

# Primjena energijskog pristupa na određivanju ravnoteže štapnog sustava

---

Žunabović, Mateo

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:169:809911>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-04**



*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering Repository, University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
RUDARSKO-GEOLOŠKO-NAFTNI FAKULTET  
Preddiplomski studij rudarstva

**PRIMJENA ENERGIJSKOG PRISTUPA NA ODREĐIVANJU RAVNOTEŽE  
ŠTAPNOG SUSTAVA**

Završni rad

Mateo Žunabović

R-4191

Zagreb, 2021.



KLASA: 602-04/21-01/170  
URBROJ: 251-70-03-21-2  
U Zagrebu, 05.07.2021.

**Mateo Žunabović, student**

## RJEŠENJE O ODOBRENJU TEME

Na temelju Vašeg zahtjeva primljenog pod KLASOM: 602-04/21-01/170, UR.BR. 251-70-11-21-1 od 03.05.2021. godine priopćujemo temu završnog rada koja glasi:

### PRIMJENA ENERGETSKOG PRISTUPA NA ODREĐIVANJE RAVNOTEŽE ŠTAPNOG SUSTAVA

Za voditeljicu ovog završnog rada imenuje se u smislu Pravilnika o završnom ispitu izv. prof. dr. sc. Antonia Jaguljnjak - Lazarević, izvanredna profesorica Rudarsko-geološko-naftnog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

**Voditeljica**

(potpis)

Izv. prof. dr. sc. Antonia  
Jaguljnjak-Lazarević

(titula, ime i prezime)

**Predsjednik povjerenstva za  
završne i diplomске ispite**

(potpis)

Doc. dr. sc. Dubravko  
Domitrović

(titula, ime i prezime)

**Prodekan za nastavu i  
studente**

(potpis)

Izv. prof. dr. sc. Dalibor  
Kuhinek

Sveučilište u Zagrebu  
Završni rad  
Rudarsko-geološko-naftni fakultet

## **PRIMJENA ENERGIJSKOG PRISTUPA NA ODREĐIVANJU RAVNOTEŽE ŠTAPNOG SUSTAVA**

Mateo Žunabović

Završni rad je izrađen: Sveučilište u Zagrebu  
Rudarsko-geološko-naftni fakultet  
Zavod za rudarstvo i geotehniku  
Pierottijeva 6, 10 000 Zagreb

### **Sažetak**

U ovom završnom radu su obrađeni pojmovi virtualnog rada, virtualnog pomaka i virtualnih sila kao temelj za određivanje ravnoteže sustava. Kroz primjere na štapnim konstrukcijama se pokazuje primjena ovog principa računanja.

Ključne riječi: virtualni pomak, virtualni rad, štapna konstrukcija

Završni rad sadrži: 18 stranica, 20 slika, 8 referenci.

Jezik izvornika: hrvatski

Završni rad pohranjen: Knjižnica Rudarsko-geološko-naftnog fakulteta, Pierottijeva 6, Zagreb

Mentor: izv. prof. dr. sc. Antonia Jaguljnjak-Lazarević, dipl.ing.

Ocjenjivači: : 1. Dr. sc. Antonia Jaguljnjak-Lazarević, izvanredni profesor RGNF  
2. Dr. sc. Petar Hrženjak, izvanredni profesor RGNF  
3. Dr. sc. Željko Andreić, redoviti profesor u trajnom zvanju RGNF

Datum obrane: 09.07.2021., Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Sveučilište u Zagrebu

## SADRŽAJ

<b>1. UVOD.....</b>	<b>6</b>
<b>2. MEHANIČKI RAD I POTENCIJALNA ENERGIJA.....</b>	<b>7</b>
<b>3. PRINCIP VIRTUALNOG RADA .....</b>	<b>10</b>
3.1. Teorem o virtualnim pomacima.....	10
3.2. Primjena teorema o virtualnim pomacima na primjeru konzole kao štapne konstrukcije .....	11
<b>4. PRORAČUN GREDE NA PRINCIPU VIRTUALNOG RADA .....</b>	<b>15</b>
<b>5. ZAKLJUČAK.....</b>	<b>22</b>
<b>6. LITERATURA .....</b>	<b>23</b>

## POPIS SLIKA

Slika 2-1 Jednostavni slučajevi mehaničkog rada.....	7
Slika 2-2 Prikaz sile na kružnici .....	9
Slika 3-1 Prikaz sila i pomaka na konzoli.....	11
Slika 3-2 Mehanizmi polja virtualnog pomaka.....	12
Slika 3-3 Prikazi tri nezavisna stanja pomaka.....	12
Slika 3-4 Prikaz tri rotacije te spajanje tijela s podlogom.....	13
Slika 3-5 Virtualni pomaci kod unutarnjih sila.....	14
Slika 4-1 Jednostavna greda.....	15
Slika 4-2 Prikaz reaktivnih sila .....	15
Slika 4-3 Shematski prikaz za proračun sile $R_{AH}$ .....	16
Slika 4-4 Shematski prikaz za proračun sile $R_{AV}$ .....	16
Slika 4-5 Shematski prikaz za proračun sile $R_B$ .....	17
Slika 4-6 Shematski prikaz proračuna uzdužnih sila $N$ .....	17
Slika 4-7 Shematski prikaz proračuna poprečnih sila na karakterističnoj točki 1 .....	18
Slika 4-8 Shematski prikaz proračuna poprečnih sila na karakterističnoj točki 2 .....	19
Slika 4-9 Shematski prikaz proračuna momenta savijanja na karakterističnoj točki 1.....	20
Slika 4-10 Shematski prikaz proračuna momenta savijanja na karakterističnoj točki 2....	20
Slika 4-11 Prikaz dijagrama uzdužnih sila $N$ .....	21
Slika 4-12 Prikaz dijagrama poprečnih sila $T_z$ .....	21
Slika 4-13 Prikaz dijagrama poprečnih sila $M_y$ .....	21

## POPIS KORIŠTENIH OZNAKA I JEDINICA

Oznaka	Jedinica	Opis
$W$	J	rad
$\delta, \delta s$	m	virtualni pomak
$\vec{P}, \vec{F}, \vec{N}, \vec{R}$	N	vektor sile
$\vec{d}, \vec{s}, \vec{r}$	m	vektor puta (pomaka)
$\alpha, \varphi$	rad	kutovi
$M, K$	Nm	intenzitet momenata
$l, a, b, c$	m	duljina
$R_B, R_{AV}, F_n$	N	intenzitet sile
$\varphi, \psi$	rad	virtualni kut rotacije

## 1. UVOD

Sustavi koji su u ravnoteži imaju minimalnu potencijalnu energiju. U statici, kao jednom od temeljnih dijelova mehanike, ravnoteža se definira preko sume sila i sume momenata (oko bile koje točke) koje moraju iščeznuti. U energijskom pristupu se uvode pojmovi virtualnog pomaka i virtualnog rada preko kojih se definira potencijalna energija sustava. Kada je ona minimalna, sustav je u ravnoteži.

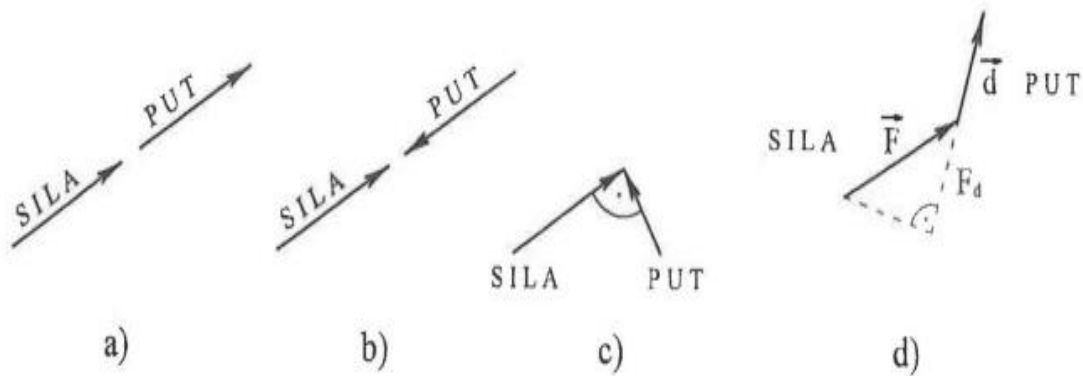
Metoda virtualnog rada je često korisnija za određivanje ravnoteža kompliciranijih sustava, tj. mehanizama, zbog manjeg broja jednadžbi ravnoteže koje treba riješiti u tom slučaju (Građevinski fakultet u Mostaru, 2011.). Uvođenjem virtualnog rada, nasuprot klasičnih metoda ravnoteža koje se koriste za proračune nedeformabilnih krutih tijela, može se izračunati ravnoteža i deformabilnih tijela. Virtualni rad je u svojoj osnovi zamišljen, tj. rad nad pomacima koji jesu mogući ali nisu stvarni (Fresl, 2017.).

U ovom radu, bit će predstavljeni osnovni pojmovi vezani uz rad, tj. potencijalnu energiju, virtualne pomake i sile, kao i primjer izračuna vanjskih i unutarnjih sila uvođenjem virtualnog rada u rješavanje jednadžbi ravnoteže.



## 2. MEHANIČKI RAD I POTENCIJALNA ENERGIJA

Sama definicija mehaničkog rada jest zapravo sila čije se hvatište giba po određenoj putanji, tj. može se kazati da je sila izvršila rad. Slika 2-1 prikazuje jednostavne slučajeve u kojima je vektor sile konstantan, a hvatište sile se pomiče po pravcu (Werner, 2008.).



Slika 2-1 Jednostavni slučajevi mehaničkog rada (Werner, 2008.)

a) Vektor sile se nalazi na pravcu po kojem se giba hvatište, a njegova orijentacija se podudara sa smjerom gibanja; izvršeni mehanički rad je pozitivan i izražava se kao umnožak veličine sile i prijeđenog puta.

b) Vektor sile se nalazi na pravcu po kojem se giba hvatište, ali je njegova orijentacija obrnuta od smjera gibanja. Pritom je izvršen negativan mehanički rad, a određen je umnoškom veličine sile i prijeđenog puta koji daju apsolutni iznos izvršenog rada.

c) Vektor sile je svojim položajem okomit na pravac po kojem se giba hvatište; izvršeni rad jednak je nuli.

d) Vektor sile s pravcem tvori kut po kojem se giba hvatište; ortogonalna projekcija vektora sile na pravac puta se koristi za određivanje rada pa se zatim mehanički rad određuje prema slici a) ili b) (Werner, 2008.).

Formula kojom se računa mehanički rad, a koja obuhvaća sve slučajeve u navedenim skicama, računa se kao skalarni produkt vektora sile i vektora puta:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (2-1)$$

$W \rightarrow$  mehanički rad

$\vec{F} \rightarrow$  vektor sile

$\vec{d} \rightarrow$  vektor puta, tj. pomak

Gibanje hvatišta sile je po nekoj krivulji u općem slučaju, a tijekom gibanja događa se promjena vektora sile po nekoj zakonitosti. Opći slučaj se opisuje kao vektor sile koji je funkcija duljine prevaljenog puta  $s$ . Mehanički rad sile se promatra na određenom malom odsječku puta koji je definiran kao elementarni put i označavamo ga sa  $d\vec{s}$  (Werner, 2008.).

U takvom slučaju, gibanje podrazumijeva gibanje po pravcu te je vektor gibanja konstantan. Rad sile na elementarnom putu nazivamo elementarnim radom te je definiran izrazom:

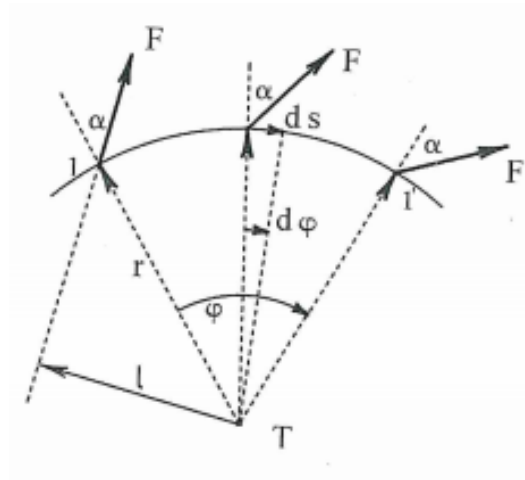
$$dW = \vec{F}(s) \cdot d\vec{s} \quad (2-2)$$

Ukupni rad se računa integriranjem svih elementarnih doprinosa:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s} \quad (2-3)$$

Također, rad se javlja i pri kretanju hvatišta sile po kružnici. U tom su slučaju duljina vektora sile i kut koji vektor sile zatvara s pripadajućim radijusom konstantni (Gross et al., 2009.). Rad je, u tom slučaju, određen izrazom:

$$dW = F \cdot ds \cdot \sin \alpha = F \cdot d\varphi \cdot r \cdot \sin \alpha = F \cdot l \cdot d\varphi = M \cdot d\varphi \quad (2-4)$$



Slika 2-2 Prikaz sile na kružnici (Werner, 2008.)

Međutim, rad sile se može definirati i kao razlika potencijalnih energija u krajnjim točkama. Sila kojoj rad ne ovisi o putu (već samo o početnoj i konačnoj točki) te čiji rad po zatvorenoj putanji iznosi nula naziva se konzervativna sila. Takve sile su gravitacijska i elastična sila. Kada konzervativna sila napravi „rad” na promjeni položaja tijela javlja se potencijalna energija (Jaguljnjak-Lazarević, 2018.). Iz formule za ukupni rad se integriranjem dolazi do rješenja u kojem iz kojeg se očitava da rad konstantne sile ne ovisi o obliku puta između dvije točke, nego samo o krajnjim točkama tog puta:

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \quad (2-5)$$

### 3. PRINCIP VIRTUALNOG RADA

U mehanici, idealna slika stvarnosti predstavlja matematički model. Međutim, taj model nije stvarnost nego je tek dio stvarnosti poslužio za model. Ne moraju nužno postojati stvarni predlošci za elemente modela, kao i za neke pojave i postupke u njemu. Pod utjecajem raznih djelovanja (vanjskih sila, temperaturnih promjena, slijeganje ležajeva...) može se dogoditi stvaran pomak, na kojemu također možemo zamisliti silu. Vršiti li sila tijekom djelovanja rad na pomaku koji je sama uzrokovala ili čijem se razvoju odupire, njezin je rad stvaran. No, ako sila obavlja rad na pomaku izazvanom nekim drugim uzrocima, rad se naziva virtualnim. Virtualni pomak i rad (tj. rad sile na pomaku) su pojave koje zamišljamo. Pomaci se određuju uz uvjete nepromjenjivosti geometrijskih odnosa unutar konstrukcije, a dodatno se pretpostavlja da tijekom tih pomicanja nema promjene vrijednosti stvarnih sila. Isto tako, pravci na kojima se odvija djelovanje sila ostaju usporedni s pravcima na kojima se vršilo djelovanje i prije samog pomicanja. Princip virtualnog rada se temelji na ravnoteži tijela kada je algebarska suma virtualnih radova (sa strane svih sila i momenata koji djeluju na tijelo) jednaka nuli za svaki virtualni pomak tijela (Hibbeler, 2015.), odnosno:

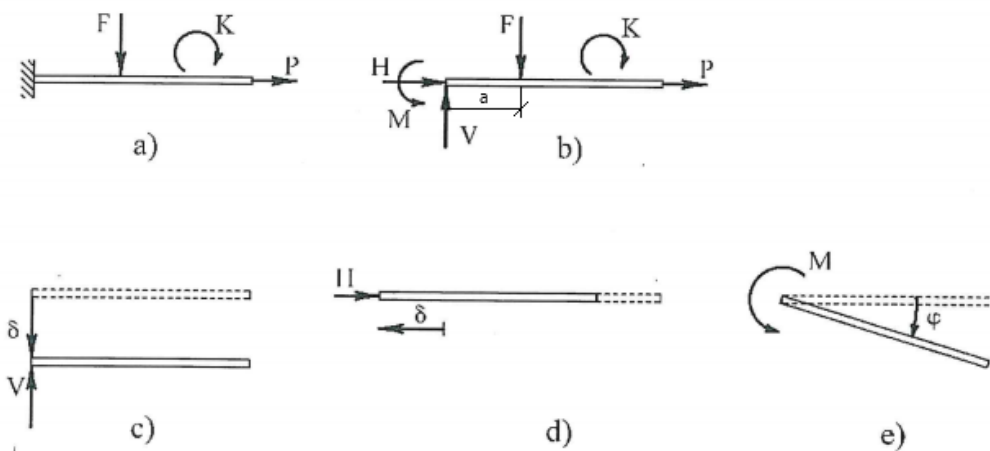
$$\sum \delta W = 0 \quad (3-1)$$

#### 3.1. Teorem o virtualnim pomacima

Virtualni pomak je po svom značenju zamišljeni, ali iščezavajuće mali pomak koji je omogućen vezama u sustavu te koji ne narušava neprekinutost tijela i ležajne uvjete. Označava se kao  $\delta s$  (time se naglašava vremenska neovisnost). On je alternativni iskaz ravnoteže krutog, ali i deformabilnog tijela. Ako se tijelo pod određenim sustavom sila nalazi u ravnoteži, tada je rad vanjskih sila na virtualnim pomacima jednak radu unutarnjih sila. Vrijedi i obratno: ako je rad vanjskih sila na virtualnim pomacima jednak radu unutarnjih sila, tada su one u ravnoteži. To nazivamo teoremom o virtualnim pomacima (Građevinski fakultet u Osijeku, 2020.). Ova metoda se često koristi kod slučajeva mehanizama gdje se pokušava izbjeći rješavanje 6 jednadžbi ravnoteže za svaki pojedini dio unutar sustava. Rješenje u toj metodi se temelji na broju jednadžbi koji je istovjetan stupnjevim slobode zadanog sustava (Građevinski fakultet u Mostaru, 2011.).

### 3.2 Primjena teorema o virtualnim pomacima na primjeru konzole kao štapne konstrukcije

Konzola je štapna konstrukcija koja je upeta s jedne strane. U njoj, osim normalne sile, također postoje i poprečne unutarnje sile, kao i dva momenta savijanja i jedan moment torzije (Jaguljnjak-Lazarević, 2018.). U slučaju ravninskog modela konzole na slici 3-1a, na koju djeluju koncentrirane sile  $F$  i  $P$  te koncentrirani moment  $K$ , javljaju se tri unutarnje sile: uzdužna, poprečna i moment savijanja okomito na ravninu modela.



3-1 Prikaz sile i pomaka na konzoli (Werner, 2008.)

Slika 3-1b prikazuje vanjske (tj. reaktivne) sile te moment u samom ležaju. Na sljedećim slikama su prikazani virtualni pomaci koji služe za određivanje reakcija u spojevima te se pri tom slučaju pretpostavlja uvjet odvojenosti konzole od podloge. Na slici 3-1c se konzola translacija po pravcu sile  $V$  pomoću koje se odredi i sama sila. Praktički isti primjer je prikazan i za silu  $H$  na slici 3-1d. Rotacija težišta rubnog presjeka je potrebna za određivanje momenta u upetom spoju (Werner, 2008.).

**Jednadžbe ravnoteže za rješavanje sila V i H te momenta M:**

1)

$$\delta \cdot V + \delta \cdot F = 0$$

$$V = F \quad (3-2)$$

2)

$$-\delta \cdot H - \delta \cdot P = 0$$

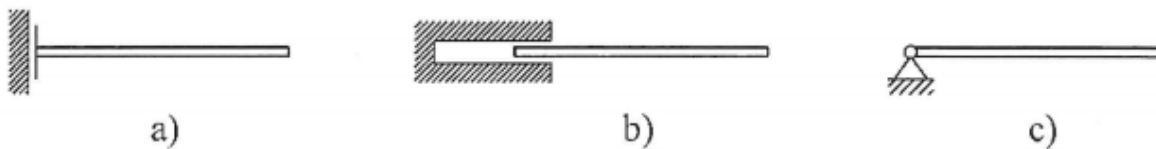
$$H = P \quad (3-3)$$

3)

$$-M \cdot \varphi + F \cdot \varphi \cdot a + K \cdot \varphi = 0$$

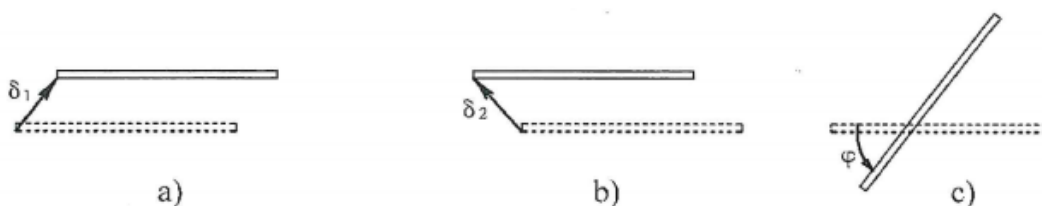
$$M = F \cdot a - K \quad (3-4)$$

Na sljedećim skicama su prikazani mehanizmi koji za traženo djelovanje omogućuju odgovarajuće polje virtualnog pomaka.



Slika 3-2 Mehanizmi polja virtualnog pomaka (Werner, 2008.)

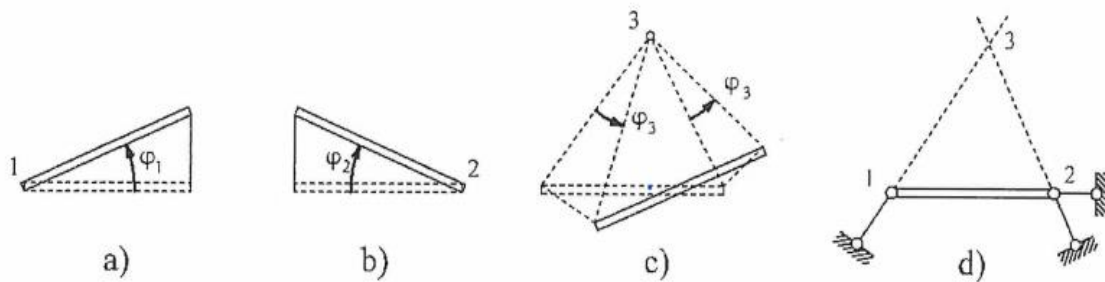
Slika 3-2a prikazuje mehanizam koji omogućuje rad sile V, slika 3-2b rad sile H te 3-2c rad momenta M. Ovakvi načini određivanja stanja pomaka su pogodni jer iz njih proizlaze izrazi u kojima je samo jedna nepoznanica. Za određivanje djelovanja u krutom spoju konzole mogu se odabrati bilo koja tri nezavisna stanja pomaka. Primjeri za takva tri stanja su prikazana na slici 3-3.



Slika 3-3 Prikazi tri nezavisna stanja pomaka (Werner, 2008.)

Kada bismo izjednačili izraze za rad s nulom, dobili bismo tri jednađbe koje ne bi bile nezavisne (u prvoj i drugoj se pojavljuju veličine  $V$  i  $H$ , a u trećoj  $V$  i  $M$ ). Naravno, te jednađbe se mogu riješiti preko sustava jednađbi, ali nam to ne bi bilo jednostavnije od uobičajenih jednađbi ravnoteže. Ovakve, na određeni način nepraktične, jednađbe mogu poslužiti kao svojevrsna kontrola dobivenih rješenja. Možemo povući usporedbu s postavljanjem standardnih uvjeta ravnoteže jer bi se povoljnim izborom osi projekcija i točaka redukcije mogle dobiti i jednostavnije jednađbe za rješavanje (Werner, 2008.).

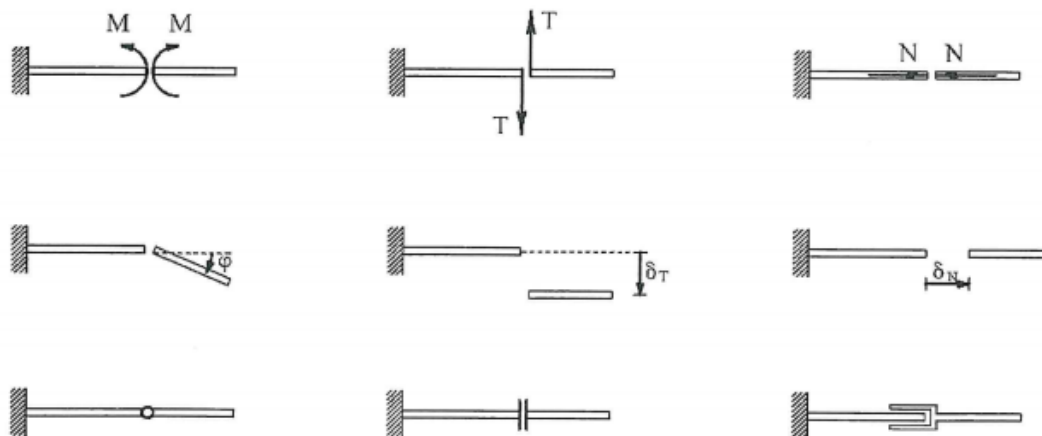
Kada se koriste virtualni pomaci moguće je korištenje odgovarajućeg broja translacija i rotacija. U slučaju konzole su uvedene dvije translacije i rotacija, dok je u slučaju grede nešto drugačiji pristup (2 rotacije i 1 translacija). Međutim, postoji i još jedna mogućnost, a to su 3 nezavisne rotacije. Uvjeti za tu mogućnost su da se na istom pravcu ne smiju nalaziti 3 točke redukcije, kao i da se središta tih rotacija ne smiju biti na istom pravcu (Werner, 2008.).



Slika 3-4 Prikaz tri rotacije te spajanje tijela s podlogom (Werner, 2008.)

Slike 3-4a, 3-4b i 3-4c prikazuju 3 rotacije preko kojih se određuju podaci o silama, tj. o momentima. Jednađbe koje smo dobili su jednake sumama momenata koje su postavljene na središte rotacije. Način spajanja tijela s podlogom pri kojem su tri rotacije pogodne za nezavisno određivanje sila u štapu su prikazane na slici 3-4d (Werner, 2008.).

Također, uz pomoć principa virtualnog pomaka može se odrediti i **unutarnje sile** štapne konstrukcije. U tom slučaju, osim vanjskog opterećenja, rad vrši samo jedna unutarnja sila: moment savijanja ( $M_y$ ), poprečna sila ( $T_z$ ) ili uzdužna sila ( $N_x$ ) preko kojih se određuju polja pomaka (Werner, 2008.).



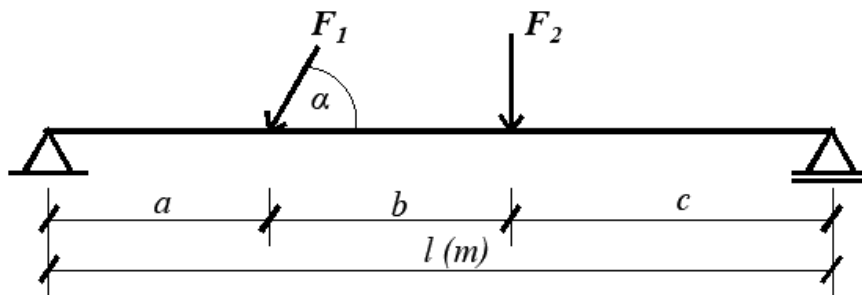
Slika 3-5 Virtualni pomaci kod unutarnjih sila (Werner, 2008.)

U prvom redu slike 3-5 je prikazana konzola s po jednim tipom unutarnje sile, dok se ispod svake nalazi pripadajući virtualni pomak. U posljednjem redu se mogu zamisliti mehanizmi kroz koje se može dobiti traženo polje pomaka. U sljedećem poglavlju, bit će prikazan konkretan proračun štapne konstrukcije na primjeru jednostavne grede koje je nešto složenije (Werner, 2008.).



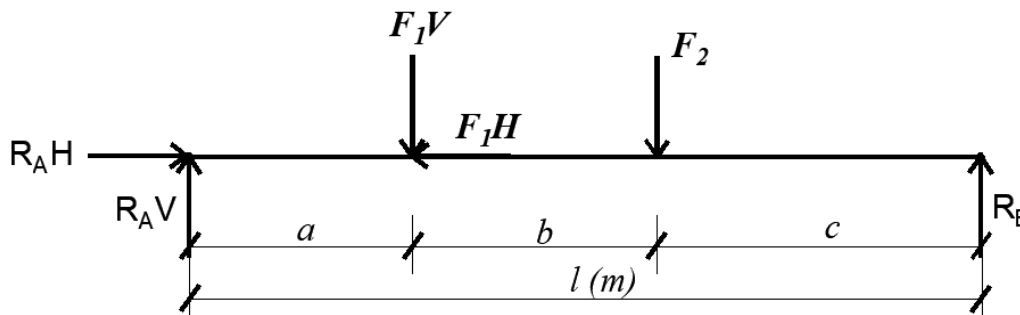
#### 4. PRORAČUN GREDE NA PRINCIPU VIRTUALNOG RADA

Za primjer proračuna je odabrana jednostavna greda, duljine  $l$ , opterećena s dvije koncentrirane sile istog intenziteta, s dodatkom da je sila  $F_1$  nagnuta pod kutom  $\alpha$ . Sve skice u zadatku su izrađene u programu *Autocad* te u internetskom programu *beamguru.com* (BEAMGURU, 2020).



Slika 4-1 Jednostavna greda

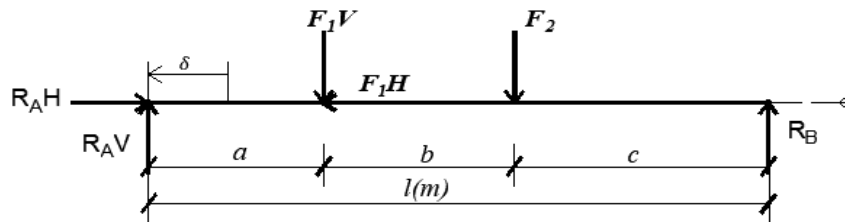
U zadatku se najprije započinje s izračunom reaktivnih sila u ležajima –  $R_A$  (koja je sastavljena od sila  $R_{AH}$  i  $R_{AV}$  te od sile  $R_B$ .



Slika 4-2 Prikaz reaktivnih sila

## Proračun reaktivnih sila

Uvođenjem primjerenog virtualnog pomaka, možemo napraviti skice po kojima ćemo odrediti reaktivne sile. Ako nestane rad sila na virtualnom pomaku, kažemo da je sustav (u ovom slučaju, greda) u ravnoteži.

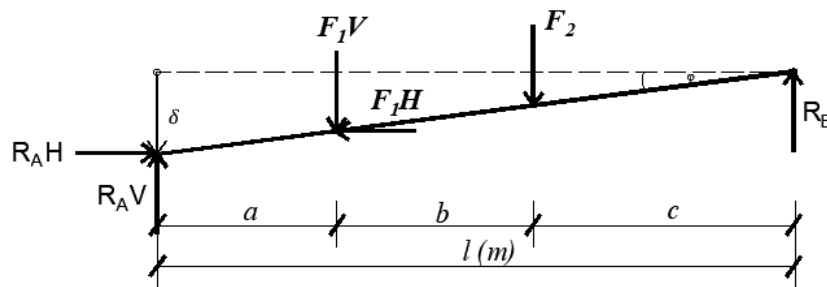


Slika 4-3 Shematski prikaz za proračun sile  $R_{AH}$

### 1.) Proračun sile $R_{AH}$ :

$$R_{AH} \cdot \delta - F_1H \cdot \delta = 0$$

$$R_{AH} = F_1H \quad (4-1)$$

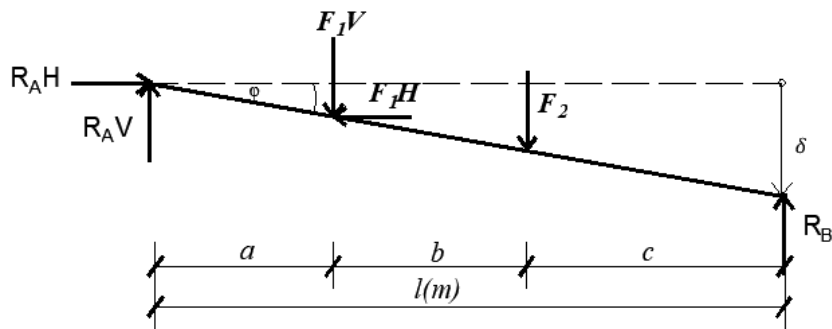


Slika 4-4 Shematski prikaz za proračun sile  $R_{AV}$

### 2.) Proračun sile $R_{AV}$ :

$$R_{AV} \cdot l \cdot \varphi - F_1V \cdot (b+c) \cdot \varphi - F_2 \cdot c \cdot \varphi = 0$$

$$R_{AV} = \frac{F_1V \cdot (b+c) + F_2 \cdot c}{l} \quad (4-2)$$



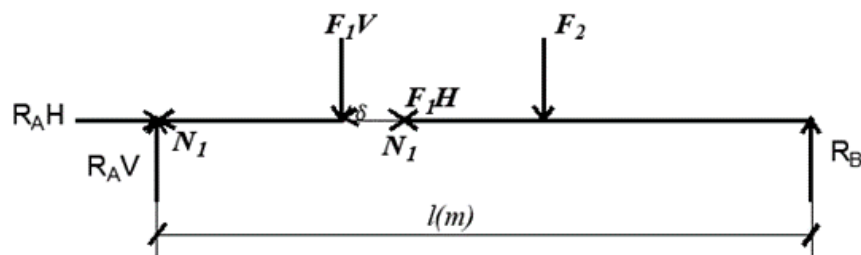
Slika 4-5 Shematski prikaz za proračun sile  $R_B$

3.) Proračun sile  $R_B$ :

$$R_B \cdot l \cdot \varphi - F_1 V \cdot a \cdot \varphi - F_2 \cdot (a + b) \cdot \varphi = 0$$

$$R_B = \frac{F_1 V \cdot a + F_2 \cdot (a + b)}{l} \quad (4-3)$$

Proračun unutarnjih sila – uzdužna sila  $N$



Slika 4-6 Shematski prikaz proračuna uzdužnih sila  $N$

U ovom primjeru javlja se uzdužna sila jedino u karakterističnoj točki djelovanja koncentrirane sile  $F_1$  (s obzirom da djeluje pod kutom) te je nakon toga njen iznos jednak nuli.

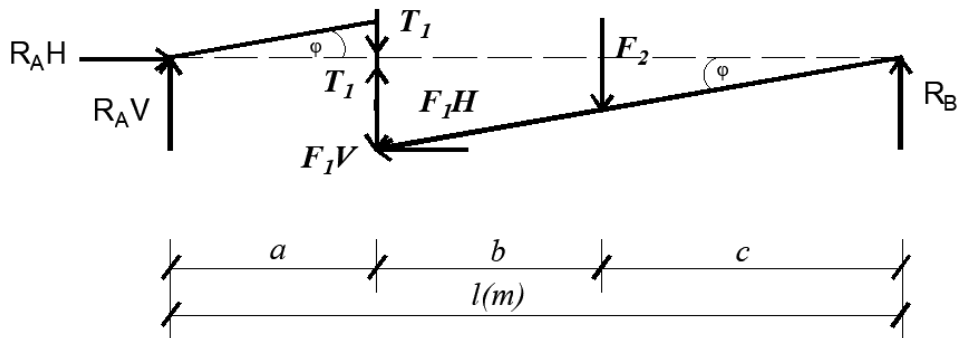
$$N_1 \cdot \delta - F_1 H \cdot \delta = 0$$

$$N_2 \cdot \delta = 0$$

$$N_1 = F_1 H \quad (4-4)$$

$$N_2 = 0 \quad (4-5)$$

**Proračun poprečnih sila  $T_z$**



Slika 4-7 Shematski prikaz proračuna poprečnih sila na karakterističnoj točki 1

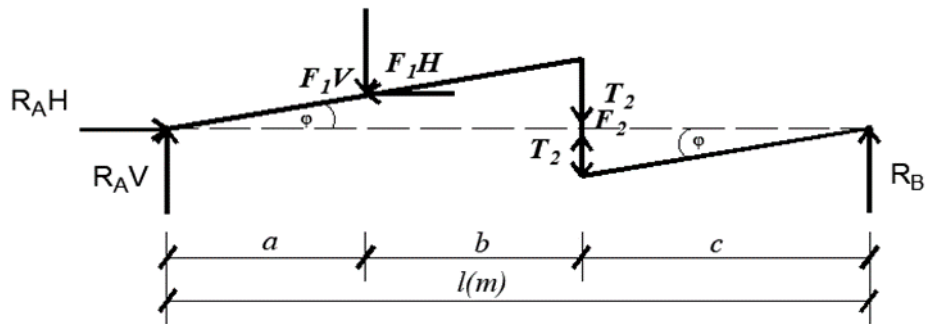
$$T_A \cdot l \cdot \varphi - F_1V \cdot (b+c) \cdot \varphi - F_2 \cdot c \cdot \varphi = 0$$

$$T_A = \frac{F_1V \cdot (b+c) + F_2 \cdot c}{l} \rightarrow R_{AV} \quad (4-6)$$

$$T_1^l = T_A = T_A \cdot l \cdot \varphi - F_1V \cdot (b+c) \cdot \varphi - F_2 \cdot c \cdot \varphi = 0$$

$$T_A = \frac{F_1V \cdot (b+c) + F_2 \cdot c}{l} \rightarrow R_{AV} \quad (4-7)$$

$$\begin{aligned} T_1^d &= R_{AV} - F_1V = \frac{F_1V \cdot (b+c) \cdot \varphi + F_2 \cdot c \cdot \varphi}{l \cdot \varphi} - \frac{F_1V \cdot l \cdot \varphi}{l \cdot \varphi} \\ &= \frac{F_1V \cdot (b+c) + F_2 \cdot c}{l} - \frac{F_1V \cdot (a+b+c)}{l} \\ &= \frac{-a \cdot F_1V + F_2 \cdot c}{l} \end{aligned} \quad (4-8)$$



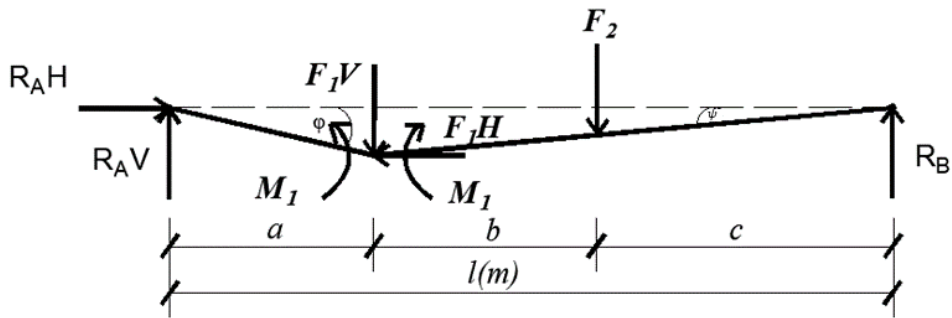
Slika 4-8 Shematski prikaz proračuna poprečnih sila u karakterističnoj točki 2

$$T_2^l = T_1^d = \frac{-a \cdot F_1V + F_2 \cdot c}{l} \quad (4-9)$$

$$\begin{aligned} T_2^d = T_1^d - F_2 &= \frac{-a \cdot F_1V \cdot \varphi + F_2 \cdot c \cdot \varphi}{l \cdot \varphi} - \frac{F_2 \cdot l \cdot \varphi}{l \cdot \varphi} \\ &= \frac{-a \cdot F_1V + F_2 \cdot c}{l} - \frac{F_2 \cdot (a+b+c)}{l} \\ &= \frac{-F_1V \cdot a - F_2 \cdot (a+b)}{l} = -R_B \end{aligned} \quad (4-10)$$

$$T_B = -R_B \quad (4-11)$$

Proračun momenata savijanja  $M_y$



Slika 4-9 Shematski prikaz proračuna momenta savijanja u karakterističnoj točki 1

$$M_A = 0 \quad (4-12)$$

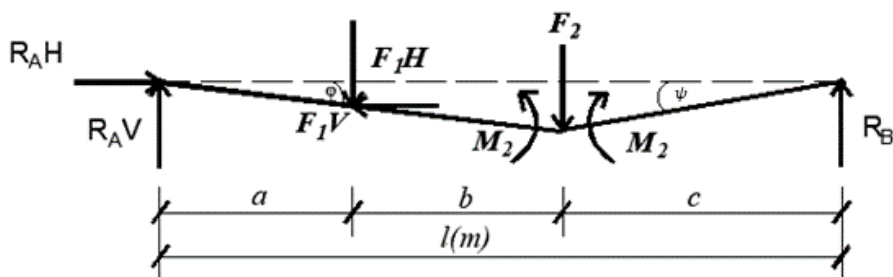
$$M_1 \cdot \varphi + M_1 \cdot \psi - F_1V \cdot \varphi a - F_2 \cdot \psi \cdot (a + b) = 0$$

$$M_1 \cdot \varphi + M_1 \cdot \frac{\varphi a}{b+c} - F_1V \cdot \varphi a - F_2 \cdot \frac{\varphi a}{b+c} \cdot (a + b) = 0$$

$$M_1 + M_1 \cdot \frac{a}{b+c} = F_1V \cdot a + F_2 \cdot \frac{a}{b+c} \cdot (a + b)$$

$$M_1 \cdot \frac{a+b+c}{b+c} = F_1V \cdot a + F_2 \cdot \frac{a}{b+c} \cdot (a + b)$$

$$M_1 = \frac{b+c}{1} [(F_1V \cdot a + F_2 \cdot \frac{a}{b+c} \cdot (a + b))] \quad (4-13)$$



Slika 4-10 Shematski prikaz proračuna momenta savijanja u karakterističnoj točki 2

$$M_2 \cdot \varphi + M_2 \cdot \psi - F_1 V \cdot \varphi a - F_2 \cdot \varphi \cdot (a + b) = 0$$

$$M_2 + M_2 \cdot \frac{a+b}{c} - F_1 V \cdot a - F_2 \cdot (a + b) = 0$$

$$M_2 \cdot \frac{a+b+c}{c} = F_1 V \cdot a + F_2 \cdot (a + b)$$

$$M_2 = \frac{c}{l} [(F_1 V \cdot a + F_2 \cdot (a + b))] \quad (4-14)$$

$$M_B = 0 \quad (4-15)$$

**Dijagrami unutarnjih sila – dijagram uzdužnih sila N**



Slika 4-11 Prikaz dijagrama uzdužnih sila N

**Dijagram poprečnih sila T<sub>Z</sub>**



Slika 4-12 Prikaz dijagrama poprečnih sila T<sub>Z</sub>

**Dijagram momenata savijanja M<sub>y</sub>**



Slika 4-13 Prikaz dijagrama momenata savijanja M<sub>y</sub>

## 5. ZAKLJUČAK

Virtualni rad nam, pomoću uvođenja virtualnog pomaka ili virtualnih sila, omogućava drugačiji način proračuna ravnoteža u sustavima. U ovom radu je, kroz objašnjenje pojmova poput mehaničkog rada, potencijalne energije, štapne konstrukcije, virtualnog pomaka, odnosa virtualnog rada s reaktivnim i vanjskim silama i sl., prikazan jednostavan način računanja ovakvog principa.

Virtualni pomak je, po svojoj definiciji, zamišljeni, mali te vremenski neovisni pomak sustava. Apsolutno je nužno da je malen, da sile ne bi mijenjale svoj pravac. Broj virtualnih pomaka je moguć onoliko koliko stupnjeva slobode ima zadani sustav. Tako možemo izraziti pomake svih točaka sustava. Virtualni rad sile je naziv rada sile kada se uvede virtualni pomak tijela.

Postupak započinje s pretvaranjem sustava u mehanizam koji mijenja svoj oblik virtualnim pomakom. Crtanjem sheme pomaka, možemo točno odrediti silu koju tražimo te izračunati njen iznos, ako se pretpostave teoremi o virtualnim pomacima. Teorem o virtualnim pomacima glasi: ako se tijelo pod određenim sustavom sila nalazi u ravnoteži, tada je rad vanjskih sila na virtualnim pomacima jednak radu unutarnjih sila; dok je teorem o virtualnim silama: ako polja pomaka i deformacija konstrukcije zadovoljavaju sve kinematičke uvjete, onda je rad po volji odabranih vanjskih virtualnih sila na stvarnim poljima pomaka jednak radu unutarnjih virtualnih sila na infinitezimalnim prirastima tih polja.

Princip virtualnog rada je koristan kod složenih sustava gdje nam nije praktično rješavati 6 jednadžbi po svakom tijelu sustava. Njegova najčešća uporaba i jest kod određenih većih mehanizama gdje se mnogo lakše dođe do traženih nepoznanica.



## 6. LITERATURA

Građevinski fakultet u Mostaru, Princip virtualnih radova, 2011., URL: <https://www.yumpu.com/xx/document/read/21425321/princip-virtualnih-radova> (22.09.2020)

FRESL, K. 2017. *Građevna statika I. - poglavlje 9. Virtualni rad*. Zagreb.

WERNER, H. 2008. *Mehanika I, Statika*. Zagreb: Udžbenik Sveučilišta u Zagrebu.

GROSS, D., HAUGER, W., SCHRODER, J., WALL, W. A., RAJAPAKSE, N. 2009. *Engineering Mechanics I, Statics*. Berlin: Springer-Verlag.

JAGULJNJAK – LAZAREVIĆ, A. 2018. *Interna skripta RGN fakulteta iz kolegija Opća mehanika*. Zagreb.

HIBBELER, R.C. 2007. *Engineering mechanics: Statics 11th Edition in SI units*. Singapore: Prentice Hall.

Građevinski fakultet u Osijeku, Teorem rada i energije & kinetička energija, URL: <http://gfosweb.gfos.hr/portal/images/stories/studij/sveucilisni-preddiplomski/gradjevna-statika-ii/energteoremi.pdf> (20.09.2020.)

BEAMGURU, URL: <https://beamguru.com/> (23.09.2020.)