od 90° u negativnom smjeru, te konačno oko točke D za kut od 90° u pozitivnom smjeru. Pokažite da se nakon izvedenih rotacija točka T vratila u početnu poziciju ako i samo ako je $ABCD$ paralelogram.

Rješenje. Kao i u prethodnom primjeru možemo smatrati da je točka A ishodište koordinatnog sustava u ravnini. Označimo $\vec{v} = \overrightarrow{AT}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$, te neka je

$$R = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrica rotacije oko točke A za kut od 90° u pozitivnom smjeru. Tada je matrica rotacije oko točke A za kut od 90° u negativnom smjeru jednaka

$$\begin{bmatrix} \cos\left(-90°\right) & -\sin(-90°) \\ \sin\left(-90°\right) & \cos(-90°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -R.$$



Slika 7. Rotacije točke T uzastopce oko točaka A, B, C, D za kut od 90° redom u negativnom, pozitivnom, negativnom i pozitivnom smjeru

Nakon izvedenih rotacija točka T preslikat će se redom u točke T_1, T_2, T_3, T_4 takve da vrijedi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1} &= \overrightarrow{AT_1} = -R\overrightarrow{v},\\
\overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{AT_2} = R\left(\overrightarrow{v_1} - \vec{b}\right) + \vec{b},\\
\overrightarrow{v_3} &= \overrightarrow{AT_3} = -R\left(\overrightarrow{v_2} - \vec{c}\right) + \vec{c},\\
\overrightarrow{v_4} &= \overrightarrow{AT_4} = R\left(\overrightarrow{v_3} - \vec{d}\right) + \vec{d}.
\end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_4} &= R\overrightarrow{v_3} - R\vec{d} + \vec{d} = -R^2\,\overrightarrow{v_2} + R^2\vec{c} + R\vec{c} - R\vec{d} + \vec{d}\\
&= -R^3\,\overrightarrow{v_1} + R^3\vec{b} - R^2\vec{b} + R^2\vec{c} + R\vec{c} - R\vec{d} + \vec{d}\\
&= R^4\vec{v} + R^3\vec{b} - R^2\vec{b} + R^2\vec{c} + R\vec{c} - R\vec{d} + \vec{d}\\
&= \vec{v} - R\vec{b} + \vec{b} - \vec{c} + R\vec{c} - R\vec{d} + \vec{d}\\
&= \vec{v} + \left(\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}\right) - R\left(\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}\right).
\end{aligned}$$

Odavde vidimo da je $\overrightarrow{v_4} = \vec{v}$ ako i samo ako je $R\left(\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}\right) = \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$, a to je moguće ako i samo ako je $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$, jer je nul-vektor jedini vektor koji rotacija preslikava u samog sebe. Prema tome, $T_4 = T$ ako i samo ako je $\vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$, a to je ispunjeno točno tada kada je četverokut *ABCD* paralelogram.

Literatura:

1. D. Bakić, Linearna algebra, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
2. O. Bretscher, Linear Algebra with Applications, 5th Edition, Pearson, London, 2013.
3. V. Pop, O. Furdui, Square Matrices of Order 2, Springer International Publishing AG, 2017.