

Utjecaj geometrijskih i materijalnih karakteristika na pomake kratke konzole

Jerečić, Elizabeta

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:169:330671>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-21**



Repository / Repozitorij:

[Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering Repository, University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
RUDARSKO-GEOLOŠKO-NAFTNI FAKULTET
Diplomski studij rudarstva

**UTJECAJ GEOMETRIJSKIH I MATERIJALNIH KARAKTERISTIKA NA
POMAKE KRATKE KONZOLE**

Diplomski rad

Elizabeta Jerečić

R4299

Zagreb, 2024



KLASA: 602-01/24-01/112
URBROJ: 251-70-11-24-2
U Zagrebu, 20.9.2024

Elizabeta Jerečić, studentica

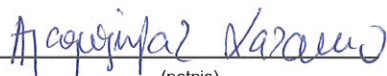
RJEŠENJE O ODOBRENJU TEME

Na temelju vašeg zahtjeva primljenog pod KLASOM 602-01/24-01/112, URBROJ: 251-70-11-24-1 od 26.06.2024. priopćujemo vam temu diplomskog rada koja glasi:

UTJECAJ GEOMETRIJSKIH I MATERIJALNIH KARAKTERISTIKA NA POMAKE KRATKE KONZOLE


Za voditeljicu ovog diplomskog rada imenuje se u smislu Pravilnika o izradi i obrani diplomskog rada izv.prof.dr.sc. Antonia Jaguljnjak Lazarević nastavnik Rudarsko-geološko-naftnog-fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

Voditelj


(potpis)

izv.prof.dr.sc. Antonia Jaguljnjak
Lazarević
(titula, ime i prezime)

Predsjednik povjerenstva za
završne i diplomske ispite:


(potpis)

Izv.prof.dr.sc. Mario Klanfar
(titula, ime i prezime)

Prodekan za nastavu i studente:


(potpis)

Izv.prof.dr.sc. Borivoje
Pašić
(titula, ime i prezime)

UTJECAJ GEOMETRIJSKIH I MATERIJALNIH KARAKTERISTIKA NA POMAKE KRATKE
KONZOLE

Elizabeta Jerečić

Rad izrađen: Sveučilište u Zagrebu
Rudarsko-geološko-naftni fakultet
Zavod za rudarstvo i geotehniku
Pierottijeva 6, 10 000 Zagreb

Sažetak

Rad istražuje utjecaj geometrijskih i materijalnih karakteristika na pomake kratke konzole. U teorijskom dijelu obrađene su ključne postavke teorije elastičnosti te Euler-Bernoulli-Navierova i Timošenkova teorija savijanja grede, kao i Airyjeva funkcija naprezanja za ravninsko stanje. Cilj rada je usporediti pomake konzole dobivene primjenom ovih teorija te istražiti utjecaj posmičnih naprezanja na progibe. Praktični dio rada obuhvaća analitički proračun pomaka konzole opterećene koncentriranom silom na slobodnom kraju. Rezultati pokazuju da na doprinos posmična naprezanja ukupnom progibu značajano utječu geometrijske karakteristike dok su utjecaji materijalnih karakteristika minimalni.

Ključne riječi: Hookeov zakon, materijalna i geometrijska linearnost, Euler-Bernoulli-Navierova teorija savijanja grede, Timošenkova teorija savijanja grede, ravninsko stanje naprezanja

Diplomski rad sadrži: 32 stranice, 7 tablica, 25 slika i 10 referenci.

Jezik izvornika: Hrvatski

Pohrana rada: Knjižnica Rudarsko-geološko-naftnog fakulteta, Pierottijeva 6, Zagreb

Mentorica: Dr. sc. Antonia Jaguljnjak Lazarević, izvanredna profesorica RGNF

Ocjenjivači: Dr. sc. Antonia Jaguljnjak Lazarević, izvanredna profesorica RGNF
Dr. sc. Tanja Mališ, docentica RGNF
Dr. sc. Petar Hrženjak, izvanredni profesor RGNF

THE INFLUENCE OF GEOMETRICAL AND MATERIAL CHARACTERISTICS ON
DISPLACEMENTS OF A SHORT CANTILEVER

Elizabeta Jerečić

Thesis completed at: University of Zagreb
Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering
Department of Mining Engineering and Geotechnics
Pierottijeva 6, 10 000 Zagreb

Abstract

This thesis explores the influence of geometrical and material characteristics on the displacements of a short cantilever. The theoretical part covers fundamental assumptions of elasticity theory, as well as Euler-Bernoulli-Navier and Timoshenko beam theories, and Airy's stress function for plane stress conditions. The aim of the study is to compare the cantilever's displacements obtained using these theories and examine the effect of shear stress on deflections. The practical part includes analytical calculations of cantilever displacements under a concentrated load at its free end. The results show that geometrical characteristics significantly affect the contribution of shear stresses to the total deflection, while the effects of material characteristics are minimal.

Keywords: Hooke's law, material and geometrical linearity, Euler-Bernoulli-Navier beam theory, Timoshenko beam theory, plane state of stress

Thesis contains: 32 pages, 7 tables, 25 figures i 10 references.

Original in: Croatian

Archived in: Library of Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering, Pierottijeva 6, Zagreb

Supervisors: Associate Professor, Antonia Jaguljnjak Lazarević, PhD

Reviewers: Associate Professor, Antonia Jaguljnjak Lazarević, PhD
Assistent Professor Tanja Mališ, PhD
Associate Professor, Petar Hrženjak, PhD

SADRŽAJ

1. UVOD	1
2. POVIJESNI OGLED I TEMELJNE PRETPOSTAVKE TEORIJE ELASTIČNOSTI	2
2.1. Materijalni kontinuum	4
2.2. Geometrijska linearnost	7
2.3. Materijalna linearnost	9
3. TEORIJE SAVIJANJA GREDE	10
3.1. Euler -Bernoulli-Navierova teorija savijanja grede	11
3.1.1. Geometrijska analiza.....	13
3.1.2. Statička analiza	15
3.1.3. Progib desne konzole prema EBN teoriji	17
3.2. Timošenkova greda.....	20
3.2.1. Progib desne konzole prema Timošenku	21
3.3. Rješenje polja pomaka za desnu konzolu iz uvjeta ravninskog stanja naprezanja	22
4. USPOREDBA REZULTATA	26
5. ZAKLJUČAK.....	30
6. LITERATURA	32

POPIS SLIKA

Slika 2-1. Greda upeta na jednom kraju te opterećena na slobodnom kraju (konzola) (Granger, 1648)	2
Slika 2-2. Uzdužne vlačne sile na mjestu upetosti prema: a) Galileju, b) Mariotteu	3
Slika 2-3. Shematski prikaz osi i poprečnih presjeka grede opterećene na savijanje.....	3
Slika 2-4. Primjeri prirodnih materijala.....	5
Slika 2-5. Primjeri industrijskih materijala.....	6
Slika 2-6. Prikaz translacije i rotacije nepridržanog krutog tijela	7
Slika 2-7. Vektorski prikaz pomaka nepridržanog deformabilnog tijela.....	8
Slika 2-8. Grafički prikaz modela materijalne linearnosti (Hookeov zakona)	10
Slika 3-1. Primjer čistog savijanja i savijanja silama	12
Slika 3-2. Greda s prepustom: primjer čistog savijanja i savijanje silama	13
Slika 3-3. Dio nosača: a) prije deformacije, b) poslije deformacije	14
Slika 3-4. Prikaz unutarnjih sila i naprezanja	15
Slika 3-5. Odabrani koordinatni sustav i predznaci (Šimić, 1992., p. str. 415.).....	16
Slika 3-6. Prikaz statičkog sustava	17
Slika 3-7. Prikaz dijagrama unutarnjih sila: a) slika položaja, b) poprečna sila, c) moment savijanja	18
Slika 3-8. Prikaz elastične linije i poprečnog presjeka nosača	18
Slika 3-9. Prikaz posmičnih naprezanja, (Šimić,471.str., 1992.)	20
Slika 3-10. Desna konzola, opterećenje i geometrija	23
Slika 3-11. Prikaz deplanacije poprečnog presjeka za a) grupu rubnih uvjeta.....	24
Slika 3-12. Prikaz deplanacije poprečnog presjeka za b grupu rubnih uvjeta.....	25
Slika 4-1. Točke s najvećim vrijednostima pomaka.....	26
Slika 4-2. Vrijednosti za kamen	27
Slika 4-3. Vrijednosti za drvo.....	28
Slika 4-4. Vrijednosti za staklo	29
Slika 4-5. Vrijednosti za čelik	29
Slika 5-1. Porast progiba zbog utjecaja posmičnog naprezanja (Jaguljnjak Lazarević, et al., (2024)	31

POPIS TABLICA

Tablica 3-1. Intenziteti unutarnjih sila u karakterističnim točkama konzole	18
Tablica 3-2. Dvije grupe rubnih uvjeta.....	23
Tablica 4-1. Materijalne karakteristike.....	26
Tablica 4-2. Rješenja za kamen	27
Tablica 4-3. Rješenja za drvo	28
Tablica 4-4. Rješenja za staklo	28
Tablica 4-5. Rješenja za čelik.....	29
Tablica 5-1. Postotak povećanja progiba slobodnog kraja konzole zbog posmične deformacije (Jaguljnjak Lazarević, et al., (2024)).....	31

POPIS KORIŠTENIH OZNAKA I JEDINICA

Oznaka	Jedinica	Opis
A	m^2	površina poprečnog presjeka
b	m	širina poprečnog presjeka
c	m	polovica visine poprečnog presjeka
$C_1, C_2,$	-	konstante integracije
\vec{d}	m	vektor pomaka
E	N/m^2	Youngov modul elastičnosti
F, R_A	N	intenzitet vanjske sile (aktivne i reaktivne)
G	N/m^2	modul posmika
h	m	visina poprečnog presjeka
\vec{i}, \vec{j} i \vec{k}	-	jedinični vektori (ortovi) u pravcu koordinatnih osi
I_y	m^4	moment tromosti oko osi y
k'	-	bezdimenzijski faktor
l	m	duljina
M_y	Nm	moment savijanja
M_A	Nm	reaktivni moment
\vec{r}	m	vektor položaja
S_y	m^3	statički moment površine poprečnog presjeka s s obzirom na os y
T_z	N	poprečna sila
u, v i w	m	komponente pomaka
x, y, z	-	koordinatne osi
α	rad	nagib tangente na elastičnu liniju (kut zaokreta)
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	-	relativne duljinske deformacije u smjeru osi x, y, z
$2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx}$	-	relativne kutne deformacije u ravnini
$\sigma, \sigma_x, \sigma_z$	N/m^2	normalna naprezanja
$\tau, \tau_{xz}, \tau_{zx}$	N/m^2	posmična naprezanja
ρ	m	polumjer zakrivljenosti
Φ	N	Airyjeva funkcija naprezanja

1. UVOD

Odabir matematičkog modela za predviđanje ponašanja stvarnog deformabilnog tijela pod opterećenjem temeljni je korak u inženjerskim proračunima. Pri tome uvodimo niz aproksimacija i idealizacija kojima se neizbježno udaljavamo od realnog (fizikalnog) problema pa možemo reći da se njegov matematički ekvivalent temelji na nužnim pogreškama. Iz toga slijedi da stvaranje dobrog proračunskog modela uključuje pojednostavljivanje realnog problema koliko god je to moguće, a da se pritom dobiju pouzdani i jasni rezultati (Jaguljnjak Lazarević, et al., 2024).

Većina problema u mehanici čvrstih tijela rješavaju se unutar okvira linearne teorije elastičnosti. Usvajanje materijalne i geometrijske linearizacije kontinuuma rezultira matematičkom formulacijom koju predstavlja 15 parcijalnih diferencijalnih jednadžbi: šest kinematičkih jednadžbi, tri uvjeta ravnoteže i šest konstitutivnih jednadžbi. Za određeni oblik tijela i rubne uvjete, sustav se rješava metodom sila, metodom pomaka ili mješovitim pristupom. Ovisno o odabiru metode dobiva se rješenje za polja pomaka, deformacija i naprezanja (Jaguljnjak Lazarević, et al., 2024). S obzirom da se radi o složenom sustavu jednadžbi, analitičko rješenje može se naći samo za vrlo malo praktičnih problema. Ukoliko sustav jednadžbi nema analitičko rješenje, problem rješavamo numerički pri čemu uvodimo sljedeću bitnu aproksimaciju – diskretizaciju. To nam omogućava da formuliramo linearni sustav algebarskih jednadžbi kojeg rješavamo numeričkim metodama.

Svaki od navedenih koraka modeliranja i proračuna uvodi pogreške koje možemo podijeliti na neizbježne i pogreške nastale zbog loše odabranog proračunskog modela i uvedenih pretpostavki (Dvornik i Lazarević, 2005., Jaguljnjak Lazarević, et al., 2011.) Iz tog razloga potrebno je dobro poznavati primjere kod kojih možemo usporediti analitičke i numeričke rezultate s eksperimentalnim ispitivanjima. Takve primjere nazivamo benchmarkom – oglednim primjerom za provjeru proračunskih modela (Dvornik, et al., 2020).

Ovaj rad prikazuje jedan od takvih primjera: konzolni nosač opterećen poprečnom silom na kraju raspona. S obzirom da se radi o linearnom problemu i statički određenom sistemu proračun unutarnjih sila provodi se na nedoformiranom nosaču i neovisan je od geometrijskih i konstitutivnih jednadžbi (Jaguljnjak Lazarević, et al., 2024). Analitička rješenja pomaka, deformacija i naprezanja za ovaj primjer su poznata: Euler-Bernoulli-Navier (Šimić, 1992.), Timošenkova greda (Šimić, 1992.) i rješenje Airyve funkcije

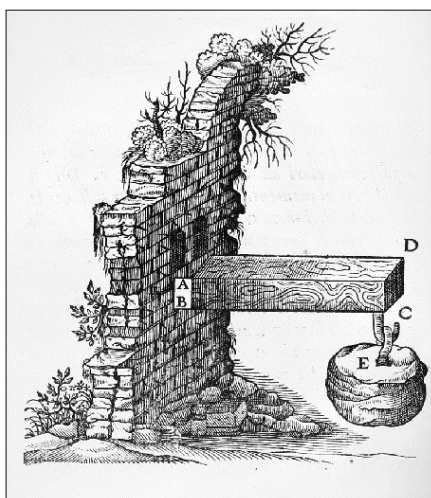
naprezanja za ravninsko stanje. Odabir rješenja ovisi o omjeru raspona nosača l i visine poprečnog presjeka h .

2. POVIJESNI OGLEDE I TEMELJNE PRETPOSTAVKE TEORIJE ELASTIČNOSTI

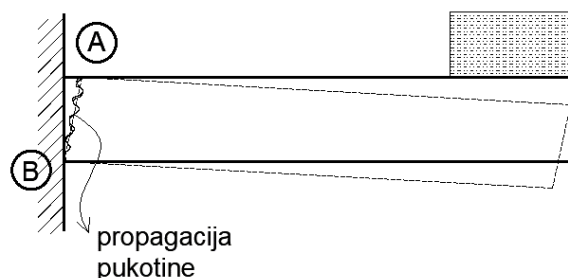
Greda ili gredni nosač je konstruktivni element kojemu su poprečne dimenzije male u odnosu na njegovu uzdužnu dimenziju te služi za prenošenje proizvoljnog opterećenja na oslonce (ležajeve). Pri tome, ovisno o njezinoj namjeni, os grede može biti ravna ili zakrivljena, a poprečni presjek konstantan ili promjenjiv.

Kroz povijest, inženjere je zanimalo kolike moraju biti dimenzije grede kako bi ona na sebe mogla preuzeti željeni teret, odnosno opterećenje, a da pritom ne dođe do velikih deformacija ili u konačnici do sloma. U početku rješenje ovoga problema temeljilo se na iskustvu stečenom postupcima pokušaja i promašaja. Poopćenje uspješnih rješenja koje bi definiralo proceduru proračuna većinom je bilo netočno i komplicirano zbog nedovoljnog poznavanja mehanizma prijenosa vanjskih sila odnosno načina na koji materijal reagira na opterećenje.

Bilo je potrebno preko 400 godina dok se nije došlo do konačnih izraza po kojima se opisuje savijanje grede. Početak analitičkog pristupa savijanju grede veže se uz razmatranja Galilea Galileija (1564. - 1642.) i Edmea Mariottea (1620. - 1684.). Galileo je uočio da greda upeta na jednom kraju te opterećena na slobodnom kraju, razvija pukotine na mjestu upetosti kao što je prikazano na donjoj slici (Slika 2-1):



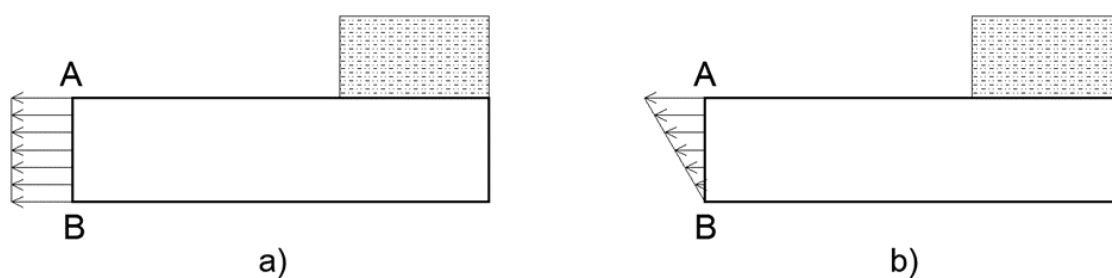
a) Galilejeva drvena greda



b) Shematski prikaz Galileovog razmatranja grede

Slika 2-1. Greda upeta na jednom kraju te opterećena na slobodnom kraju (konzola) (Granger, 1648)

Iako je opis djelovanja opterećenja na mjestu upetosti i mehanizam nastanka pukotine bilo točno, tumačenje zašto do toga dolazi, odnosno vrsta i raspored unutarnjih sila bilo je pogrešno. Naime, oba znanstvenika smatrala su da se u gredi javljaju samo uzdužne vlačne sile, prema Galileju jednakog intenziteta, a prema Mariotteu linearno promjenjivog s maksimumom u točki A i nulom u točki B (Slika 2-2):



Slika 2-2. Uzdužne vlačne sile na mjestu upetosti prema: a) Galileju, b) Mariotteu

Sljedeći veliki korak napravio je švicarski znanstvenik Jacob Bernoulli (1654. - 1705.), koji se nije bavio raspodjelom naprezanja po visini poprečnog presjeka, ali je ustanovio da ukoliko zadržimo poprečne presjeke nosača **ravnima i okomitima na deformiranu os grede** (Slika 2-3):



Slika 2-3. Shematski prikaz osi i poprečnih presjeka grede opterećene na savijanje

zakrivljenost osi možemo definirati kao:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I}, \quad (2-1)$$

gdje su: ρ – polumjer zakrivljenosti, M - moment savijanja, E - Youngov modul elastičnosti i I - geometrijska karakteristika poprečnog presjeka (moment tromosti).

S obzirom da se zakrivljenost ravninske krivulje $y = f(x)$ računa prema formuli:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2-2)$$

u kojoj se pojavljuje osim same funkcije i njezina druga derivacija, izraz (2-1) predstavlja diferencijalnu jednadžbu.

Rješenje diferencijalne jednadžbe elastične linije grede opterećene na savijanje zajednički su dali nećak Jacoba Bernoullija, Daniel Bernoulli (1700. - 1782.) i Leonard Euler (1707. - 1783.). Iako je njihovo rješenje bilo točno, trebalo je proći gotovo cijelo stoljeće dok se nije krenulo primjenjivati u inženjerstvu.

Pretpostavku da poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na deformiranu os nosača nazivamo Euler-Bernoulli-Navierova pretpostavka. Osim nje, pri izvodu diferencijalne jednadžbe (2-1) koristi se još jedna važna pretpostavka, a to je da se nalazimo u području linearno elastičnog modela ponašanja materijala tj. Hookeovog zakona.

Robert Hook (1635. - 1703.), britanski fizičar i matematičar svojim je zakonom opruge, koji kaže da je sila proporcionalna produljenju, 1678. godine udario temelje Teorije elastičnosti (TE). Zakon koji danas nazivamo Hookeovim zakonom (Hooke's law) opisuje elastičnu (reverzibilnu) deformaciju tijela pod naprežanjem izazvanog opterećenjem. Faktor proporcionalnosti je već spomenuti Youngov modul elastičnosti E koji je karakterističan za pojedini materijal.

Obje navedene pretpostavke oslanjaju se na temeljnu aproksimaciju mehanike kojom realnu čestičnu materiju zamjenjujemo pojmom neprekinute sredine. Zbog toga je potrebno prije nego li uopće krenemo s proračunima naših konstrukcija i postavljanja teorija, opisati cijeli niz idealiziranih pojednostavljenja koja uvodimo jer cijelom egzaktnom znanošću dominira zamisao aproksimacije (Dvornik, et al., 2020). Sve što ću spomenuti u ovome radu bazira se na jednoj vrlo važnoj pretpostavci, a to je kontinuum.

2.1. Materijalni kontinuum

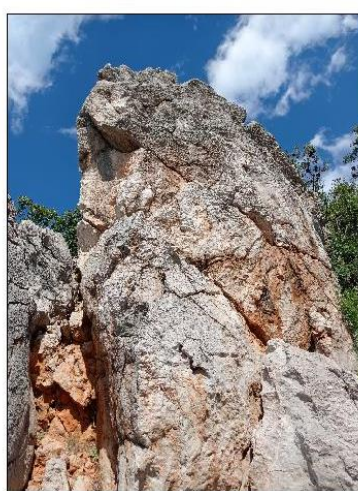
Razvojem matematike, Newtonove teorijske mehanike i ostalih grana fizike, a pogotovo matematičke fizike, postavljene su osnovne diferencijalne jednadžbe koje su inženjerima uvelike pomogle opisati realne fizičke procese. Da bi to mogli bilo je potrebno uvesti pojam materijalnog **kontinuum**a. Znanstvena disciplina koja razvija matematički model proračuna na temelju kontinuum naziva se mehanika kontinuum. Kontinuum je zapravo materijalna neprekinuta i beskonačno djeljiva sredina. Takav pristup je daleko od stvarnog, ali omogućava primjenu postupaka matematičke analize (integrali i derivacije) i promatranje

veličina u samo jednoj točki kontinuuma. Nadalje u većini slučajeva smatramo da je kontinuum homogen i izotropan, odnosno da ima jednaka fizička i mehanička svojstva u svim točkama te da su mu svojstva u svim smjerovima jednaka što bi se još moglo reći da je kontinuum jednoličan (Dvornik, et al., 2020).

Međutim znamo da realna materija u stvarnosti nije takva te da diskontinuiteti i čestičnost materije svakako postoje. Pogledajmo na sljedećim slikama primjer drva, kamena i tla kao prirodnog materijala (Slika 2-4.) te betona i čelika kao industrijskog materijala (Slika 2-5.).



drvo



stijena



tlo

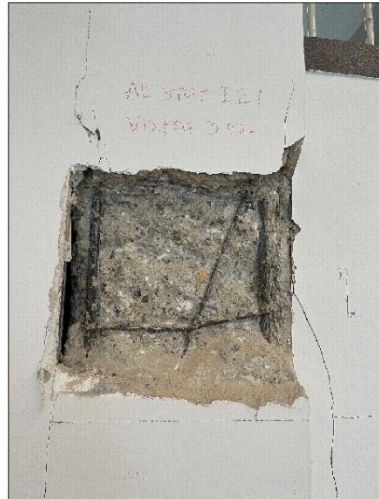
Slika 2-4. Primjeri prirodnih materijala

Drvo kao što vidimo sadrži vlakna, godove, kvрге i pukotine. Svojstva su mu bitno različita u smjeru vlakana. Drvo nam je savršen primjer anizotropnog i kompozitnog materijala.

Stijene su nakupine jednog ili više minerala, njezine konačne strukturne značajke određene su tektonskim procesima, dok procesi trošenja određuju konačne fizikalno mehaničke značajke materijala i mase stoga su u većini slučajeva heterogene i anizotropne (Hrženjak, 2009). Stijena na slici 2-4. fotografirana je u podnožju Velebita (okolica Karlobaga).

Također i na primjeru tla vidimo nejednoličnu raspodjelu materije. Tlo je skupina čestica različitog oblika i veličine, ono sadrži slojeve različitog prostiranja, debljine, sastava, osobina, čvrstoće i stišljivosti. Realno tlo je nelinearno elastičan materijal s povratnim deformacijama pri rasterećenju. Tlo ima složenu vezu naprezanja i deformacija pa se inženjerski problemi u mehanici tla rješavaju dvojako: za računanje deformacija pri

naprezanjima pretpostavlja se da je materijal idealno elastičan, a kod računanja sloma i stabilnosti uzima se da je materijal kruto plastičan (Nonveiller, 1981). Primjer tla kao prirodnog materijala na slici 2-4. fotografiran je na otoku Pagu.



beton



čelik

Slika 2-5. Primjeri industrijskih materijala

Heterogenost betona (Slika 2-5.) vidimo na primjeru armirano betonskog stupa koji sadrži agregat različitih oblika i veličina, cement i armaturu. Uz to često dolazi do nakupljanja većih zrna na dnu oplata što pridonosi nejednolikoj distribuciji agregata po volumenu. Fotografija je iz visokog prizemlja zgrade AGG fakulteta.

Čelik (Slika 2-5.) u odnosu na spomenute materijale smatramo homogenim i izotropnim na razini uzorka, no u strukturnoj rešetci pravilno raspoređeni kristali tvore anizotropiju. Prilikom tehnološke obrade dovode se nečistoće i mjehurići zraka u blokove čelika.

Po svemu sudeći, svi materijali oko nas ne ispunjavaju pretpostavke modela kontinuuma no zanimljivo je da se analitička i numerička rješenja velikoga broja diferencijalnih jednadžbi temeljenih na kontinuumu poklapaju sa rezultatima pokusa što nam govori da čak ako ga pretpostavimo za izrazito diskontinuiran materijal poput šljunka dat će nam zadovoljavajuće rezultate (Dvornik, et al., 2020).

Znanstvenu disciplinu koja se bavi razvojem proračunskih modela temeljenih na pojmu kontinuuma nazivamo mehanikom kontinuuma. Dijelimo ju na mehaniku fluida i mehaniku čvrstih tijela koja obuhvaća *mehaniku elastičnih tijela*, *mehaniku plastičnih tijela* te *mehaniku viskoelastičnih tijela*.

Mehanika elastičnih tijela obuhvaća područja linearne i nelinearne teorije elastičnosti te probleme elastične stabilnosti. Predstavlja skup specifičnih zadataka i njihovih rješenja koja se temelje na općim uvjetima ravnoteže ili gibanja, kinematičkim ili geometrijskim jednadžbama, konstitutivnim ili materijalnim jednadžbama te uvjetima kompatibilnosti ili neprekinutosti.

U našim razmatranjima ograničit ćemo se samo na zadatke iz statike za koje vrijede sljedeći uvjeti:

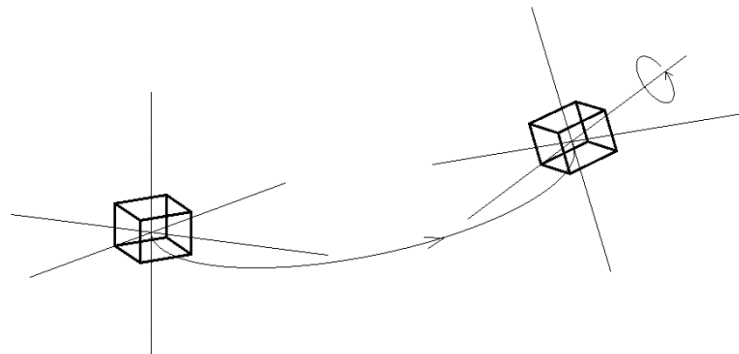
1. deformacije tijela (grede) su relativno male i linearno povezane s derivacijama pomaka - to se naziva **geometrijska linearnost**
2. postoji linearna ovisnost između elastičnih deformacija i naprezanja (Hookeov zakon) - to se naziva **materijalna linearnost**.

Osim materijalne i geometrijske linearnosti pretpostavit ćemo da je riječ o homogenom i izotropnom kontinuumu te da prilikom proračuna unutarnjih i vanjskih sila možemo koristiti princip superpozicije.

Navedene pretpostavke proračuna nazivamo **teorijom I. reda** prema kojoj jednadžbe ravnoteže možemo postavljati na nedeformiranom sustavu jer su deformacije toliko male da ne utječu na točnost proračuna vanjskih i unutarnjih sila. Teoriju prvoga reda nazivamo još i **linearnom teorijom elastičnosti**.

2.2. Geometrijska linearnost

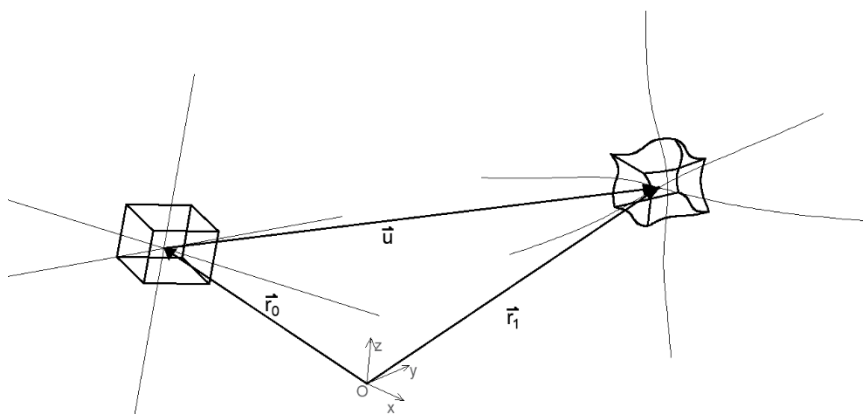
Postoje dva temeljna načina gibanja tijela: promjena položaja tijela bez deformacija koje nazivamo gibanje krutog tijela te promjena položaja uz deformaciju koje nazivamo gibanje deformabilnog tijela. Kod gibanja tijela kao krutog tijela ne dolazi do promjene udaljenosti između točaka tijela odnosno međusobne udaljenosti i kutovi su sačuvani. Po volji odabrana kocka unutar tijela ostaje istog oblika i dimenzija (Slika 2-6.).



Slika 2-6. Prikaz translacije i rotacije nepridržanog krutog tijela

U tom slučaju gibanje tijela možemo prikazati superpozicijom pravocrtnog i/ili krivocrtnog translacijskog gibanja i rotacijom oko neke osi.

Kod gibanja deformabilnog tijela, translaciju i rotaciju prati pojava promjene duljine i kuta između proizvoljno odabranih dužina u tijelu. Relativne promjene duljine i/ili kuta nazivamo duljinske i/ili kutne deformacije. Proizvoljno odabrani kvadrat tada mijenja i oblik i dimenzije. Ovo gibanje nam je u izravnoj vezi sa silama koje nastaju unutar tijela te primjenom modela kontinuuma novi položaj tijela u potpunosti je određen vektorima pomaka u odnosu na početni položaj. Smatramo da je na području tijela definirano vektorsko polje pomaka (Slika 2-7.):



Slika 2-7. Vektorski prikaz pomaka nepridržanog deformabilnog tijela

Vektor pomaka \vec{u} polja neke točke možemo prikazati razlikom dvaju uzastopnih vektora položaja \vec{r}_0 i \vec{r}_1 , s početkom u ishodištu O nepomičnog koordinatnog sustava. Definiranjem koordinatnih smjerova x , y , z vektore možemo prikazati skalarnim komponentama pa za vektor pomaka vrijedi:

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

gdje su u , v i w komponente, a \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} jedinični vektori (ortovi) u pravcu koordinatnih smjerova. Vektori i komponente postaju funkcije koordinata pa možemo pisati i $\vec{u}(x, y, z)$ ili za prvu komponentu $u(x, y, z)$. Općenito, razlikujemo tri osnovna slučaja: veliki pomaci i deformacije, veliki pomaci i male deformacije, te mali pomaci i deformacije.

U našoj uobičajenoj inženjerskoj praksi zanimljivi su slučajevi kada imamo pravilno pridržano tijelo velike krutosti i opterećenje koje nije preveliko. Tada se pomaci mogu realizirati samo kao posljedica deformacija koje su puno manji od dimenzija tijela pa su relativne dužinske deformacije i kutovi zaokreta mali prema jedinici (Dvornik, et al., 2020). Pri tome je deformacija jednaka derivaciji polja pomaka. Točke pomaka možemo razviti u

Taylorov red ako ih promatramo u bliskoj okolini (Dvornik, et al., 2020) pa tako relativna duljinska deformacija u smjeru osi x glasi:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (2-3)$$

analognom derivacijom možemo zapisati relativne duljinske deformacije u smjeru osi y iz : ε_y i ε_z .

Relativna kutna (posmična) deformacija u ravnini iznosi :

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (2-4)$$

cikličkom izmjenom indeksa dobivamo izraze i za preostale dvije kutna deformacije $2\varepsilon_{yz}$ i $2\varepsilon_{zx}$.

Prema (Kostrenčić, 1971) drugi član u izrazima (2-3) i (2-4) jednak je kvadratu prvog člana pa ako usvojimo točnost od 1 % (što je standard za tehničke proračune) proizlazi da odbacivanjem članova višega reda (članovi u zagradi) relativna normalna deformacija poprima vrijednost oko 1 %. S obzirom da deformacije uobičajenih konstrukcija pod uobičajenim djelovanjem ne prelaze 1/4 te vrijednosti i možemo koristiti temeljnu pretpostavku linearne TE, a to je da su relativne deformacije izražene prvom derivacijom pomaka:

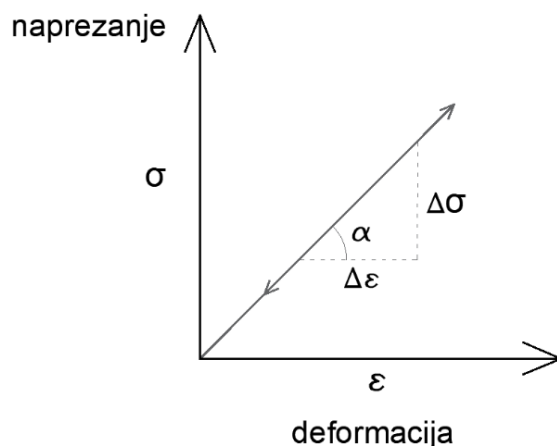
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (2-5)$$

Nelinearne članove iz istoga razloga možemo zanemariti i kod relativnih posmičnih deformacija:

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad 2\varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2-6)$$

2.3. Materijalna linearnost

Materijalnu linearnost vežemo uz idealizaciju ponašanja tijela koja opisuje vezu napreznja i deformacija. U slučaju materijalne linearnosti napreznja i deformacije su međusobno proporcionalne veličine te vrijedi reverzibilnost, odnosno kada materijal rasteretimo on *ne pamti* deformacije i vraća se u prvobitno stanje, što i prikazuje slika 2-8. (Dvornik, et al., 2020):



Slika 2-8. Grafički prikaz modela materijalne linearnosti (Hookeov zakona)

Nagib pravca $tg\alpha = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = E$, nazivamo elastičnom konstantom, odnosno Youngovim modulom elastičnosti koja se za pojedine materijale određuje eksperimentalno. Izraz koji povezuje naprezanja, deformacije i modul elastičnosti u formi materijalne linearnosti nazivamo Hookeov zakon:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2-7)$$

Takav model ima ograničenja i vrijedi samo kod vrlo malih naprezanja i deformacija. Nadalje, linearna zavisnost znači da jednoj vrijednosti naprezanja odgovara samo jedna vrijednost deformacije (Dvornik, et al., 2020).

3. TEORIJE SAVIJANJA GREDE

Kao što je opisano u uvodu, prva sveobuhvatna teorija savijanja grede pripisana je Euleru i Bernoulliju. Pretpostavke koje su oni uveli u proračun odnose se na pojednostavljenje odnosa pomak–deformacije i naprezanje – deformacije te su dovele do relativno jednostavnih proračunskih postupaka koje koristimo i danas. Za razliku od nje, Timošenkova teorija savijanja grede djelomično uzima u obzir deplanaciju (vitoperenje) poprečnog presjeka odnosno utjecaj posmičnih naprezanja na veličinu progiba koje ne možemo zanemariti ukoliko se radi o nosaču kod kojega duljina ne predstavlja dominantnu dimenziju u odnosu na visinu poprečnog presjeka.

Osim ove dvije teorije, koje se u praksi najčešće upotrebljavaju, u radu će biti prikazano i rješenje polja pomaka dobiveno iz Airyjevom funkcijom naprezanja za ravninske zadaće.

U okviru svih rješenja promatrat ćemo savijanje ravne grede konstantnog poprečnog presjeka opterećene okomito na os nosača pri čemu se os, ležajevi te opterećenje nalaze u istoj ravnini. Opterećenje može biti kontinuirano ili koncentrirano te može biti raspoređeno tako da izaziva čisto savijanje na dijelovima nosača.

3.1. Euler -Bernoulli-Navierova teorija savijanja grede

Kod izvoda diferencijalne jednadžbe elastične linije u okviru Euler-Bernoulli-Navierove teorije (EBN teorija), uvode se sljedeće pretpostavke i ograničenja:

I) Pretpostavke o deformacijama i raspodjeli naprezanja:

1. hipoteza ravnih poprečnih presjeka - pretpostavljamo da poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na progibnu liniju nosača iz čega proizlazi da je elastična linija dio kružnice,
2. sve komponente naprezanja, osim σ_x , jednake su nuli.

II) Navedene pretpostavke vrijede uz sljedeća ograničenja:

1. radi se o relativno dugim štapovima kod koji je duljina l barem pet puta veća od visina poprečnog presjeka h :

$$l \geq 5h$$

2. maksimalni nagib tangente na elastičnu liniju iznosi

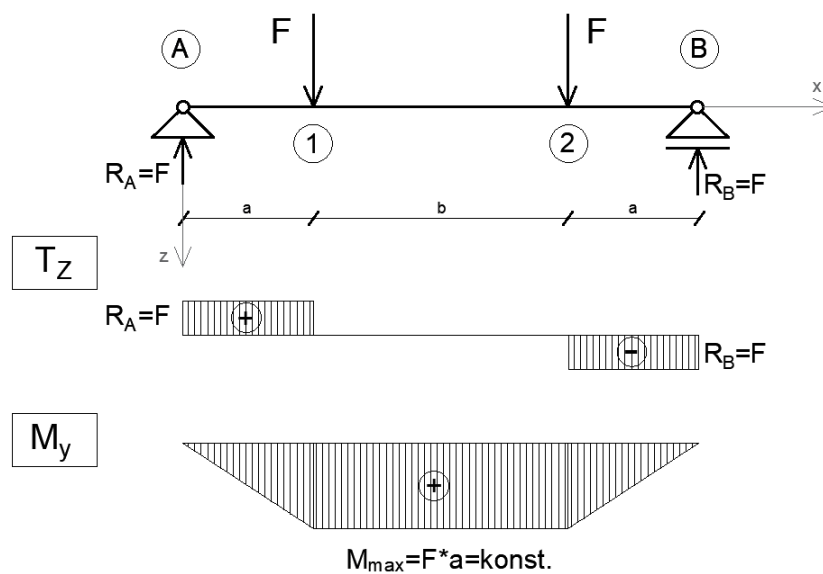
$$\alpha_{max} \cong 0,05 - 0,1 \text{ rad}$$

3. razmatramo stanje naprezanja u presjecima nosača koji su udaljeni barem za visinu h od oslonaca (ležajeva), početka ili kraja kontinuiranog opterećenja te koncentriranog opterećenja.

Treće ograničenje ima izravne veze sa Saint-Venantovim principom. Saint-Venantov princip govori da ako sile koje djeluju na malom djelu površine elastičnog tijela zamijenimo drugim, statički ekvivalentnim sustavom sila koje djeluju na tom istom dijelu, onda ta promjena rasporeda opterećenja izaziva bitne promjene u blizini koncentriranog opterećenja i oslonaca, ali ima zanemariv utjecaj na naprezanja na velikim udaljenostima u usporedbi s linearnim dimenzijama površine na kojoj se sile mijenjaju. U slučaju čistog savijanja grede čije su dimenzije poprečnog presjeka male u usporedbi sa njezinom duljinom, vanjski

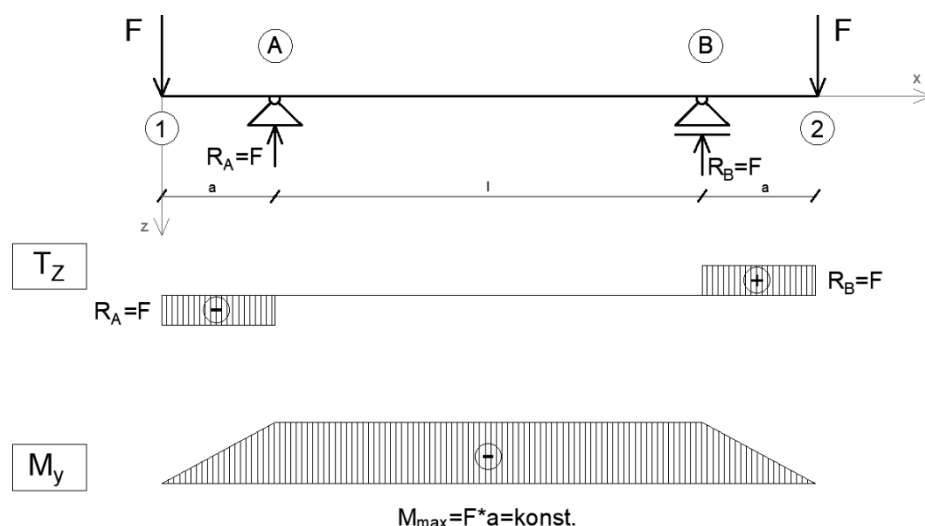
moment savijanja utječe na raspored naprezanja samo u blizini krajeva, a nema posljedice na udaljenije poprečne presjeke. Također vrijedi i za aksijalno naprezanje, gdje u blizini opterećenog dijela raspored naprezanja ovisi o načinu na koji djeluju uzdužne sile, a u poprečnim presjecima udaljenima od krajeva, naprezanja su raspoređena jednoliko (Timošenko i Gudier, 1962).

EBN teoriju savijanja grede izvedena je za stanje **čistog savijanja** kada je moment savijanja $M_y \neq 0$ i poprečna sila $T_z = 0$. Ovaj slučaj imamo na primjerima proste grede (Slika 3-1.) i grede s prepustima (Slika 3-2.) koji su opterećeni sa dvije sile istog intenziteta na istim udaljenostima od ležajeva.



Slika 3-1. Primjer čistog savijanja i savijanja silama

Vidimo da je poprečna sila (Slika 3-1.) između točaka **1^d** i **2^l** jednaka nuli, a moment savijanja je konstantna vrijednost i u tom području se javlja čisto savijanje. U dijelovima između označenih točaka **A** i **1^d** te **2^l** i **B**, poprečna sila je različita od nule i u tom slučaju dešava se savijanje poprečnim silama.



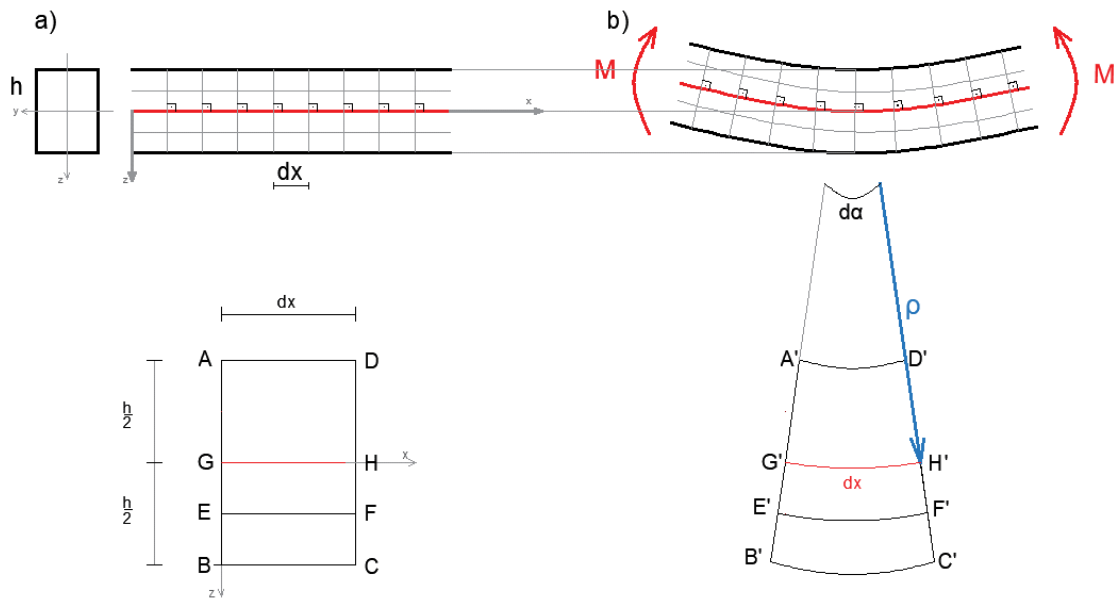
Slika 3-2. Greda s prepustom: primjer čistog savijanja i savijanje silama

Na drugom primjeru (Slika 3-2.), čisto savijanje možemo primijetiti između ležajeva A^d i B^l , a na prepustima se javlja savijanje silama između označenih točaka 1 i A^l te B^d i 2 . Na dijelovima gdje imamo čisto savijanje provest ćemo geometrijsku i statičku analizu.

3.1.1. Geometrijska analiza

Što se tiče same geometrije grede rekli smo da je ona konstantnog poprečnog presjeka, ravna (nije zakrivljena) te djelovanje na nju je u istoj ravnini kao i njezina os. Pod djelovanjem vanjskih sila dolazi do deformacija grede pri čemu uzdužna os prelazi u zakrivljenu liniju koju nazivamo elastična ili progibna linija (Šimić, 1992.).

Promatramo element grede diferencijalno male duljine dx prije i poslije deformacije (Slika 3-3.). Uzdužna vlakna na gornjoj strani deformirane grede se skraćuju, a na donjoj strani produžuju. Vlakno označeno GH ne mijenja duljinu i kažemo da se nalazi na neutralnom sloju nosača.



Slika 3-3. Dio nosača: a) prije deformacije, b) poslije deformacije

Relativna promjena duljine ε_x uzdužnog vlakna \overline{EF} koje se nalazi na udaljenosti z od neutralnog sloja dobivamo na sljedeći način:

$$\text{prije deformacije: } \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{GH} = \overline{EF} = dx$$

$$\text{poslije deformacije: } \overline{GH} = \widehat{G'H'} = dx = \rho d\alpha$$

$$\widehat{E'F'} = (\rho + z)d\alpha.$$

Iz čega slijedi da je relativna duljinska promjena:

$$\varepsilon_x = \frac{\widehat{E'F'} - \overline{EF}}{\overline{EF}} = \frac{(\rho + z - \rho)d\alpha}{\rho d\alpha} \quad (3-1)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\rho} * z.$$

Po ovome zaključujemo da se relativna dužinska deformacija mijenja linearno po visini poprečnog presjeka te da iznosi nula u neutralnoj osi:

$$\overline{GH} = \widehat{G'H'} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{0}{\rho} = 0.$$

Dobivenu relativnu duljinsku deformaciju povezujemo s normalnim naprezanjem preko Hookeov zakona:

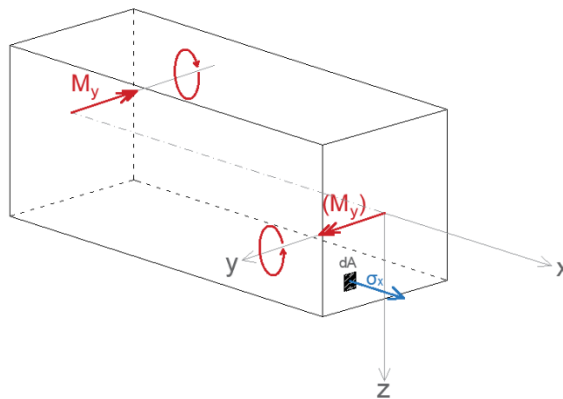
$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = \frac{E}{\rho} \cdot z \quad (3-2)$$

Iz čega slijedi da su normalna naprezanja linearno raspoređena po visini poprečnog presjeka.

3.1.2. Statička analiza

Od unutarnjih sila pojavljuje se samo moment savijanja M_y pa iz uvjeta ravnoteže proizlazi:

$$\begin{aligned} \sum M_y &= 0 \\ -M_y + \iint_A \sigma_x z \, dA &= 0 \\ M_y &= \iint_A \sigma_x z \, dA = konst. \end{aligned} \quad (3-3)$$



Slika 3-4. Prikaz unutarnjih sila i naprezanja

Izraz (3-2) možemo uvrstiti u izraz (3-3):

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_A \frac{E}{\rho} \cdot z^2 \, dA = konst. \\ M_y &= \frac{E}{\rho} \iint_A z^2 \, dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_y = konst. \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{M_y}{E \cdot I_y} = konst. \end{aligned} \quad (3-4)$$

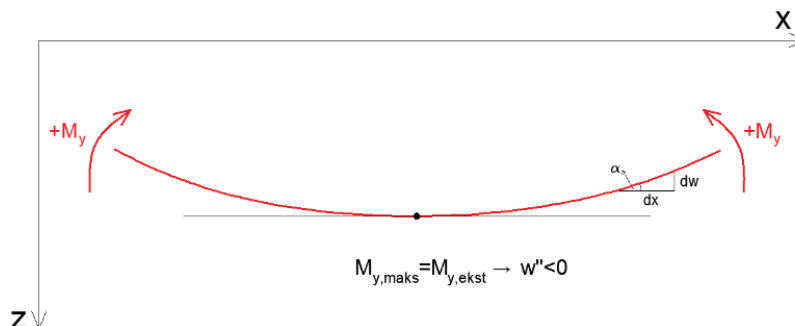
Izvedeni izraz (3-4) ekvivalentan je izrazu (2-1) kojeg smo spomenuli u uvodu. Proizlazi da je zakrivljenost elastične linije konstantna vrijednost na području gdje je $M_y(x)$ konstantno. Integral $\iint_A z^2 \, dA$ je geometrijska karakteristika poprečnog presjeka koju nazivamo momentom tromosti ili inercije. Umnožak $E \cdot I_y$ predstavlja krutost na savijanje (fleksijska krutost). Ako s $w(x)$ označimo vertikalnu komponentu pomaka osi nosača tada će izraz (2-2) glasiti:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-w''(x)}{(1 + w'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3-5)$$

Za vrlo male progibe član $w'(x)^2$ će težiti 0 pa ćemo ga zanemariti odnosno nazivnik poprima vrijednost 1, stoga izraz (3-5) možemo napisati ovako:

$$\frac{1}{\rho} = \pm w''(x). \quad (3-6)$$

Predznak ovisi o izboru koordinatnog sustava (Slika 3-5.):



Slika 3-5. Odabrani koordinatni sustav i predznaci (Šimić, 1992., p. str. 415.)

Prema skici nagib tangente na elastičnu liniju odnosno kut zaokreta jednak je prvom derivaciji funkcije progiba:

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha = \frac{dw}{dx} = w'. \quad (3-7)$$

Za odabranu orijentaciju koordinatnog sustava i progib elastične linije koji nastaje pod djelovanjem pozitivnih momenata savijanja (slika 3-5.) vidimo da je $M_{y,ekstr} = M_{y,maks}$ što znači da druga derivacija funkcije $M_y(x)$ mora biti manja od nule. Izjednačit ćemo izraze (3-4) i (3-6) te dobivamo:

$$w''(x) = -\frac{M_y}{E \cdot I_y}. \quad (3-8)$$

Izraz (3-8) predstavlja diferencijalnu jednadžbu progibne (elastične) linije. Dobili smo jednadžbu drugog reda za čije su rješenje potrebna dva rubna uvjeta: pomak (progib) w i kut zaokreta α .

Važno je ponoviti da diferencijalnu jednadžbu koju smo dobili za čisto savijanje možemo koristiti i za savijanje poprečnim silama uz ograničenja koja smo uveli na početku ovog poglavlja.

3.1.3. Progib desne konzole prema EBN teoriji

Prikazat ćemo analitičko rješenje prema EBN teoriji za nosač upet na desnom kraju i opterećenog koncentriranom silom na slobodnom kraju raspona.

Statički sustav je konzola opterećena u ravnini (Slika 3-6.):



Slika 3-6. Prikaz statičkog sustava

S obzirom da se radi o statički određenom sustavu za proračun reaktivni i unutarnjih sila dovoljne su samo jednačbe ravnoteže. Za ravninski model to su tri jednačbe koje postavljamo na nedeformiranom nosaču jer je riječ o teoriji I. reda. Prvo računamo sumu svih sila u smjeru osi x:

$$1) \sum F_x = 0 \text{ i. z.} \quad (3-9)$$

Kažemo da je izraz (3-9) identički zadovoljen (i. z.) jer je sila F okomita na os nosača, odnosno njezina projekcija na os x je nula.

U drugoj jednačbi ravnoteže računamo sumu svih sila u smjeru osi z:

$$2) \sum F_z = 0, \quad (3-10)$$
$$R_A = F.$$

Treća jednačba ravnoteže kaže da suma svih momenata oko točke A mora biti nula:

$$3) \sum M_A = 0 \quad (3-11)$$
$$M_A = -F \cdot l$$

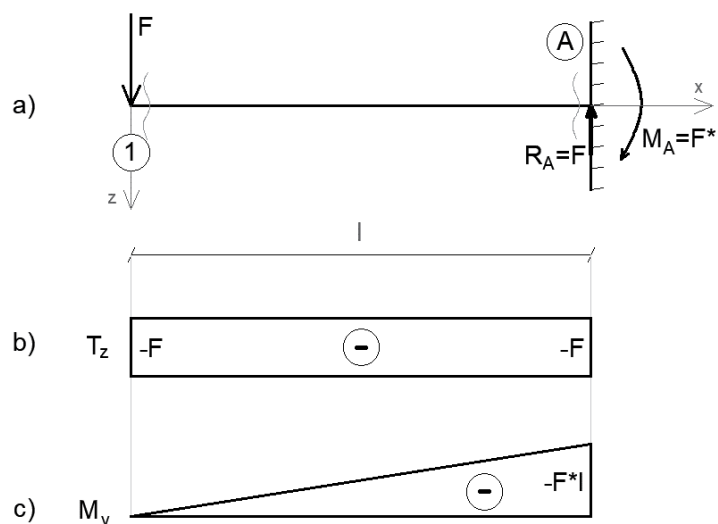
Nakon što smo proračunali reaktivne sile, slijedi proračun unutarnjih sila koje određujemo presijecanjem nosača zamišljenim ravninama u karakterističnim točkama okomito na os nosača i proračunom ravnoteže za zadržani dio.

Iz uvjeta ravnoteže zadržanog djela nosača proračunamo intenzitete unutarnjih sila u karakterističnim točkama, 1 i A što prikazuje Tablica 3-1.

Tablica 3-1. Intenziteti unutarnjih sila u karakterističnim točkama konzole

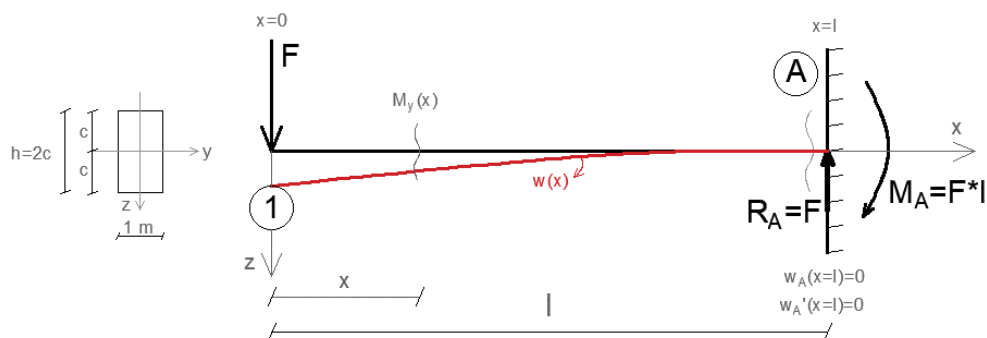
N – uzdužna sila	T_z – poprečna sila	M_y – moment savijanja
(N)	(N)	(Nm)
$N_1 = 0$	$T_{z,1} = -F$	$M_{y,1} = 0$
$N_A = 0$	$T_{z,A} = -F$	$M_{y,A} = -F \cdot l$

Dijagrami unutarnjih sila prikazuje slika 3-7. te izgledaju ovako:



Slika 3-7. Prikaz dijagrama unutarnjih sila: a) slika položaja, b) poprečna sila, c) moment savijanja

U sljedećem koraku tražimo jednadžbu elastične linije za što nam je potrebno poznavati oblik i geometriju poprečnog presjeka (Slika 3-8.)



Slika 3-8. Prikaz elastične linije i poprečnog presjeka nosača

Vrijednost momenta savijanja na udaljenosti x duž osi nosača glasi:

$$M_y(x) = -F \cdot x \quad (3-12)$$

Uvrštavajući funkciju momenta u izraz (3-8) slijedi:

$$w''(x) = \frac{-(-F \cdot x)}{E \cdot I_y} = \frac{F \cdot x}{E \cdot I_y} \quad (3-13)$$

Umnožak $E \cdot I_y$ je konstanta pa ju možemo prebaciti na lijevu stranu jednakosti stoga izraz (3-13) možemo zapisati i ovako:

$$w''(x) \cdot E \cdot I_y = F \cdot x. \quad (3-14)$$

Izraz (3-14) moramo integrirati dva puta kako bismo dobili funkciju progiba $w(x)$. Nakon prve integracije dobivamo izraz pomoću kojeg ćemo dobiti funkciju za kut zaokreta $w'(x)$:

$$w'(x) \cdot E \cdot I_y = \frac{1}{2} F \cdot x^2 + C_1. \quad (3-15)$$

Još jednom integracijom dobivamo izraz pomoću kojeg ćemo dobiti funkciju progiba $w(x)$:

$$w(x) \cdot E \cdot I_y = \frac{1}{2 \cdot 3} F \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2. \quad (3-16)$$

Konstante integracije C_1 i C_2 računamo pomoću rubnih uvjeta. Na upetom kraju su progib i kut zaokreta jednaki nuli: $w_A(x=l) = 0$, $w_A'(x=l) = 0$, stoga konstante integracije iznose:

$$C_1 = -\frac{1}{2} F \cdot l^2,$$

$$C_2 = \frac{1}{3} F \cdot l^3.$$

Uvrstimo li konstante integracije C_1 i C_2 u izraze (3-15) i (3-16) dobivamo sljedeće:

$$w'(x) \cdot E \cdot I_y = \frac{1}{2} F \cdot x^2 - \frac{1}{2} F \cdot l^2 \quad (3-17)$$

$$w(x) \cdot E \cdot I_y = \frac{1}{6} F \cdot x^3 - \frac{1}{2} F \cdot l^2 \cdot x + \frac{1}{3} F \cdot l^3. \quad (3-18)$$

Osim konstanti integracije u izraze za funkcije progiba i kuta zaokreta uvrstit ćemo i moment tromosti I_y kao geometrijsku karakteristiku poprečnog presjeka. Za pravokutan poprečan presjek jedinične širine moment tromosti iznosi:

$$I_y = \frac{1 \cdot (2c)^3}{12} = \frac{2}{3} c^3. \quad (3-19)$$

Nakon što uvrstimo i moment tromosti, konačno rješenje za funkciju kuta zaokreta iznosi:

$$w'(x) = \frac{1}{E} \left(\frac{3F}{4c^3} x^2 - \frac{3F}{4c^3} l^2 \right), \quad (3-20)$$

a konačan izraz za funkciju progiba iznosi:

$$w(x) = \frac{1}{E} \left(\frac{F}{4c^3} \cdot x^3 - \frac{3F}{4c^3} l^2 \cdot x + \frac{F}{2c^3} l^3 \right) \quad (3-21)$$

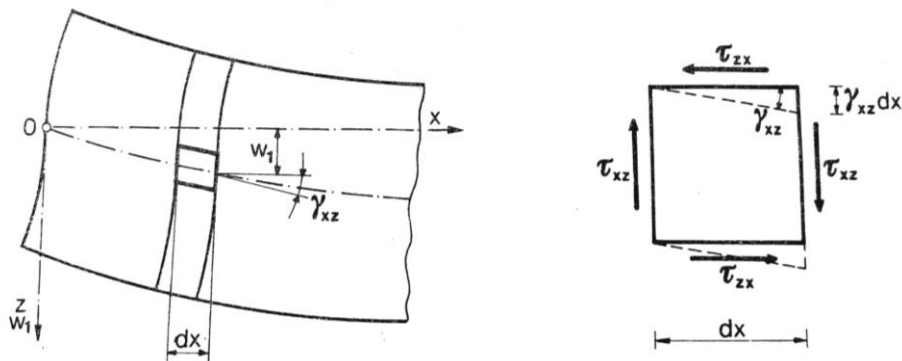
Najveći progib će biti za $x = 0$ i izraz nakon sređivanja izgleda ovako:

$$w_{max} = \frac{F}{2Ec^3} l^3 \quad (3-22)$$

3.2. Timošenkova greda

Timošenkova greda je naziv nadopunjene ili proširene EBN teorije savijanja. Elastična linija nosača koja je dobivena pomoću EBN teorije odnosno diferencijalne jednačine za čisto savijanje (3-8) može se upotrijebiti i kod općeg slučaja savijanja kada je omjer visine nosača (h) i raspona (l) relativno malen. Međutim kod kratkih i visokih greda kod kojih je omjer $h/l \geq 1/5$ nužno je uzeti u obzir utjecaj posmičnih napreznja na veličinu progiba elastične linije.

Općenito, zbog nejednolike raspodjele posmičnih napreznja po visini presjeka, dolazi do iskrivljenja, odnosno deplanacije poprečnoga presjeka, pri čemu presjeci nosača više ne ostaju ravni i okomiti na elastičnu os nosača. Prema Timošenkovom približnom proračunu poprečni presjeci ostaju ravni, međutim kutovi koje zatvaraju s progibnom linijom više nisu *pravi*. Promjena nagiba u odnosu na progibnu liniju određuje se iz posmične deformacije elementa presjeka koji je smješten na neutralnoj osi. Elementi na osi ostaju vertikalni i međusobno klize, što uzrokuje kut nagiba tangente elastične linije uslijed smicanja, koji odgovara kutu klizanja u težištu presjeka (Slika 3-9.).



Slika 3-9. Prikaz posmičnih napreznja, (Šimić, 471. str., 1992.)

Upravo tu vrijednost kuta klizanja uvodimo kao dodatni član u izraz za progib prema Timošenkovoj gredi na sljedeći način:

$$\gamma_{xz} = \frac{(\tau_{xz})_{z=0}}{G} = \frac{T_z S_y}{I_y b G}, \quad (3-23)$$

gdje je S_y statički moment polovice presjeka s obzirom na neutralnu os, a b je širina poprečnog presjeka na neutralnoj osi. U odgovarajućem presjeku kut nagiba tangente elastične linije zbog smicanja je:

$$\frac{dw_\tau}{dx} = \frac{T_z S_y}{I_y b G} = \frac{T_z S_y}{I_y b G} \cdot \frac{A}{A}, \quad (3-24)$$

Uvest ćemo bezdimenzijski faktor:

$$k' = \frac{S_y A}{I_y b}, \quad (3-25)$$

pa sada izraz (3-24) možemo zapisati kao:

$$\frac{dw_\tau}{dx} = k' \frac{T_z}{GA}, \quad (3-26)$$

gdje je T_z poprečna sila u presjeku x , G modul posmika, A površina poprečnog presjeka.

Prema (3-25) k' je bezdimenzionalni koeficijent koji ovisi o obliku poprečnog presjeka. U našem slučaju k' za pravokutni poprečni presjek iznosi:

$$k' = \frac{S_y A}{I_y b} = \frac{bh^2 bh \cdot 12}{8bh^3 b} = 1,5. \quad (3-27)$$

Deriviranjem izraza (3-26) dobiva se zakrivljenost izazvana smicanjem:

$$\frac{d^2 w_\tau}{dx^2} = k' \frac{d}{dx} \left(\frac{T_z}{GA} \right) = \frac{k'}{GA} \frac{dT_z}{dx}. \quad (3-28)$$

Zakrivljenosti izazvanoj momentom savijanja doda se zakrivljenost izazvana smicanjem i dobije se ovakav izraz:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} &= -\frac{M}{EI_y} + \frac{k'}{GA} \frac{dT_z}{dx}, \quad (3-29) \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= -\frac{1}{EI_y} \left(M - k' \frac{EI_y}{GA} \frac{dT_z}{dx} \right). \end{aligned}$$

Ako je nosač cijelim rasponom opterećen kontinuiranim opterećenjem q , poprečna je sila T_z neprekinuta funkcija od x , stoga je $\frac{dT_z}{dx} = -q$ pa izraz (3-29) izgleda ovako:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{1}{EI_y} \left(M + k' \frac{EI_y q}{GA} \right). \quad (3-30)$$

Prvi član u zagradi u izrazu (3-30) predstavlja utjecaj momenta savijanja, a drugi član utjecaj poprečne sile na progib.

3.2.1. Progib desne konzole prema Timošenku

Primjenu izraza (3-19) prikazat ćemo na primjeru statičkog sustava prikazanog na slici 3-6. Unutarnje sile i geometrija poprečnoga presjeka dani su na slikama 3-7 i 3-8.

Progib zbog utjecaja poprečne sile određuje se integriranjem jednadžbe (3-26):

$$w_\tau(x) = k' \frac{T_z}{GA} x + C_1. \quad (3-31)$$

Konstantu integracije C_1 računamo pomoću rubnog uvjeta. Na upetom kraju su progib i kut zaokreta jednaki nuli.

- rubni uvjet

$$w_A(x = l) = 0 - \text{progib u upetom ležaju jednak je nuli}$$

Stoga konstanta integracije C_1 iznosi:

$$0 = k' \frac{-F}{GA} l + C_1 \Rightarrow C_1 = k' \frac{F}{GA} l \quad (3-32)$$

Uvrštavanjem izraza (3-32) u izraz (3-31) te uzimajući u obzir izraz (3-27) i $b = 1$ m, imamo:

$$w_\tau(x) = k' \frac{-F}{GA} x + k' \frac{F}{GA} l = 1,5 \frac{F}{Gh} (l - x) \quad (3-33)$$

Ukupni progib konzole Timošenkovim približnim postupkom dobivamo sumirajući izraz za progib prema EBN teoriji (3-21) i izraz (3-33):

$$w(x) = \frac{1}{E} \left(\frac{F}{4c^3} \cdot x^3 - \frac{3F}{4c^3} l^2 \cdot x + \frac{F}{2c^3} l^3 \right) + 1,5 \frac{F}{Gh} (l - x) \quad (3-34)$$

Izraz (3-34) predstavlja ukupan progib elastične linije nosača prilikom djelovanja momenta savijanja i poprečne sile.

Maksimalni progib slobodnog kraja nosača prema ovom proračunu je veći od (3-22) i iznosi:

$$w(0) = \frac{F}{2Ec^3} l^3 + 1,5 \frac{F}{Gh} \cdot l \quad (3-35)$$

3.3. Rješenje polja pomaka za desnu konzolu iz uvjeta ravninskog stanja naprezanja

Prema (Timošenko i Gudier, 1962) stanje naprezanja u ravninskim problemima opisano je Airyjevom funkcijom naprezanja $\Phi(x, z)$ za koju vrijedi:

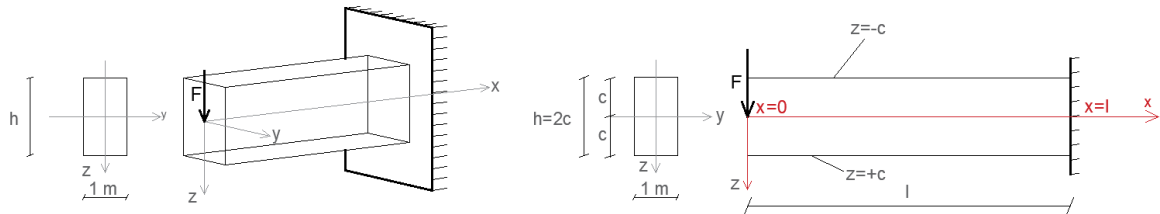
$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} = 0 \quad (3-36)$$

i za koju su komponente naprezanja jednake:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \quad (3-37)$$

Rješenje polja naprezanja dobivamo integriranjem diferencijalne jednačbe (3-36) uz zadovoljenje rubnih uvjeta.

Razrada rješenja polja pomaka iz izraza (3-36) i (3-37) za primjer desne konzole opterećene koncentriranom silom na slobodnom kraju i pravokutnog poprečnog presjeka jedinične širine (Slika 3-10.), dano je u radu (Jaguljnjak Lazarević, et al., 2024).



Slika 3-10. Desna konzola, opterećenje i geometrija

Tijek proračuna obuhvaća i raščlambu rješenja polja pomaka zato što se rubni uvjet upetosti može postići na dva načina, (Tablica 3-2.):

Tablica 3-2. Dvije grupe rubnih uvjeta

I. $u(l, 0) = 0$	I. $u(l, 0) = 0$
II. $w(l, 0) = 0$	II. $w(l, 0) = 0$
III. a) $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=l} = 0$ $z=0$	III. b) $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x=l} = 0$ $z=0$

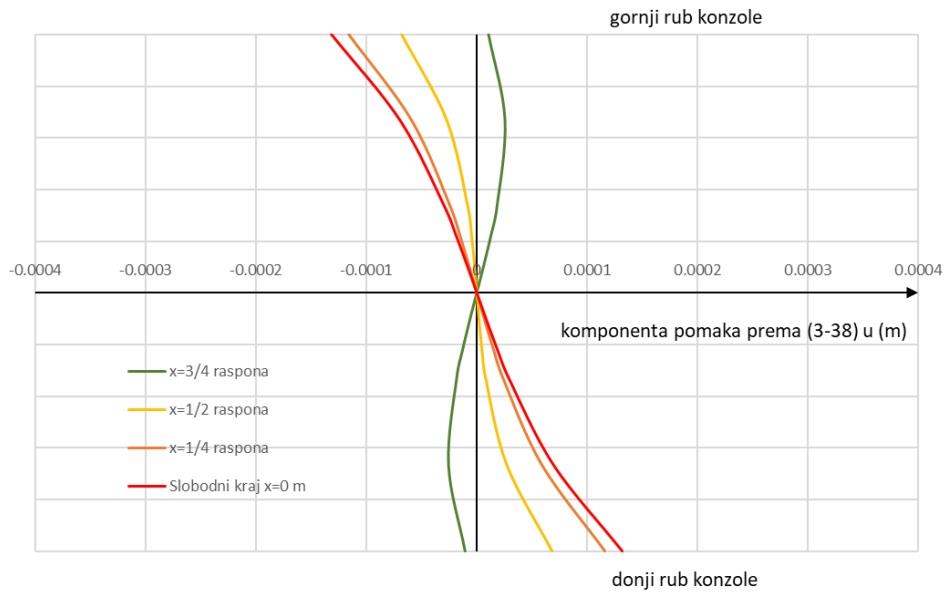
U oba slučaja točka A ima spriječen horizontalni i vertikalni pomak: $u(l, 0) = w(l, 0) = 0$. Rješenja se razlikuju prema načinu na koji je onemogućen kut zaokreta: **a)** spriječena je rotacija elementa na osi grede ili **b)** spriječena je rotacija vertikalnog elementa ležaja.

Prema prvoj grupi rubnih uvjeta dobivamo polje pomaka koje glasi:

$$u = -\frac{F}{2EI_y} \cdot x^2 \cdot z - \frac{\nu \cdot F}{6EI_y} \cdot z^3 + \frac{F}{6GI_y} \cdot z^3 + \frac{F}{2I_y} \left(\frac{l^2}{E} - \frac{c^2}{G} \right) \cdot z \quad (3-38)$$

$$w = \frac{\nu \cdot F}{2EI_y} \cdot x \cdot z^2 + \frac{F}{6EI_y} \cdot x^3 - \frac{F \cdot l^2}{2EI_y} \cdot x + \frac{F \cdot l^3}{3EI_y} \quad (3-39)$$

Iz izraza vidimo da dolazi do deplanacije poprečnog presjeka jer komponente pomaka u i w ovise o koordinati (Slika 3-11.).



Slika 3-11. Prikaz deplancije poprečnog presjeka za a) grupu rubnih uvjeta

Ako promatramo samo elastičnu liniju $z = 0$, te ako za moment tromosti uvrstimo $I_y = \frac{2}{3} c^3$ tada dobivamo izraz:

$$w = \frac{F}{4Ec^3} \cdot x^3 - \frac{F \cdot l^2}{4Ec^3} \cdot x + \frac{F \cdot l^3}{2Ec^3} \quad (3-40)$$

koji je jednak izrazu (3-21) dobivenom primjenom EBN teorije.

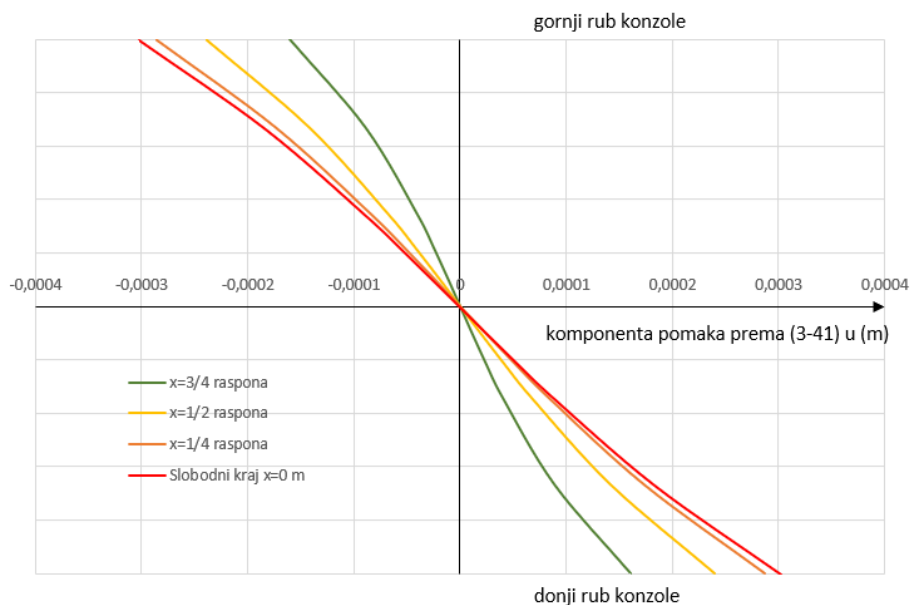
Horizontalni pomak u je za elastičnu liniju jednak je nuli ($u = 0$).

Za drugu grupu rubnih uvjeta komponente polja pomaka glase:

$$u(x, z) = -\frac{F}{2EI_y} \cdot x^2 \cdot z - \frac{\nu \cdot F}{6EI_y} \cdot z^3 + \frac{F}{2GI_y} \cdot z^3 + \frac{F \cdot l^2}{2EI_y} \cdot z \quad (3-41)$$

$$w(x, z) = \frac{\nu \cdot F}{2EI_y} \cdot x \cdot z^2 + \frac{F}{6EI_y} \cdot (x^3 - l^3) + \frac{F}{2I_y} \cdot \left(\frac{c^2}{G} + \frac{l^2}{E} \right) \cdot (l - x) \quad (3-42)$$

I ovo rješenje daje deplanciju poprečnog presjeka jer komponente pomaka ovise o koordinati z (Slika 3-12.).



Slika 3-12. Prikaz deplanacije poprečnog presjeka za b grupu rubnih uvjeta

Ako promatramo samo pomak elastične osi ($z = 0$) i uvrstimo moment tromosti $I_y = \frac{2}{3} c^3$ izraz (3-42) izgleda ovako:

$$w(x, 0) = \frac{F}{4Ec^3} \cdot x^3 - \frac{3F \cdot l^2}{4Ec^3} \cdot x + \frac{F \cdot l^3}{2Ec^3} + \frac{F \cdot c^2}{2GI_y} (l - x) \quad (3-43)$$

Dobiveni izraz isti je kao izraz (3-34) izveden za Timošenkovu gredu.

Iz usporedbe slike 3-11. i slike 3-12. vidimo da je za grupu **b** rubnih uvjeta dobivena veća deplanacija poprečnoga presjeka pa ćemo iz tog razloga u daljnjim analizama koristiti polje naprezanja prema izrazima (3-41) i (3-42).

4. USPOREDBA REZULTATA

Usporedit ćemo rješenja maksimalnih pomaka desne konzole koje daju proračuni prema: EBN teoriji (3-22), Timošenkovom približnom proračunu (3-35) te rješenju za polje pomaka (3-41) i (3-42). Proračuni su provedeni pomoću Microsoft Excela.

Proračunske materijalne karakteristike dane su u Tablica 4-1.

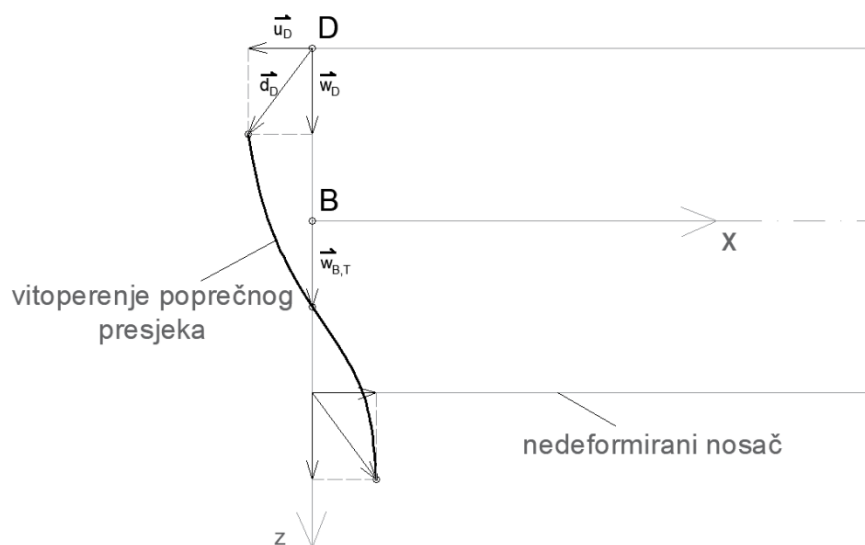
Tablica 4-1. Materijalne karakteristike

Materijal	Modul elastičnosti (GPa)	Poissonov koeficijent	Čvrstoća na savijanje/Dopušteno naprezanje (MPa)
Kamen*	8,5	0,35	4,3
Drvo - četinari II. klasa	10	0,20	10
Staklo	70	0,23	27
Čelik S355	210	0,30	230

Poprečni presjek nosača u svim proračunima bit će kvadratnih dimenzija 1×1 m dok će se duljina nosača varirati u vrijednostima $l = 1$ m; 1,5 m; 2 m; 2,5 m i 3 m.

*Vrijednosti za kamen preuzete su iz: Hrženjak, et al., 2013.

Za usporedbu rezultata odabrane su točke D i B koje po pojedinim teorijama daju najveće vrijednosti, Slika 4-1.



Slika 4-1. Točke s najvećim vrijednostima pomaka

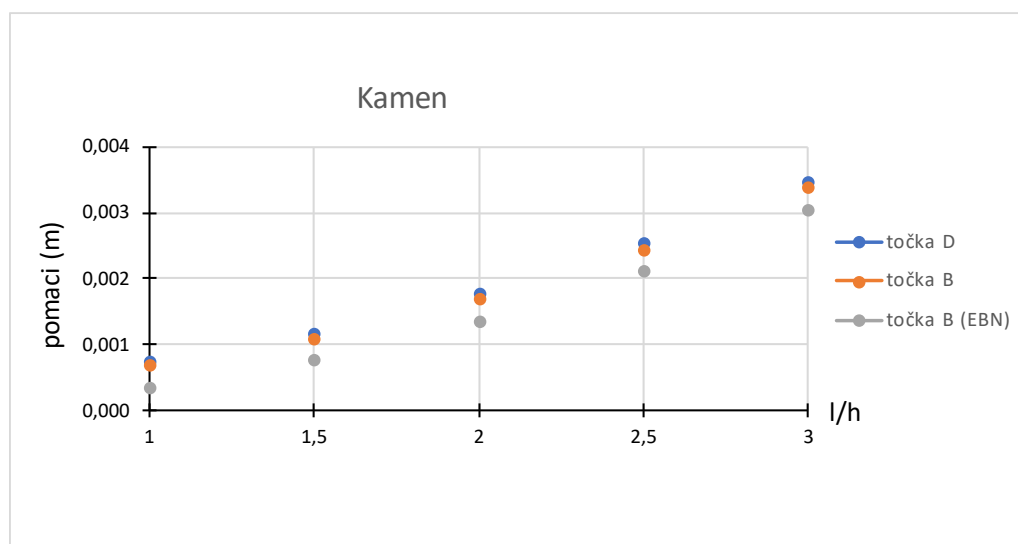
Za EBN i Timošenkov proračun, koji daje vrijednosti samo za os nosača, to je točka B s koordinatama (0;0), dok je za rješenje polja pomaka to točka D (0; -0,5) na vlačnoj strani nosača. Pomak točke D je vektor $\vec{d}_D = u_D \vec{i} + w_D \vec{k}$ čije komponente dobivamo prema (3-41) i (3-42). Primijetimo da istu vrijednost pomaka ima i točka s koordinatama (0;0,5) koja se nalazi u tlačnoj zoni.

Prikaz rješenja za pojedine materijalne prikazani su tablično i grafički. Rješenje za kamen prikazuje tablica 4-2.

Tablica 4-2. Rješenja za kamen

l/h	$w_{B,EBN}$	$w_{B,T}$	$ \vec{d}_D = \sqrt{u_D^2 + w_D^2}$	$ \vec{d}_D /w_{B,EBN}$	$ \vec{d}_D /w_{B,T}$
-	(m)	(m)	(m)	%	%
1	0,000337	0,000679	0,000743	101,3	9,5
1,5	0,000759	0,001100	0,001175	45,0	6,8
2	0,001349	0,001690	0,001772	25,3	4,8
2,5	0,002108	0,002449	0,002535	16,2	3,5
3	0,003035	0,003377	0,003465	11,3	2,6

Dobivene vrijednosti u Tablica 4-2. prikazane su na Slika 4-2.



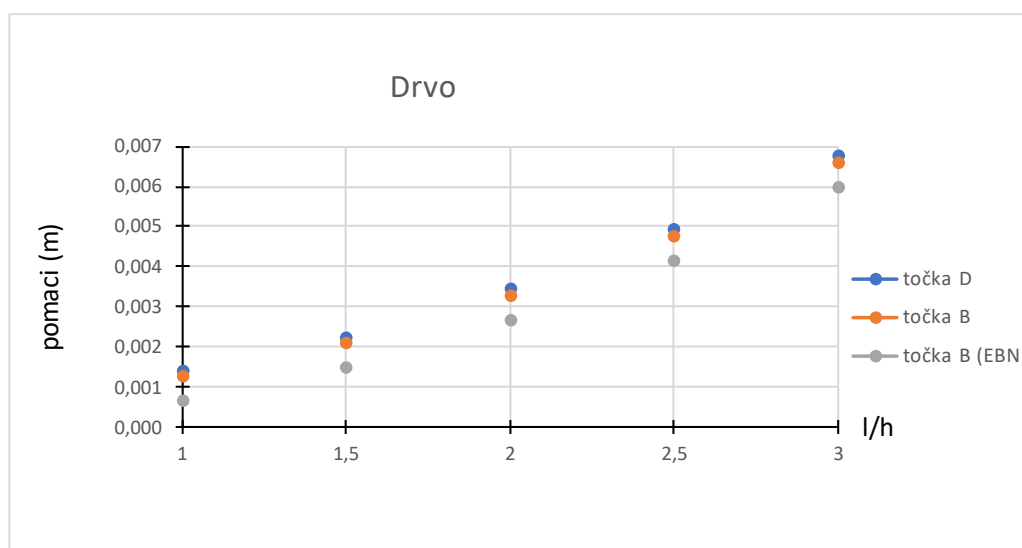
Slika 4-2. Vrijednosti za kamen

Rješenja za drvo prikazuje tablica 4-3.

Tablica 4-3. Rješenja za drvo

l/h	$w_{B,EBN}$	$w_{B,T}$	$ \vec{d}_D = \sqrt{u_D^2 + w_D^2}$	$ \vec{d}_D /w_{B,EBN}$	$ \vec{d}_D /w_{B,T}$
-	(m)	(m)	(m)	%	%
1	0,000667	0,001267	0,001398	90,0	10,4
1,5	0,001500	0,002100	0,002251	40,0	7,2
2	0,002667	0,003267	0,003430	22,5	5,0
2,5	0,004167	0,004767	0,004937	14,4	3,6
3	0,006000	0,006600	0,006775	10,0	2,7

Dobivene vrijednosti u tablici 4-3. prikazane su na slici 4-3.



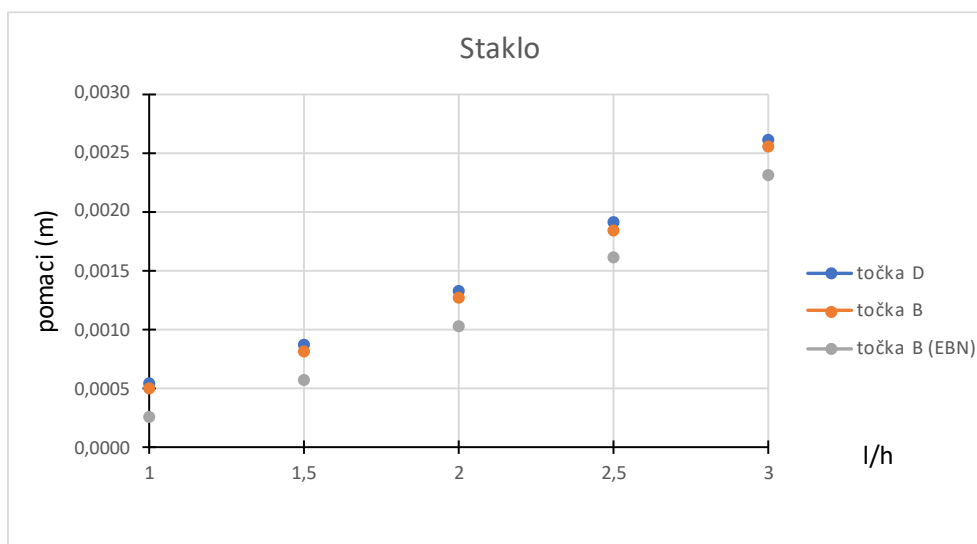
Slika 4-3. Vrijednosti za drvo

Rješenja za staklo prikazuje tablica 4-4.

Tablica 4-4. Rješenja za staklo

l/h	$w_{B,EBN}$	$w_{B,T}$	$ \vec{d}_D = \sqrt{u_D^2 + w_D^2}$	$ \vec{d}_D /w_{B,EBN}$	$ \vec{d}_D /w_{B,T}$
-	(m)	(m)	(m)	%	%
1	0,000257	0,000494	0,000545	92,3	10,2
1,5	0,000579	0,000816	0,000874	41,0	7,1
2	0,001029	0,001266	0,001329	23,1	5,0
2,5	0,001607	0,001844	0,001910	14,8	3,6
3	0,002314	0,002552	0,002619	10,3	2,6

Dobivene vrijednosti u tablici 4-4. prikazane su na slici 4-4.



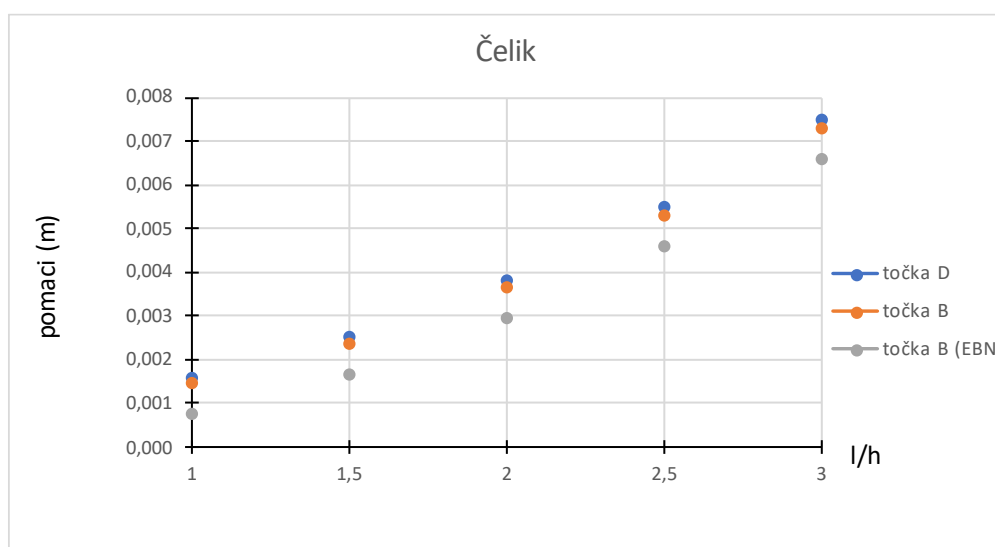
Slika 4-4. Vrijednosti za staklo

Rješenja za čelik prikazuje tablica 4-5.

Tablica 4-5. Rješenja za čelik

l/h	$w_{B,EBN}$ (m)	$w_{B,T}$ (m)	$ \vec{d}_D = \sqrt{u_D^2 + w_D^2}$ (m)	$ \vec{d}_D /w_{B,EBN}$ %	$ \vec{d}_D /w_{B,T}$ %
1	0,000730	0,001442	0,001583	97,5	9,8
1,5	0,001643	0,002355	0,002518	43,3	6,9
2	0,002921	0,003633	0,003810	24,4	4,9
2,5	0,004563	0,005275	0,005461	15,6	3,5
3	0,006571	0,007283	0,007474	10,8	2,6

Dobivene vrijednosti u tablici 4-5. prikazane su na slici 4-5.



Slika 4-5. Vrijednosti za čelik

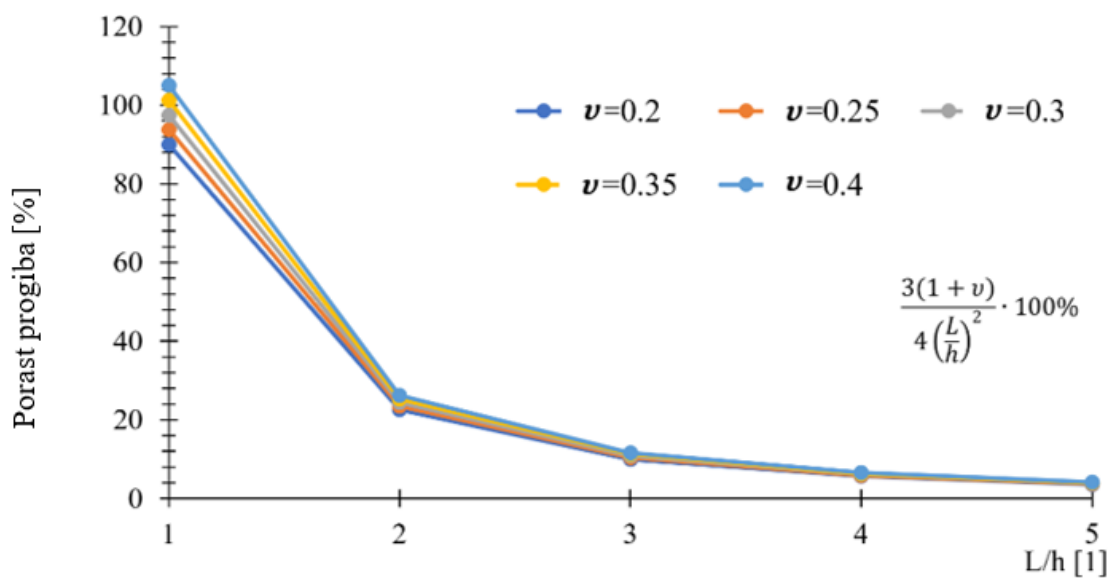
5. ZAKLJUČAK

U radu je prikazana razrada i primjena analitičkih rješenja za progib kratke konzole opterećene koncentriranom silom na slobodnom kraju. Dan je povijesni pregled razvoja proračunskih modela u teoriji elastičnosti koji se odnose na savijanje grede. Opisani su i izvedeni izrazi za deformaciju elastične linije prema Euler-Bernoulli-Navier teoriji i Timošenkovom približnom proračunu. Izrazi za polje pomaka izvedeni su iz ravninskog stanja naprezanja opisanog Airyevom funkcijom. Na kraju je proveden proračun pomaka za različite vrste materijala: kamen, staklo, drvo i čelik te različite omjere duljine nosača i visine poprečnog presjeka. Uspoređujući rezultate proračuna maksimalnih pomaka slobodnoga kraja kratke konzole, tablice 4-2. – 4-5. i slike 4-2. – 4-5., možemo zaključiti sljedeće:

- bez obzira na vrstu materijala te omjera duljine i visine l/h nosača razlike pomaka točke D dobivene iz rješenja za polje pomaka $|\vec{d}_D|$ i točke B prema Timošenkovom približnom proračunu $w_{B,T}$, vrlo je mala. Za omjer $l/h = 1$ pomak točke D veći je samo 9,5 – 10,4 %. Taj postotak opada s porastom omjera l/h , te za $l/h = 3$ iznosi svega 2,6 – 2,7%. S obzirom na sve pretpostavke koje prate uvođenje proračunskih modela možemo reći da su razlike između ova dva načina proračuna zanemarive.
- Razlika pomaka $|\vec{d}_D|$ i točke B prema EBN teoriji $w_{B,T}$, izrazito ovisi o omjeru duljine i visine l/h nosača ali ne i o vrsti materijala. Za omjer $l/h = 1$ pomak točke D veći je čak 90 – 101,3 % za sve vrste materijala. S porastom omjera l/h postotak povećanja progiba naglo opada i za $l/h = 3$ iznosi svega 10 – 11,3 %.
- Dobiveni odnosi pomaka odgovaraju ovisnosti prikazanoj u članku Jaguljnjak Lazarević, et al., (2024), tablica 5-1. i slika 5-1.. Ovisnost je izvedena iz izraza za proračun progiba elastične linije desne konzole Timošenkovim približnim proračunom (3-35) koji je moguće izraziti i kao $w = \frac{Fl}{Ebh} \left[4 \left(\frac{l}{h} \right)^2 + 3(1 + \nu) \right]$.

Tablica 5-1. Postotak povećanja progiba slobodnog kraja konzole zbog posmične deformacije (Jaguljnjak Lazarević, et al., (2024))

Ovisnost progiba o omjeru l/h i ν					
ν l/h	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
1	90 %	94 %	98 %	101 %	105 %
2	23 %	23 %	24 %	25 %	26 %
3	10 %	10 %	11 %	11 %	12 %
4	6 %	6 %	6 %	6 %	7 %
5	4 %	4 %	4 %	4 %	4 %



Slika 5-1. Porast progiba zbog utjecaja posmičnog naprezanja (Jaguljnjak Lazarević, et al., (2024))

6. LITERATURA

DVORNIK, J., LAZAREVIĆ, D., 2005.. Manjkavosti proračunskih modela inženjerskih konstrukcija. *Građevinar*, 25 Svibanj.

DVORNIK, J., LAZAREVIĆ, D., BIĆANIĆ, N., 2020. *O načelima i postupcima proračuna građevinskih konstrukcija*. 2 ur. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet.

GRANGER, 1648. *Galileo Cantilever*. s.l.:an.

HRŽENJAK, P., 2009. *Mehanika stijena 1. Predavanja na preddiplomskom studiju rudarstva (elektronički medij: moodle.srce.hr)*. Zagreb: an.

HRŽENJAK, P., JAGULJNJAK LAZAREVIĆ, A., TOPIĆ, Z., COTMAN, I., 2013. *Development and Application of in Situ Flexural Strength Testing Method*. s.l., Montréal: Canadian Institute of Mining, Metallurgy and Petroleum, Technical Paper Library.

JAGULJNJAK LAZAREVIĆ, A., DVORNIK, J., FRGIĆ, L., 2011.. Utjecaj pogreške zaokruživanja na točnosti proračuna konstrukcije. *Građevinar*, Srpanj.

JAGULJNJAK LAZAREVIĆ, A., MALIŠ, T., ŠAMEC, E., JEREČIĆ, E., 2024. Influence of Shear Strain on the Deflection of Girders. *Civil Engineering Journal*, 5, p. 14.

KOSTREŃIĆ, Z., 1971. *Teorija elastičnosti*. Zagreb: an.

NONVEILLER, E., 1981. *Mehanika tla i temeljenje građevina*. 2 ur. Zagreb: Školska knjiga.

ŠIMIĆ, V., 1992.. *Otpornost materijala I*. Zagreb: Školska knjiga.

TIMOŠENKO, S., GUDIER, J. N., 1962. *Teorija elastičnosti*. Beograd: Građevinska knjiga.